

数 联 天 地 网 站 地 图

江苏教育出版社

初等数学前沿

陈　计　叶中豪　主编

初等数学前沿

陈 计 叶中豪 主 编

责任编辑 王巧林 毛永生

出版发行:江 苏 教 育 出 版 社

(南京中央 165 号,邮政编码:210009)

经 销:江 苏 省 新 华 书 店

印 刷:扬 州 印 刷 总 厂

(扬州市江都路 44 号,邮政编码:225003)

开本 850×1168 毫米 1/32 印张 14.75 插页 2 字数 370,000

1996 年 4 月第 1 版 1996 年 4 月第 1 次印刷

印数 1—4000 册

ISBN 7—5343—2663—X

G·2403 定价:13.60 元

江苏教育版图书若有印刷装订错误,可向承印厂调换

目　录

生长点和渗透窗

（代序言）

扬州大学数学系　蒋　声

初等数学研究历史悠久.自从算术、几何学、代数学和三角学诞生以来，人们一直不断地用自己的创造性工作使它们的内容日趋丰富和发展.今日数学已有突飞猛进发展，面目焕然一新，但是初等数学研究非但没有停滞不前，反而比以往更加活跃.当今世界各国有很多初等数学杂志，每年发表大量文章，其中不乏研究佳作.美国《数学评论》杂志报导评论的浩如烟海的世界最新数学研究重要文献中，也包含一些初等数学杂志上发表的初等数学论文.

为什么在现代数学新观念、新方法、新理论层出不穷的今天，初等数学研究仍然是一片兴旺景象呢？

这是因为，任何复杂深奥的数学新理论都是在某些相对说来比较简单和比较基本的旧理论的基础上发展起来的，在旧理论中可以找到新理论的生长点.初等数学是整个数学中最简单最基本最贴近生活受实践考验最多的部分，因而在初等数学中集聚了很多生长点，随着数学日益发展，初等数学中的生长点也日见增多.现代数学是一棵参天大树，迎风伸展万千枝条；初等数学就是它那茁壮树干临近地面洋溢泥土芬芳的部分.叶附于枝，枝出于干，树活干活，树长干长.

例如，不等式就是一个重要的生长点.在现代数学各分支中常需处理涉及不等式的问题，解决这些问题固然主要依靠现代数学的深刻思想和有关的特殊定理、方法、技巧，但在某些环节上往往也需借助适当的初等不等式.甚至有时一个初等不等式不是首先

出现在初等数学文献中，而是在一篇艰深的数学研究论文中作为引理而被提出和证明.通常，一个条件简洁、结论简明的初等不等式，往往存在被推广和获得进一步应用的可能性.推广的途径多种多样，例如可借助线性空间、增高维数、考虑曲率或引进拓扑等.不等式的条件和结论愈简洁，推广和应用的可能性愈大.

几何变换是又一个重要的生长点.根据德国数学家菲力克斯·克莱因的《爱尔朗根纲要》的观点，一种几何学就是研究在相应变换群下不变的几何性质的理论.代数学中的凯莱定理则断言任何抽象群都同构于一个变换群.在初等数学中，几何变换可用来帮助迅速发现怎样作辅助线；在现代数学中，几何变换则可在大段繁琐演算或抽象推理之前帮助猜测可能的结果和设计合理的研究路线.在建筑设计、机械制造和钣金工艺制作中，几何变换又被用来绘制各种投影图、直观图和展开图，直接为生产服务.

生长点往往同时又是渗透的窗口.初等数学可以从这里往现代数学方向生长，现代数学可以从这里向中小学教育渗透.

例如，运算律是一个生长点，通过它可从初等数学中的数系引向近世代数学中的群、环、域等抽象代数结构.运算律又是一个渗透窗，通过它可借助“定义新运算”的数学竞赛题让中学生以喜闻乐见方式领略群论花絮.

又如，通过存在性问题的窗口，组合数学中的抽屉原则渗透到中小学数学竞赛题里面，很多学生稍经训练，便可得心应手熟练运用.

通过常规数学问题解法研究和教材研究同样也能实现渗透.面积法证几何题和用几何变换解答证明题都是这方面成功的实例.这两种方法首先在现代几何学研究中显露威力，通过挖掘它们解答初等问题的潜力，逐步发展成初等数学中的解题锐利武器.

在研究初等数学中的生长点和渗透窗时，如果着眼于探索解法的思路和叙述解法的过程，从方法上概括共性，就引导到数学方

法论. 处理初等数学问题、高等数学问题和现代数学研究问题，在技巧上大不相同，在思维方法上却遵循共同的基本规律. 除去归纳与演绎、分析法与综合法、直接证法与间接证法这样一些对数理化生自然科学不同学科普遍适用的一般方法而外，要能总结出数学特有的方法，需要将数学的不同部分互相比较，取其共性. 熟知的“映射—关系—反演”原则(MRI)和最近提出的一组常用数学思想方法“抽象、观察、分解、变化、逼近”(AODVA)，都是通过将初等数学与现代数学对照而概括提炼出来的.

考虑初等数学问题时，如果注意联想大学数学课程中的有关知识，结果也能发现初等数学里的许多生长点和渗透窗. 这种联想可帮助我们对初等数学获得新的认识，将初等数学教学和研究水平推向新的高度.

研究论文

正整数集上的 Kuratowski 问题

南京师范大学数学系　单　墫

拓扑学中有一个著名的 Kuratowski 问题:对任一点集 A,由集 A 经过取补集与取闭包的运算,至多产生 14 个集[1],[2].

例如,设全集 I 为区间[1,5],集

$$A = \{[1,2]\text{中的有理点}\} \cup [2,3) \cup (3,4] \cup \{5\},$$

用 $f(A)$ 表示 A 的闭包,$g(A)$ 表示 A 的补集,则 A 及

$$f(A) = [1,4] \cup \{5\},$$
$$g(A) = \{[1,2]\text{中的无理点}\} \cup \{3\} \cup (4,5),$$
$$gf(A) = g(f(A)) = (4,5),$$
$$fg(A) = [1,2] \cup \{3\} \cup [4,5],$$
$$fgf(A) = [4,5],$$
$$gfg(A) = (2,3) \cup (3,4),$$
$$gfgf(A) = [1,4),$$
$$fgfg(A) = [2,4],$$
$$fgfgf(A) = [1,4],$$
$$gfgfg(A) = [1,2) \cup (4,5],$$
$$gfgfgf(A) = (4,5],$$
$$fgfgfg(A) = [1,2] \cup [4,5],$$
$$gfgfgfg(A) = (2,4).$$

这 14 个集互不相同,而再进行取补集与取闭包的运算不能产生新的集.

1960 年 P. C. Hammer[3] 将上述问题推广至更一般的集合运算. 在论文的最后，他提出一个未解决的问题，这个问题可以叙述成如下形式：

设 N 为全体自然数的集合，对任一集 $A \subseteq N$，令 $g(A) = N - A$，$f(A) = \langle A \rangle$，这里 $\langle A \rangle$ 表示 A 经乘法生成的集，即

$\langle A \rangle = \{$任意多个 A 中元素(允许相同) 相乘的积$\}$

(单独一个元素也算作积，所以 $\langle A \rangle \supseteq A$).

若由 A 经过 f、g 的多次复合，恰好产生 14 个不同的集(包括 A 本身)，则 A 称为 K 集.

K 集是否存在?

这个问题，在已有文献上，没有见到解答.

1992 年，作者在香港中文大学访问期间，香港数学会主席岑嘉评(K. P. Shum) 博士设宴招待王元先生和我，席间谈起这个问题，岑先生很兴奋地说他已经找到 K 集的例子. 这是一个饶有趣味的数论问题，我回到宾馆仔细思考，也找到两个 K 集的例子. 次日与岑先生交流，发现所找到的例子互不相同. 岑先生的例子是

$$A = \{5, 2^2 \times 3^2, 7, 2 \times 5^2, 2^2 \times 3^2, 3 \times 7^2, 3^2 \times 7^3\} \tag{1}$$

其中有 7 个数，共含 4 个质因数(2,3,5,7).

我的例子是

$$A = \{2, 3^3, 2 \times 3, 2 \times 5, 2 \times 5^2, 2 \times 3 \times 5, 2 \times 3 \times 5^2\} \tag{2}$$

与

$$A = \{2, 2 \times 3, 2 \times 5, 2 \times 3 \times 5, 3^3\}. \tag{3}$$

元数分别为 7 与 5，而质因数的个数均为 3.

下面证明(3) 确实是 K 集((1)，(2) 是 K 集可以同样证明)，证明是初等、直接的，与岑嘉评[4] 完全不同.

将 $f(A)$，$g(A)$，$gf(A)$ 等简记作 f，g，gf 等.

首先 f 具有性质

(i) 若集 $A \subseteq B$,则 $f(A) \subseteq f(B)$;

(ii)$f(A) \supseteq A$;

(iii)$f(f(A)) = f(A)$.

这三条性质可分别称为单调增,扩大,幂.

g 具有性质

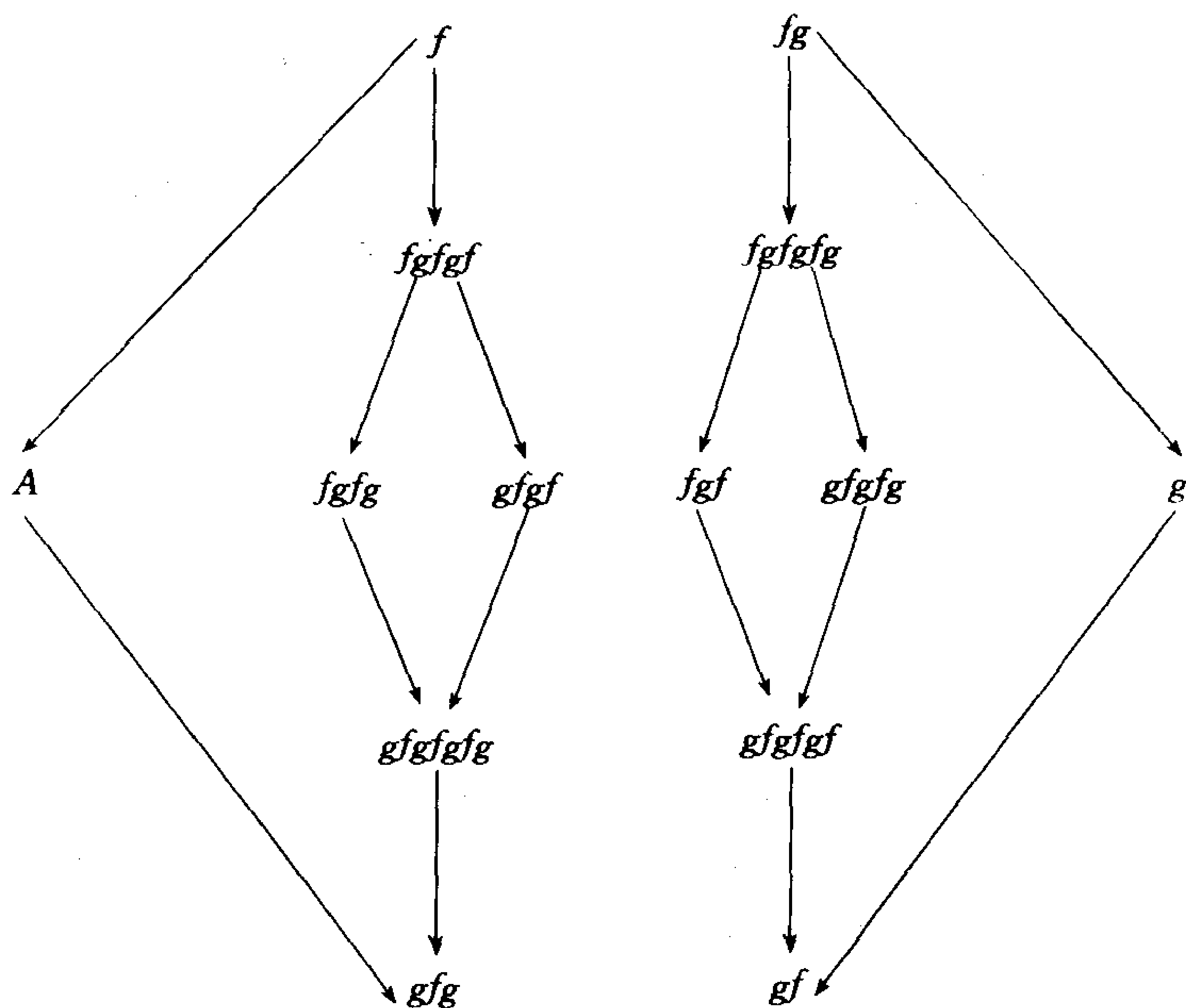
(iv) 若集 $A \subseteq B$,则 $g(A) \supseteq g(B)$;

(v)$g(g(A)) = A$.

这两条性质分别称为单调减,幂零.

显然,通常集的补集与闭包也具有这些性质.

为完整起见,我们证明任一集 A 经过 f、g 的复合,至多产生 14 个不同的集.先建立两个图:



分别称为左图、右图.

图中的 $B \to C$ 表示 $B \supseteq C$.

左图中的偏序关系建立如下：

(1) 由 $g \subseteq fg$ 得 $A \supseteq gfg$.

(2) 由 $f \supseteq gfg(f)$ 得 $f \supseteq fgfgf$.

(3) 易知 gfg 是单调增的. 因此，由 $f \supseteq A$ 得 $gfgf \supseteq gfg$，从而 $fgfgf \supseteq fgfg$.

(4)$gfgfgfg = gfg(fgfg) \subseteq gfg(f) = gfgf$.

(5)$gfgfgfg = gfg(fgfg) \subseteq fgfg$.

(6) 由 $f(gfg) \supseteq gfg$ 得 $gfgfg \subseteq fg$，从而 $gfgfgfg \supseteq gf(fg) = gfg$.

将 g 作用于左图，就产生右图的偏序关系.

在左、右两个图中已有 14 个集，未在图中出现的、由复合而得的、接下去的两个集应当是 $fgfgfgf$ 与 $fgfgfgfg$. 但我们有

(1)$fgfgfgf = fgf$.

事实上，由右图

$fgfgfgf = f(gfgfgf) \supseteq f(gf) = fgf$.

由左图，

$fgf = f(gf) \supseteq fgfgf(gf) = fgfgfgf$.

(2)$fgfgfgfg = fgfg$.

事实上，由(1)(将 A 换作 $g(A)$)，

$fgfgfgfg = fgfgfgf(g) = fgf(g) = fgfg$.

于是，由 f、g 复合，除图中 14 个集外，不能产生其它的集.

对于集

$A = \{2, 2 \times 3, 2 \times 5, 2 \times 3 \times 5, 3^3\}$,

我们有

$gfg = \{2, 2 \times 3, 2 \times 5, 2 \times 3 \times 5\} \neq A$.

因为 $3 \notin f$，所以 $3 \in gf$，$3, 3^2$，$3^3 \in fgf$，$3, 3^2, 3^3 \notin fgfgf$. 而 $3^3 \in f$，所以 $fgfgf \neq f$.

$2\times 3^2, 2\times 5^2 \notin f$,所以 $2\times 3^2, 2\times 5^2 \in gf$,$(2\times 3^2)\times(2\times 5^2)\in fgf$,即 $(2\times 3\times 5)^2 \in fgf$,从而 $(2\times 3\times 5)^2 \notin gfgf$,但 $(2\times 3\times 5)^2 \in fgfg$.

$2^2\times 3^3 \notin f(gfg) = fgfg$, $2^2\times 3^3 \in f$, 并且若 $2^2\times 3^3 = n_1 n_2 \cdots n_k (k\geqslant 2)$,则至少有一个 n_i 中 3 的幂指数不大于 2 的幂指数,因而这个 $n_i \in f$,从而 $n_i \notin gf$, $2^2\times 3^3 \notin fgf$, $2^2\times 3^3 \in gfgf$.

以上两段表明 $fgfg$ 与 $gfgf$ 不可比较,从而 $fgfg, gfgf, fgfgf, gfgfgfg$ 这四个集两两不等.

因为 $2, 2^2, 2^3, \cdots \in fgfg$,所以 $2, 2^2, 2^3, \cdots \notin gfgfg$;$2, 2^2, 2^3, \cdots \notin fgfgfg$;$2, 2^2, 2^3, \cdots \in gfgfgfg$. 从而 $gfgfgfg, fgfg, gfgf, fgfgf, f$ 都是无穷集,不与有限集 A、gfg 相等.

于是左图的 7 个集各不相同. 它们的补集即右图的 7 个集也各不相同.

左图的任一集决不可能等于右图的集. 如果这种情况发生,左图的最大集 f 包含右图的最小集 gf,产生矛盾.

因此,由 A 经 f、g 复合恰产生 14 个不同的集.

显然,A 中的素数 2,3,5 可换为任三个不同的素数,所得的集仍为 K 集.

(3) 是元数最小的 K 集,而且其中各数所含的不同素因数个数也最少,这一点不难证明.

Kuratowski 问题还有其它的推广,例如

1. 设 t 为区间 $[0,1]$ 中的实数,定义

$$g(t) = 1 - t.$$

显然 g 具有单调减、幂零(即 $g(g(t)) = t$)这两个性质,又设函数 $f:[0,1]\to[0,1]$ 满足

(i) 单调增,

(ii) $f(t) \geqslant t$,

(iii) $f(f(t)) = f(t)$.

则 g 与 f 复合，至多产生 14 个不同的函数(连同函数 t 在内).

2. 设平面上的点所成的集为 X. 对于任两个点 (a_1,b_1), (a_2,b_2)，约定在 $a_2 > a_1$ 或 $a_2 = a_1$ 且 $b_2 > b_1$ 时，

$$(a_1,b_1) < (a_2,b_2).$$

如果 g 是关于原点的对称，而 $f: X \to X$，满足

(i) 单调增，

(ii) 对任一点 t, $f(t) \geqslant t$,

(iii) 对任一点 t, $f(f(t)) = f(t)$.

那么由 f 与 g 复合，至多产生 14 个不同的函数.

在这两种情况中，均可举出恰好产生 14 个函数的例子.

参考文献

[1] K. Kuratowski, Sur l'operation $\overline{A}$ de l'analysis sitas, Fundamenta Mathematicae, 3(1922), 182 — 199.

[2] J. L. Kelly 著，吴从炘、吴让泉译，《一般拓扑学》，科学出版社，1982 年，52.

[3] P. C. Hammer, Kuratowski's closure theorem, Nieuw Archief voor Wiskunde(3), 8(1960), 74 — 80.

[4] 岑嘉评，正整数集上的 Kuratowski 闭余问题，待发表.

Apèry 数的同余性质

武汉大学数学系　曾登高

(一) 引　　言

Apèry 序列是指：$A_0 = 1, A_1 = 5$,

$$n^3 A_n - (34n^3 - 51n^2 + 27n - 5)A_{n-1} + (n-1)^3 A_{n-2} = 0. \quad (1)$$

这个序列的前几项为

$A_0 = 1, A_1 = 5, A_2 = 73, A_3 = 1445, A_4 = 33001, A_5 = 819005,$

$A_6 = 21460825, A_7 = 584307365, A_8 = 16367912425,$

$A_9 = 468690849005, A_{10} = 13657436403073,$

$A_{11} = 403676083788125, A_{12} = 12073365010564729, \cdots.$

由递推式(1)，Apèry 还推得

$$A_n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k}^2 \binom{n+k}{k}^2. \quad (2)$$

1980 年，S. Chowla、J. Cowles 和 M. Cowles[2] 将上述数称为 Apèry 数，并讨论了它的许多同余性质，主要有

定理 1　对所有 $n \geqslant 0$，A_n 为奇数.

定理 2　对所有素数 p，$A_p \equiv 5 \pmod{p^2}$.

他们还提出了

猜测 1　对所有素数 $p \geqslant 5$，$A_p \equiv 5 \pmod{p^3}$.

猜测 2　对奇素数 p，$A_p \equiv 0 \pmod{5}$.

猜测 1、2 早在 1982 年就被 I. Gessel[4] 所解决，继后，

Y. Mimura[5]、F. Beukers[6]、[7]、M. J. Coster[8]、P. T. Young[9] 均有探讨. 笔者[15]曾得出 Apèry 数对模16的完善结果，本文中，我们将得到 Apèry 数模 p^4 的同余性质，主要结果有

定理 3 对所有素数 $p \geqslant 5$，

$$A_p \equiv 5 - 7p^2 \sum_{k=1}^{p-1} \frac{1}{k^2} \pmod{p^4}.$$

（二）引 理

首先，我们要在剩余类中引入互逆概念.

定义 若 p 为素数，$(a,p)=1$，$a,b \in Z/p^tZ$ 且 $ab \equiv 1 \pmod{p^t}$，则称 b 为 a 对模 p^t 的逆，记作 a^{-1} 或 $\frac{1}{a}$.

易知，上述定义中若 a 确定，则 a^{-1} 也唯一确定.

引理 1[2] 对所有素数 $p \geqslant 5$，有

$$\sum_{k=1}^{p-1} \frac{1}{k^2} \equiv 0 \pmod{p}. \tag{3}$$

引理 2[15] 对所有素数 $p \geqslant 5$，有

i)（Wolstenholme 定理）$\displaystyle\sum_{k=1}^{p-1} \frac{1}{k} \equiv 0 \pmod{p^2}$； (4)

ii) $\displaystyle\sum_{k=1}^{p-1} \frac{1}{k^3} \equiv 0 \pmod{p^2}$. (5)

引理 3 对所有素数 $p \geqslant 5$，有

$$\binom{2p}{p}^2 \equiv 4\left(1 - 2\sum_{i=1}^{p-1} \frac{1}{i^2} p^2\right) \pmod{p^4}. \tag{6}$$

证明 $\displaystyle\binom{2p}{p} = 2\prod_{k=1}^{p-1} \frac{p+k}{k} = 2\prod_{k=1}^{p-1}\left(1 + \frac{p}{k}\right)$

$$\equiv 2\left(1 + \sum_{i=1}^{p-1} \frac{1}{i} p + \sum_{i \neq j} \frac{1}{ij} p^2 + \sum_{i \neq j \neq l} \frac{1}{ijl} p^3\right) \pmod{p^4}.$$

$$\because 0 \equiv \left(\sum_{i=1}^{p-1} \frac{1}{i}\right)^3 = \sum_{i=1}^{p-1} \frac{1}{i^3} + 3\sum_{i\neq j} \frac{1}{i^2 j} + 6\sum_{i\neq j\neq l} \frac{1}{ijl}$$

$$\equiv 3\sum_{i\neq j} \frac{1}{i^2 j} + 6\sum_{i\neq j\neq l} \frac{1}{ijl} \pmod{p},$$

$$\sum_{i\neq j} \frac{1}{i^2 j} = \sum_{i<j} \frac{1}{i^2 j} + \sum_{i>j} \frac{1}{i^2 j}$$

$$\equiv \sum_{i<j} \frac{1}{i^2 j} + \sum_{i<j} \frac{1}{(p-i)^2(p-j)}$$

$$\equiv \sum_{i<j} \frac{1}{i^2 j} + \sum_{i<j} \frac{1}{i^2(-j)} \equiv 0 \pmod{p},$$

故而 $$6\sum_{i\neq j\neq l} \frac{1}{ijl} \equiv 0 \pmod{p}.$$

即 $$\sum_{i\neq j\neq l} \frac{1}{ijl} \equiv 0 \pmod{p}.$$

又 $$\because 2\sum_{i\neq j} \frac{1}{ij} = \left(\sum_{i=1}^{p-1} \frac{1}{i}\right)^2 - \sum_{i=1}^{p-1} \frac{1}{i^2} \equiv -\sum_{i=1}^{p-1} \frac{1}{i^2} \pmod{p^2}, \tag{7}$$

$$2\sum_{i=1}^{p-1} \frac{1}{i} = \sum_{i=1}^{p-1} \frac{1}{i} + \sum_{i=1}^{p-1} \frac{1}{(p-i)} \equiv \sum_{i=1}^{p-1} \frac{p}{i(p-i)}$$

$$\equiv -\sum_{i=1}^{p-1} \frac{1}{i^2} p \pmod{p^2}, \tag{8}$$

故 $$\binom{2p}{p} \equiv 2\left(1 + \sum_{i=1}^{p-1} \frac{1}{i} p + \sum_{i\neq j} \frac{1}{ij} p^2 + \sum_{i\neq j\neq l} \frac{1}{ijl} p^3\right)$$

$$\equiv 2 - \sum_{i=1}^{p-1} \frac{1}{i^2} p^2 - \sum_{i=1}^{p-1} \frac{1}{i^2} p^2$$

$$\equiv 2\left(1 - \sum_{i=1}^{p-1} \frac{1}{i^2} p^2\right) \pmod{p^4},$$

即 $$\binom{2p}{p}^2 \equiv 4\left(1 - 2\sum_{i=1}^{p-1} \frac{1}{i^2} p^2\right) \pmod{p^4}.$$ □

由引理 3 及(8)式，我们从数量上进一步肯定了 A. Gardiner[14] 的结果.

即对所有素数 $p \geqslant 5$，下面三个同余式彼此等价：

$$\text{(A)}\quad \binom{2p}{p} \equiv 2 \pmod{p^4},$$

$$\text{(B)}\quad \sum_{r=1}^{p-1} r^{-1} \equiv 0 \pmod{p^3},$$

$$\text{(C)}\quad \sum_{r=1}^{p-1} r^{-2} \equiv 0 \pmod{p^2}.$$

（三）定理3的证明

对于 $k = 1,2,\cdots,p-1$，有

$$\frac{1}{p}\binom{p}{k} = \frac{(p-1)\cdots(p-k+1)}{1\cdot 2\cdot \cdots \cdot k} = \prod_{x=1}^{k-1}(p-x)\Big/\prod_{x=1}^{k} x$$

$$= \frac{1}{k}\prod_{x=1}^{k-1}\left(\frac{p}{x}-1\right)$$

$$\equiv (-1)^{k-1}\frac{1}{k} + (-1)^k \frac{1}{k}\sum_{i=1}^{k-1}\frac{1}{i}p \pmod{p^2},$$

$$\binom{p+k}{k} = \prod_{x=1}^{k}(p+x)\Big/\prod_{x=1}^{k} x = \prod_{x=1}^{k}\left(\frac{p}{x}+1\right)$$

$$\equiv 1 + \sum_{i=1}^{k}\frac{1}{i}p \pmod{p^2}.$$

故 $$A_p \equiv 1 + \binom{2p}{p}^2 + \sum_{k=1}^{p-1}\binom{p}{k}^2\binom{p+k}{k}^2$$

$$\equiv 1 + \binom{2p}{p}^2$$

$$+ p^2\sum_{k=1}^{p-1}\left[(-1)^{k-1}\frac{1}{k} + (-1)^k\frac{1}{k}\sum_{i=1}^{k-1}\frac{1}{i}p\right]^2\left(1+\sum_{i=1}^{k}\frac{1}{i}p\right)^2$$

$$\equiv 1 + \binom{2p}{p}^2 + p^2\sum_{k=1}^{p-1}\left(\frac{1}{k^2} - 2\frac{1}{k^2}\sum_{i=1}^{k-1}\frac{1}{i}p\right)\left(1+2\sum_{i=1}^{k}\frac{1}{i}p\right)$$

$$\equiv 1+\binom{2p}{p}^2+p^2\sum_{k=1}^{p-1}\left(\frac{1}{k^2}+\left(2\frac{1}{k^2}\sum_{i=1}^{k}\frac{1}{i}-2\frac{1}{k^2}\sum_{i=1}^{k-1}\frac{1}{i}\right)p\right)$$

$$\equiv 1+\binom{2p}{p}^2+p^2\sum_{k=1}^{p-1}\left(\frac{1}{k^2}+2\frac{p}{k^3}\right)$$

$$\equiv 1+\binom{2p}{p}^2+p^2\sum_{k=1}^{p-1}\frac{1}{k^2}$$

$$\equiv 5-8\sum_{k=1}^{p-1}\frac{1}{k^2}p^2+\sum_{k=1}^{p-1}\frac{1}{k^2}p^2$$

$$\equiv 5-7p^2\sum_{k=1}^{p-1}\frac{1}{k^2} \qquad (\text{mod } p^4). \qquad \square$$

参考文献

[1] A. J. Van der Poorten, A proof that Euler missed ... Apèry's proof of the irrationality of &(3), Math. Intelligencer, 1(1979), 195 — 203.

[2] S. Chowla, J. Cowles, M. Cowles, Congruence properties of Apèry numbers, J. Number Theory, 12(1980), 188 — 190.

[3] J. Cowles, A congruence on Apèry numbers, J. Number Theory, 12(1980), 85 — 86.

[4] I. Gessel, Some congruences for Apèry numbers, J. Number Theory, 14(1982), 362 — 368.

[5] Y. Mimura, Congruence properties of Apèry numbers, J. Number Theory, 16(1983), 138 — 146.

[6] F. Beukers, Some congruences for the Apèry numbers, J. Number Theory, 21(1985), 141 — 155.

[7] F. Beukers, Another congruence for the Apèry numbers, J. Number Theory, 25(1987), 201 — 210.

[8] M. J. Coster, Supercongruences.

[9] P. T. Young, Apèry number, Jacobi sums, and special values of generalized p-adic hypergeometric functions, J. Number Theory,

41(1992),231 — 255.

[10] K. Davis, W. Webb, A binomial coefficient congruence modulo prime powers, J. Number Theory, 43(1993), 20 — 23.

[11] D. F. Bailey, Two p^3 variations of Lucas theorem, J. Number Theory, 35(1990), 208 — 215.

[12] P. Goetgheluck, Computing binomial coefficients, Amer. Math. Monthly, 94(1987), 360 — 365.

[13] R. J. McIntosh, A generalization of a congruential property of Lucas, Amer. Math. Monthly, 99(1992), 231 — 238.

[14] A. Gardiner, Four problems on prime power divisiblity, Amer. Math. Monthly, 95(1988), 926 — 931.

[15] G. H. Hardry, E. M. Wright, An Introduction to the Theory of Numbers, 1981.

解丢番图方程的一种有力的初等方法

哈尔滨工业大学数学系　曹珍富

（一）

丢番图方程是数论的一个古老的分支，是专门研究不定方程的整数解、正整数解或有理数解的分支，所以有时也称为数论中的不定方程．古希腊三世纪的丢番图(Diophantus)曾研究过许多这方面的问题（当然都是非常基本的），所以才有“丢番图方程”(Diophantine Equations)这样一个固定的数学术语．

纵观对丢番图方程的研究历史，历代著名的数学家几乎都从事过这方面的有关问题的研究．如今，已经创造了许多解丢番图方程的方法，其中包括贝克(Baker)创造的著名的“有效方法”[1]．

在数学研究过程中，初等方法（不等于简单方法）常常是非常困难的．例如许多问题用较为深刻的方法解决了，人们便希望有一个初等的解决方法．众所周知的莫德尔(Mordell)的一个未解决问题便是如此：能否给出方程 $x^2-2y^4=-1$ 仅有两组正整数解 $(x,y)=(1,1),(239,13)$ 的一个初等证明？

佩尔(Pell)方程方法[2]便是解丢番图方程的一种有力的初等方法，许多著名的结果都可以由佩尔方程方法导出．现在，这种方法有了一些新的发展．本文的目的是简略介绍一下佩尔方程方法的发展和一些新的应用．

（二）

所谓佩尔方程是指如下的四个丢番图方程

$$x^2 - Dy^2 = \pm 1, x^2 - Dy^2 = \pm 4,$$

其中 $D > 0$ 且不是平方数．1895 年斯汰莫(Störmer) 证明了

定理 1　设 x, y 是正整数，满足方程 $x^2 - Dy^2 = 1$. 如果 $y \mid {}^* D$，则 $x + y\sqrt{D}$ 为佩尔方程 $u^2 - Dv^2 = 1$ 的基本解．这里 $y \mid {}^* D$ 表示 y 的每一个素因子整除 D.

1967 年魏尔克(Walker) 推广斯汰莫的结果，得到如下的

定理 2[3]　设 $k > 1, l > 1$ 是给定的正整数，$(k, l) = 1$，kl 不是平方数，且 x, y 是正整数，满足方程

$$kx^2 - ly^2 = 1, \tag{1}$$

则有如下的结论：

1) 当 $x \mid {}^* k$ 时，则有

$$x\sqrt{k} + y\sqrt{l} = x_1\sqrt{k} + y_1\sqrt{l}$$

或

$$x = 3^s \cdot x_1, 3 \nmid x_1, 且\frac{3^s + 3}{4k} = x_1^2,$$

这里 (x_1, y_1) 是(1) 的最小正整数解，s 是一个正整数；

2) 当 $y \mid {}^* l$ 时，则有

$$x\sqrt{k} + y\sqrt{l} = x_1\sqrt{k} + y_1\sqrt{l}$$

或

$$y = 3^{s_1} y_1, 3 \nmid y, 且\frac{3^{3x} - 3}{4l} = y_1^2,$$

这里 (x_1, y_1) 是(1) 的最小正整数解，s_1 是一个正整数．

1988 年本文作者与吴波[4] 统一了魏尔克定理的两种情形，一般地证明了

定理 3　设 $k > 1, l > 0$ 是给定的正整数，$(k, l) = 1$，kl 不是

平方数，且 x,y 是正整数，满足方程(1)，则在 $x|^*k$，或 $y|^*l$ 时有

$$kx^2+ly^2+2xy\sqrt{kl}=\varepsilon \text{ 或 } \varepsilon^3,$$

这里 ε 为佩尔方程 $u^2-klv^2=1$ 的基本解．

后来，本文作者[5]进一步推广魏尔克定理，得到如下的两个定理：

定理 4 设 $2\neq a>0,b>0,ab$ 不是平方数，且 x,y 是满足方程

$$ax^2-by^2=2 \tag{2}$$

的正整数，如果 $x|^*a$，或 $y|^*b$，则有

$$\frac{1}{2}(ax^2+by^2)+xy\sqrt{ab}=\varepsilon \text{ 或 } \varepsilon^3,$$

这里 ε 为佩尔方程 $u^2-abv^2=1$ 的基本解．

定理 5 设 $4\neq a>1,b>0,ab$ 不是平方数，且 x,y 是正整数，满足方程

$$ax^2-by^2=4. \tag{3}$$

如果 $x|^*a$，或 $y|^*b$，则除 $(a,b,x,y)=(5,1,5,11)$ 外有

$$\frac{1}{2}(ax^2+by^2)+xy\sqrt{ab}=\Omega \quad \text{或} \quad \frac{1}{4}\Omega^3,$$

这里 $\Omega=u_0+v_0\sqrt{ab}$ 是佩尔方程 $u^2-abv^2=4$ 的基本解．

定理 1 ～ 5 可以用来解一大批的丢番图方程．因此利用这些结果解丢番图方程是一种有力的初等工具．

(三)

先看一个具体的例子．

例 1 证明丢番图方程 $y^2=x^4-x^3+1$ 的全部整数解是 $(x,y)=(0,\pm 1),(1,\pm 1),(2,\pm 3)$ 和 $(-2,\pm 5)$．

证明 由方程 $y^2=x^4-x^3+1$ 整理得

$$y^2-x(x-1)\cdot x^2=1. \tag{4}$$

除 $x=0,1$ 外,对于任意整数 x 均有 $x(x-1)>0$. 现求佩尔方程 $u^2-x(x-1)v^2=1$ 的基本解 $u_0+v_0\sqrt{x(x-1)}$. 令 $v=1$,则 $4u^2=(2x-1)^2+3$,由此易知 $x=0,1$. 所以,除 $x=0,1$ 外,有 $v_0\neq 1$. 而令 $v=2$,从 $u^2-x(x-1)v^2=1$ 知 $u=|2x-1|$,故 $u_0=|2x-1|$,$v_0=2$. 由斯汰莫定理(见定理 1) 知 $|y|+|x|\sqrt{x(x-1)}=|2x-1|+2\sqrt{x(x-1)}$,即有

$$|y|=|2x-1|,|x|=2,$$

由此即得所证的结论.

求丢番图方程 $y^2=x^4-x^3+1$ 的全部整数解曾是较为困难的问题,而用本文的方法却是十分简单的. 概括本文的方法为:

1) 将欲求解的方程化成佩尔方程或推广的佩尔方程(1) ~ (3) 之一的形状;

2) 判断是否满足定理 1 ~ 5 的条件. 如不满足,设法化成满足定理的条件;

3) 利用佩尔方程的基本解,由定理的结论给出欲求方程的解.

注意,这个方法的第一步是将欲求解的方程化成某种"形状",即佩尔方程中的 D 可以含有欲求解的变元;同样,方程(1) ~ (3) 中的 k,l,a,b 也可以不是常数. 例如,例 1 中的方程化成佩尔方程的形状(4),其中 $D=x(x-1)$. 这样做所以是正确的,是因为(以例 1 为例) 在求解方程(4) 时,可以假定 x,y 是方程(4) 的任一组整数解,从而 D(或在(1) ~ (3) 中的 k,l,a,b) 是给定的.

例 2 1943 年永格伦(Ljunggren)[6] 证明的一个著名结果是:丢番图方程

$$\frac{x^n-1}{x-1}=y^2,n>3,|x|>1 \tag{5}$$

的全部整数解是 $n=4,x=7,y=\pm 20$ 和 $n=5,x=3,y=\pm 11$.

证明 在 $2|n$ 时方程(5) 极易求解[7],所以以下设 $2\nmid n$. 假设

x,y,n（其中当然满足 $|x|>1, 2\nmid n>3$）是方程(5)的一组整数解，则由方程(5)可整理得

$$x\left(x^{\frac{n-1}{2}}\right)^2-(x-1)y^2=1. \tag{6}$$

分 $x>1$ 和 $x<-1$ 来讨论（因为 $|x|>1$）. 在 $x>1$ 时，由定理 3 知，(6) 给出

$$x\left(x^{\frac{n-1}{2}}\right)^2+(x-1)y^2+2x^{\frac{n-1}{2}}|y|\sqrt{x(x-1)}=\varepsilon \text{ 或 } \varepsilon^3, \tag{7}$$

这里 ε 为佩尔方程 $u^2-x(x-1)v^2=1$ 的基本解. 由例 1 知该佩尔方程的基本解是 $\varepsilon=(2x-1)+2\sqrt{x(x-1)}$，故由(7)式易推出 $n=5, x=3, y=\pm 11$.

在 $x<-1$ 时，令 $x_1=-x>1$，(6) 式化为

$$(x_1+1)y^2-x_1(x_1^{\frac{n-1}{2}})^2=1,$$

此由定理 3 知

$$(x_1+1)y^2+x_1(x_1^{\frac{n-1}{2}})^2+2|y|x_1^{\frac{n-1}{2}}\sqrt{x_1(x_1+1)}=\varepsilon \text{ 或 } \varepsilon^3,$$

其中 $\varepsilon=(2x_1+1)+2\sqrt{x_1(x_1+1)}$ 为佩尔方程 $u^2-x_1(x_1+1)v^2=1$ 的基本解. 易知，此种情形无适合 $x_1>1, n>3$ 的解.

例 3 证明丢番图方程

$$5^x\cdot 7^y-3^z=2 \tag{8}$$

的全部非负整数解是 $(x,y,z)=(1,0,1),(1,2,5)$.

证明 显然(8)式有非负整数解时推出 $z>0, x>0$（如 $x=0$，模 3 知(8)不成立）. 现在，对(8)取模 5 知 $z=2z_1+1$，取模 3 知 $x=2x_1+1$，再模 4 得 $y=2y_1$，其中 $x_1\geqslant 0, y_1\geqslant 0, z_1\geqslant 0$. 于是可写(8)式为

$$5(5^{x_1}\cdot 7^{y_1})^2-3(3^{z_1})^2=2.$$

由定理 4 知，上式给出

$$\frac{1}{2}[5(5^{x_1}\cdot 7^{y_1})^2+3(3^{z_1})^2]+5^{x_1}\cdot 7^{y_1}\cdot 3^{z_1}\sqrt{15}=\varepsilon \text{ 或 } \varepsilon^3,$$

$$(9)$$

其中 ε 为佩尔方程 $u^2 - 15v^2 = 1$ 的基本解，易知

$$\varepsilon = 4 + \sqrt{15},$$

所以(9) 式给出

$$\frac{1}{2}(5^{2x_1+1} \cdot 7^{2y_1} + 3^{2z_1+1}) = 4, 5^{x_1} \cdot 7^{y_1} \cdot 3^{z_1} = 1, \quad (10)$$

或

$$\frac{1}{2}(5^{2x_1+1} \cdot 7^{2y_1} + 3^{2z_1+1}) = 4^3 + 3 \cdot 4(\sqrt{15})^2, 5^{x_1} \cdot 7^{y_1} \cdot 3^{z_1} = 3 \cdot 4^2 + (\sqrt{15})^2, \quad (11)$$

由(10) 知 $x_1 = y_1 = z_1 = 0$，即得到 $(x,y,z) = (1,0,1)$；由(11) 易知 $x_1 = 0, y_1 = 1, z_1 = 2$，故得 $(x,y,z) = (1,2,5)$. 这就证明了例 3 中的结论．

例 4　证明丢番图方程

$$5^x \cdot 13^y - 11^z = 4 \quad (12)$$

的全部非负整数解是 $(x,y,z) = (1,0,0),(3,0,2)$.

证明　对(12) 取模 4 得 $1 - 3^z \equiv 0 \pmod 4$，由此知 $2 \mid z$，再模 8 知 $5^{x+y} \equiv 5 \pmod 8$，即有 $x + y \equiv 1 \pmod 2$. 设 $2 \mid x, 2 \nmid y$，则对(12) 取模 11(假定 $z > 0$) 得

$$1 = \left(\frac{4}{11}\right) = \left(\frac{5^x \cdot 13y}{11}\right) = \left(\frac{13}{11}\right) = -1,$$

矛盾．所以此时推出 $z = 0$，从而 $x = 1, y = 0$，这不符合 $2 \mid x, 2 \nmid y$ 的条件．这样，我们就可以假设方程(12) 的非负整数解满足 $2 \nmid x$，$2 \mid y, 2 \mid z$. 令 $x = 2x_1 + 1, y = 2y_1, z = 2z_1$，这里 $x_1 \geqslant 0, y_1 \geqslant 0$，$z_1 \geqslant 0$，则方程(12) 变为

$$5(5^{x_1} \cdot 13^{y_1})^2 - (11^{z_1})^2 = 4. \quad (13)$$

如果 $z_1 = 0$，则显然有 $x_1 = y_1 = 0$，即有 $(x,y,z) = (1,0,0)$. 现设 $z_1 > 0$，改写(13) 式为

$$5(5^{x_1} \cdot 13^{y_1})^2 - 121 \cdot (11^{z_1-1})^2 = 4. \quad (14)$$

由于佩尔方程 $u^2 - 5\cdot 121v^2 = 4$ 的基本解 $\Omega = 123 + 5\sqrt{605}$,故由定理 5 知,(14) 给出

$$\frac{1}{2}[5(5^{x_1}\cdot 13^{y_1})^2 + 121(11^{z_1-1})^2] + 5^{x_1}\cdot 13^{y_1}\cdot 11^{z_1-1}\sqrt{605} = \Omega$$

或 $$\frac{1}{4}l^3,$$

由此容易计算出解 $(x_1,y_1,z_1) = (1,0,1)$,此即给出方程(12) 的解 $(x,y,z) = (3,0,2)$. 这就证明方程(12) 仅有非负整数解 $(x,y,z) = (1,0,0),(3,0,2)$.

在这个例子中,方程(13) 不满足定理 5 的条件,但经过讨论,将(13) 化成(14) 的形式,则符合定理 5 的条件了. 事实上,利用这种方法可以求解一般的指数丢番图方程

$$p_1^{x_1}\cdots p_s^{x_s} - q_1^{y_1}\cdots q_t^{y_t} = d \in \{1,2,4\}, \tag{15}$$

其中 $p_i(i = 1,\cdots,s)$ 和 $q_j(j = 1,\cdots,t)$ 均是不同的素数. 例如,根据定理 1 ~ 5,讨论 x_i 和 y_j 的奇偶性,可以在机器上给出解方程(15) 的一般算法和框图.

同样,这种方法正如例 2 中证明永格伦的一个著名结果一样,还可以用来求解某些形如

$$by^2 = f(x)$$

的丢番图方程,例如,[8] $f(x) = \dfrac{ax^n - 1}{abx - 1}$ 等等.

还有其他的一些应用,这里不再介绍了.

参考文献

[1] 曹珍富,《丢番图方程引论》,哈尔滨工业大学出版社,1989 年.

[2] 曹珍富,《丢番图方程引论》,哈尔滨工业大学出版社,1989 年.

[3] D. T. Walker, Amer. Math. Monthly, 74(1967), 504 — 513.

[4] 曹珍富,吴波,丢番图方程 $\frac{x^n - 1}{x - 1} = y^2$ 的一个初等解法与 Edgar 方程,《青年科技论文集》,黑龙江科技出版社,1990 年,3 — 7.

[5] 曹珍富,关于方程 $ax^m - by^n = 2$,《科学通报》,1990 年第 7 期,558-559.

[6] W. Ljunggren,Norsk Mat. Tidsskr, 25(1943),17--20. 或见作者的书《丢番图方程引论》,哈尔滨工业大学出版社,1989 年.
[7] 曹珍富,《丢番图方程引论》,哈尔滨工业大学出版社,1989 年.
[8] 曹珍富,《科学通报》,1990 年第 7 期,492 — 494.

选自《初等数学研究论文选》

Kaprekar 映射周期轨的衍生性

中国科学院武汉数理所　丁义明
中国人民保险公司绍兴分公司　裘伟平
宁波市水泥公司筹建处　连加志

任取一个各位数字不全相同的三位数 n，把它的各位数字按从大到小（从小到大）排列，所得数记为 $D(n)(D'(n))$. 令 $k(n)=D(n)-D'(n)$，对所得结果重复上述“重排求差”过程，最后都收敛到 495. 同样地，从一个各位数字不全相同的四位数开始，用上述映射作用，必收敛到 6174. 这种“重排求差”变换最早由 Kaprekar 作过系统的研究，因此，称上述数字映射为 Kaprekar 映射，简记为 k，用 k^n 表示 k 的 n 次复合($k^n(m)=k^{n-1}(k(m))(n>1)$).

各位数字不全相同的 m 位数全体所组成的集合，记为 N_m.

定义 1　$n\in N_m$，如果存在 $t\in N$，使 $k^t(n)=n, k^s(n)\neq n(1\leqslant s<n)$，称 n 为 k 的 $t-$ 周期点，$\{k(n)|n=0,1,\cdots,t-1\}$ 为 k 的 $t-$ 周期轨，当 $t=1$ 时，$k(n)=n$，n 为 k 的不动点.

设 $p(k)$ 为 k 的所有周期点的集合，$p(k_m)$ 表示 k 在 N_m 中周期轨的条数，$p_t(k_m)$ 表示 k 在 N_m 中 $t-$ 周期轨的条数. k 的周期轨曾作为“黑洞”而进行过广泛的研究，本文定义了插入运算“ * ”，讨论 k 在 N_m 中周期轨的衍生性，对 $p_t(k_m)$ 的下界进行了估计. 由此得出：m 充分大时，$p(k_m)\sim p_3(k_m)\sim m^5$ 等结果.

本文分四部分：（一）一些已有结果；（二）插入运算“ * ”；（三）衍生定理与 $p_t(k_m)$ 的估计；（四）讨论.

在文后的附录中，给出了 $m\leqslant 20$ 时 k 在 N_m 中的所有周期轨.

(一) 一些已有结果

设 $a_m a_{m-1} \cdots a_1 = D(n) - D'(n), n \in N_m, D(n) = d_m d_{m-1} \cdots d_1$，由文[2]知诸 a_i 满足下面的(Ⅰ)或(Ⅱ).

(Ⅰ) $a_1 + a_m = 9, a_2 = a_3 = \cdots = a_{m-1} = 9$;

(Ⅱ) $a_m + a_1 = 10, a_i + a_{m+1-i} = 9, i = 2, \cdots, k-1, k \leqslant [\frac{n}{2}]$,

$$a_k + a_{m+1-k} = 8, a_{k+1} = \cdots = a_{m-k} = 9,$$

且 $$a_j = d_j - d_{m+1-j}, j = m, \cdots, m-k+2,$$

$$a_{m+1-k} = d_{m+1-k} - d_k - 1,$$

由此可得

引理1 $a_m a_{m-1} \cdots a_1 \in k(N_m)$，则

1). $a_m a_{m-1} \cdots a_1$ 满足(Ⅰ)或(Ⅱ).

2). 存在 $l > 1$ 使 $a_m \geqslant \cdots \geqslant a_l, a_l < a_{l-1}, a_{l-1} \geqslant \cdots \geqslant a_2$.

引理[3]**(Laguerre)** 设 $a_1, a_2, \cdots, a_k$ 为 k 个互质的正整数，以 S_n 表方程 $a_1 x_1 + a_2 x_2 + \cdots + a_k x_k = n$ 的非负整数解组的个数，则

$$\lim_{n \to \infty} \frac{S_n}{n^{k-1}} = \frac{1}{(k-1)! a_1 a_2 \cdots a_k}.$$

下面给出 k 的一些特殊的周期轨(点)，它们在第(三)部分中将起决定性作用.

1. {495}、{6174}、{97508421}、{864197532} 为 k 的不动点.

2. {53955,59994}，{8733209876622,9665429654331}，{8764421997755322,8765431997654322} 为 k 的 2 — 周期轨.

3. {64308654,83208762,86526432} 为 k 的 3 — 周期轨.

4. A_{11} = {86420987532}，

A_{13} = {8654209875432,8764209875322}，

A_{15} = {876542098754322,885432098765412}，

$A_{17}=\{88754320987654212\}$,若$n\in A=A_{11}\cup A_{13}\cup A_{15}\cup A_{17}$,则$\{k^i(n)|i=0,1,2,3,4\}$为$k$的5－周期轨.

5. {420876,851742,750843,840852,860832,862632,642654}为k的7－周期轨.

(二) 插入运算"*"

众所周知,6174是k在N_4中的不动点,且631764为k在N_6中的不动点,63317664为k在N_8中的不动点……,这表明k在N_m中的某些周期轨可由k在$N_{m'}(m'<m)$的周期轨通过插入一些数而得到. 为了行文方便,引入插入运算"*"如下:

设$a_m a_{m-1}\cdots a_1\in N_m$, $a_m\geqslant\cdots\geqslant a_l, a_l<a_{l-1}, a_{l-1}\geqslant\cdots\geqslant a_2$,

$b_k b_{k-1}\cdots b_1\in N_k$, $b_k\geqslant\cdots\geqslant b_j, b_j<b_{j-1}, b_{j-1}\geqslant\cdots\geqslant b_1$.

令$d_{m+k-1}\cdots d_{l+j-2}=D(a_m\cdots a_l b_k\cdots b_j)$,

$d_{l+j-3}\cdots d_1=D(a_{l-1}\cdots a_2 b_{j-1}\cdots b_1)$.

定义 2

$$a_m a_{m-1}\cdots a_1 * b_k\cdots b_1=\begin{cases}D(a_m\cdots a_l b_2)D(a_{l-1}\cdots a_2 b_1)a_1 & k=2,\\ d_{m+k-1}d_{m+k-2}\cdots d_1 a_1 & k\geqslant 3.\end{cases}$$

记$m * n_0^n = m * \overbrace{n_0 * n_0 * \cdots * n_0}^{n次}$,

$$m*\begin{pmatrix}n_1\\n_2\\n_3\end{pmatrix}^n=\begin{pmatrix}m*n_1^n\\m*n_2^n\\m*n_3^n\end{pmatrix},\quad\begin{pmatrix}m_1\\m_2\\m_3\end{pmatrix}*n_0^n=\begin{pmatrix}m_1*n_0^n\\m_2*n_0^n\\m_3*n_0^n\end{pmatrix},$$

$$\begin{pmatrix}m_1\\m_2\\m_3\end{pmatrix}*\begin{pmatrix}n_1\\n_2\\n_3\end{pmatrix}^n=\begin{pmatrix}m_1*n_1^n\\m_2*n_2^n\\m_3*n_3^n\end{pmatrix}.$$

例 1 $6174*36=D(613)D(76)4=631764$,

$495*594=D(45)D(994)5=549945$,

$$\begin{pmatrix}64308654\\83208762\\86526432\end{pmatrix} * \begin{pmatrix}54\\18\\72\end{pmatrix}^2 = \begin{pmatrix}655430865444\\832110888762\\877652643222\end{pmatrix}.$$

$n \in N_m, k(n) = c_m \cdots c_1$，考察 $n * 36$，设 $D(n * 36) = d_m \cdots d_k 6 d_{k-1} \cdots d_{l+1} 3 d_l \cdots d_1$，如果 $m+1 = l+k$，且 $d_{k-1} > d_{l+1}$（即：在差式中，3 和 6，6 和 3 正好相对，并且 6 减 3 时 6 不被借位），则 $k(n * 36)$

$= D(n * 36) - D'(n * 36)$

$= d_m \cdots d_k 6 d_{k-1} \cdots d_{l+1} 3 d_l \cdots d_1 - d_1 \cdots d_l 3 d_{l+1} \cdots d_{k-1} 6 d_k \cdots d_m$

$= c_n \cdots c_k 3 c_{k-1} \cdots c_{l+1} 6 c_l \cdots c_1 = k(n) * 36.$

定义 3　$b \in N_m, D(b) = b_m \cdots b_1$，则 $E(b) = e_m \cdots e_1$，其中

$$e_i = \begin{cases} b_{m+1-i} - b_i, & \text{若 } b_{m+1-i} - b_i > 0, \\ 9 + b_{m+1-i} - b_i, & \text{若 } b_{m+1-i} - b_i \leqslant 0. \end{cases}$$

引理 2　1. $b \in \{36, 90, 594, 751842, 864297531\}$，则 $E(b) = b$.

2. $E(18) = 72, E(72) = 54, E(54) = 18.$

证明　直接根据定义验证即可． □

定义 4　b 对 n 是可插的，如果 $k(n * b) = k(n) * E(b)$.

例 2　由于 $k(6174 * 36) = 631764 = k(6174) * E(36)$，从而 36 对 6174 是可插的，可见不动点 6174 插入 36 后仍为不动点；又注意到 $k(97508421 * 72) = 9755084421 = k(97508421) * E(72)$ 知 72 对 97508421 是可插的，于是不动点 97508421 插入 72 后，变为 3－周期点，相应的周期轨为 $\{97508421 * 72, 97508421 * 54, 97508421 * 18\}$. 显然，把 72 换成 18、54 有同样结论.

定义 5　$n \in N_m, D(n) = d_m \cdots d_1$，$(d_{m+1-t}, d_t)$ 称为 n 的转折元，若 t 是使 $d_{m+1-i} - d_i > 0$ 成立的最大 i.

引理 3　在求差过程 $D(n) - D'(n)$ $(n \in N_m)$ 中，$i \leqslant t$ 时 $d_i - d_{m+1-i}$ 需借位，$i > t$ 时 $d_i - d_{m+1-i}$ 不需借位.

证明简单，略. □

引理 4 $D(b)=b_k\cdots b_1$，b 对 $n\in N_m$ 可插 $\Leftrightarrow$ 在插入后的差式 $D(n*b)-D'(n*b)$ 中，(b_{k+1-i},b_i) $(i=1,2,\cdots,k)$ 刚好相对且 $n*b$ 的转折元仍在 n 中.

证明 “$\Rightarrow$”显然成立.

“$\Leftarrow$” 令 $D(n)=d_m\cdots d_1$，$k(n)=c_m\cdots c_1$，$E(b)=e_k\cdots e_1$，(d_{m+1-t},d_t) 为转折元，应用引理 3 有

$$
\begin{array}{rl}
D(n*b) = & d_m\cdots b_k\cdots b_{k-1}\cdots d_t\quad\cdots\quad b_2\quad\cdots\quad b_1\cdots d_1\\
-\ D'(n*b) = & d_1\cdots b_1\cdots b_2\cdots\quad d_{m+1-t}\cdots b_{k-1}\cdots\quad b_k\cdots d_m\\
\hline
 & c_m\cdots e_k\cdots e_{k-1}\cdots c_t\quad\cdots\quad e_2\quad\cdots\quad e_1\cdots c_1
\end{array}
$$

由定义 2、引理 1 知 $k(n*b)=k(n)*E(b)$ 知 b 对 n 可插. □

引理 5 若 b_1,b_2 分别对 n 可插，则 b_2 对 $n*b_1$ 可插.

证明 由于 b_1,b_2 均对 n 可插，从而 $n*b_1*b_2$ 的转折元仍在 n 中，在差式 $D(n*b_1*b_2)-D'(n*b_1*b_2)$ 中，b_2 的元不和 n 的元对应，b_1 的元只和 b_1 的元对应，于是 b_2 的元也只和 b_2 的元对应，从引理 4 知 b_2 对 $n*b_1$ 是可插的. □

定理 1 1) $E(b)=e$，$k(n*b)=k(n)*e\Rightarrow k(n*b^r)$ $=k(n)*e^r$.

2) $E(b_i)=e_i$，b_i 对 n 可插，$i=1,2,\cdots,k$，则

$$k(n*b_1^{r_1}*b_2^{r_2}*\cdots*b_k^{r_k})=k(n)*e_1^{r_1}*e_2^{r_2}*\cdots*e_k^{r_k}.$$

证明 用数学归纳法. 1) 对 r 进行归纳，利用引理 5 立即可得. 2) 的证明只需应用 1) 的结论对 k 进行归纳即可. □

引理 6 $\{n_1,n_2,\cdots,n_t\}$ 为 k 的 $t-$ 周期轨，$\{n_1*90,n_2*90,\cdots,n_t*90\}$ 为 k 的 $t-$ 周期轨 $\Leftrightarrow$ 对 $j=1,2,\cdots,t$，n_j 中有 9、0.

证明 “$\Rightarrow$” 不妨设 $j=1$，$n_1=a_m\cdots a_1$，$n_2=a_m'\cdots a_1'$，$D(n_1)=d_m\cdots d_1$. $k(n_1*90)=9d_m\cdots d_10-d_1\cdots d_m9=n_2*90$ $=9a_m'\cdots a_2'0a_1'\Rightarrow a_1'=1\Rightarrow d_1=0$，$d_m=9$（因为 $k(n_1)=n_2$）.

"⇐"由引理 4 立即可得. □

(三) 衍生定理与 $p(k_m)$ 的估计

在前面一系列准备工作的基础上,可以给出本文最主要的结论:五个衍生定理.

衍生定理(Ⅰ)

1. $495 * 594^m$;
2. $6174 * 36^m$;
3. $864197532 * 36^m * 864297531^n$;
4. $97508421 * 36^m * 90^n * 751842^p * 864297531^q$

$(m、n、p、q \geqslant 0)$ 为 k 的不动点.

衍生定理(Ⅱ)

1. $\{8733209876622 * 36^m, 9665429654331 * 36^m\}$;
2. $\{8764421997755322 * 864297531^m,$
   $8765431997654322 * 864297531^m\}$

$(m \geqslant 0)$ 为 k 的 2 — 周期轨.

衍生定理(Ⅲ)

1. $\begin{pmatrix} 64308654 \\ 83208762 \\ 86526432 \end{pmatrix} * \begin{pmatrix} 18 \\ 72 \\ 54 \end{pmatrix}^m * \begin{pmatrix} 54 \\ 18 \\ 72 \end{pmatrix}^n * 36^p$;

2. $97508421 * \begin{pmatrix} 72 \\ 54 \\ 18 \end{pmatrix} * \begin{pmatrix} 18 \\ 72 \\ 54 \end{pmatrix}^m * \begin{pmatrix} 72 \\ 54 \\ 18 \end{pmatrix}^n * 36^p * 90^q$
   $* 751842^r * 864297531^s$

$(m、n、p、q、r、s \geqslant 0)$ 为 k 的 3 — 周期轨.

衍生定理(Ⅳ) 若 $n_0 \in A$,则

$\{k^i(n_0) * 36^m * 864297531^n \mid i = 0、1、2、3、4\}(m、n \geqslant 0)$

为 k 的 5 — 周期轨.

衍生定理(V) $\{420876 * 36^m, 851742 * 36^m, 750843 * 36^m, 840852 * 36^m, 860832 * 36^m, 862632 * 36^m, 642654 * 36^m\}(m \geqslant 0)$ 为 k 的 7 — 周期轨.

衍生定理的证明 由定理 1 知,只需验证后面被插的数确实对前面的数可插即可.限于篇幅,下面只简单验证(Ⅲ)2.

记 $n_1 = 97508421$,由例 2 知 $\begin{pmatrix}72\\54\\18\end{pmatrix}$ 对 n_1 是可插的.类似可知 $\begin{pmatrix}18\\72\\54\end{pmatrix}$ 对 $n_1 * \begin{pmatrix}72\\54\\18\end{pmatrix}$ 可插,从引理 6 知 90 对 n_1 可插,注意到

$k(n_1 * 36) = 9753086421 = k(n_1) * 36,$

$k(n_1 * 751842) = 97755108844221 = k(n_1) * 751842,$

$k(n_1 * 864297531) = 98765420987543211 = k(n_1) * 864297531,$

由引理 2、定义 4 知 36、751842,864297531 也对 n_1 可插,由定理 1 知它们对 $n_1 * \begin{pmatrix}72\\54\\18\end{pmatrix}$ 可插. □

根据上述 5 个衍生定理,对 $p_i(k_m)(i = 1,2,3,5,7)$ 有如下的估计:

定理 2 Ⅰ $p_1(k_m)$ 不小于以下四个不定方程非负整数解组个数之和:1. $m = 3 + 3x$, 2. $m = 4 + 2x$,

3. $m = 9 + 2x + 9y$, 4. $m = 8 + 2x + 2y + 6z + 9u$.

Ⅱ $B_1 = \{m \mid m = 13 + 2x, x = 0,1,\cdots\}$,

$B_2 = \{m \mid m = 16 + 9x, x = 0,1,\cdots\}$,有

$m \in B_1 \cap B_2 \Rightarrow P_2(k_m) \geqslant 2$,

$m \in (B_1 \cup B_2 \cup \{5\}) - (B_1 \cap B_2) \Rightarrow P_2(k_m) \geqslant 1$.

Ⅲ　$p_3(k_m)$ 不小于以下两个不定方程非负整数解组个数之和：　1. $m = 8 + 2x + 2y + 2z$，

2. $m = 10 + 2x + 2y + 2z + 2u + 6v + 9w$.

Ⅳ　$p_5(k_2) = 1, p_5(k_m) \geqslant a + 2b + 2c + d$，其中 a,b,c,d 分别为不定方程 1,2,3,4 的非负整数解组的个数.

1. $m = 11 + 2x + 9y$，　　2. $m = 13 + 2x + 9y$，

3. $m = 15 + 2x + 9y$，　　4. $m = 17 + 2x + 9y$.

Ⅴ　m 为不小于 6 的偶数，则 $p_7(k_m) \geqslant 1$.

证明　注意到五个衍生定理所给出的周期轨互不相同，于是Ⅰ、Ⅲ、Ⅳ、Ⅴ成立，又由于 k 在 N_5 中有一条 2－周期轨，从而Ⅱ亦成立. □

定理 3　$p_3(k_m) \sim p(k_m) \sim m^5 \quad (m \to +\infty)$.

证明　根据 Laguerre 引理知 $m = 10 + 2x + 2y + 2z + 2u + 6v + 9w$ 的非负整数解组的个数为 $O(m^5)$，于是 $p_3(k_m)$ 的阶 $\geqslant 5$，令 $D(N_m) = \{D(n) \mid n \in N_m\}$，显然 $p_3(k_m) < p(k_m) < |D(N_m)|$，而 $|D(N_m)|$ 的阶为 5[2]，从而 $p_3(k_m) \sim p(k_m) \sim m^5$. □

定理 4　1. $n \in p(k)$，b 对 n 可插 $\Rightarrow n * b \in p(k)$.

2. $p(k_m) = 1 \Leftrightarrow m = 2,3,4,7$.

3. $p_1(k_m) = 0 \Leftrightarrow m = 1,2,5,7$.

证明　1. 由衍生定理立即可得.

2. m 为不小于 6 的偶数时，$m = 4 + 2x$，$m = 6 + 2x$ 都有非负整数解. m 为不小于 13 的奇数时，$m = 9 + 9x + 2y$，$m = 13 + 2x$ 都有非负整数解. 由衍生定理及定理 2 知，在上述情况下 $p(k_m) \geqslant 2$. 其余情形的验证是平凡的.（参考附录或用特征数法[4] 枚举均可）

3. 类似 2 可证.

（四）讨　　论

本文通过引入插入运算“ * ”来研究 k 在 N_m 中周期轨的衍生性，对 k 的全局结构作了较细致的刻划，得到了周期为 1，2，3，5，7 的周期轨的衍生定理. 和附录的对照表明：定理 2 给出的关于 $p_i(k_m)(i=1,2,3,5,7)$ 在 $m\leqslant 20$ 的情况下与实际情况完全一致.（即：定理 2 中的“不小于”均可换成“等于”，“$\geqslant$”均可换成“$=$”）目前离刻划数字映射 k 的全局结构还有一定距离，相信本文所采用的方法是到达最终目标的有效工具之一. 定理 3 表明 $D(N_m)$ 中有许多点为 Kaprekar 映射的周期点，而映射 k 的周期轨中绝大部分为 3 － 周期轨，下面的猜想很具挑战性：

猜想　$m\geqslant 12$ 时，k 在 N_m 中只有 1，2，3，5，7 － 周期轨. 衍生定理给出 k 在 N_m 中的所有周期轨.

附录　k 在 $N_m(m\leqslant 20)$ 中的所有周期轨

Length：2

5：　09　81　63　27　45

Length：3

1：　495

Length：4

1：　6174

Length：5

4：　75933　63954　61974　82962

4：　74943　62964　71973　83952

2：　59994　53955

Length：6

7：　851742　750843　840852　860832　862632　642654　420876

1：　631764

1：　549945

Length：7

8: 8429652 7619733 8439552 7509843 9529641 8719722
8649432 7519743

Length: 8

3: 86526432 64308654 83208762
7: 86326632 64326654 43208766 85317642 75308643
84308652 86308632
1: 63317664
1: 97508421

Length: 9

14: 763197633 844296552 762098733 964395531 863098632
965296431 873197622 865395432 753098643 954197541
883098612 976494321 874197522 865296432
1: 864197532
1: 554999445

Length: 10

3: 8655264432 6431088654 8732087622
3: 8653266432 6433086654 8332087662
3: 6543086544 8321088762 8765264322
7: 8633086632 8633266632 6433266654 4332087666
8533176642 7533086643 8433086652
1: 9753086421
3: 9775084221 9755084421 9751088421
1: 6333176664
1: 9975084201

Length: 11

8: 87331976622 86542965432 76320987633 96442965531
87320987622 96653954331 86330986632 96532966431
5: 86420987532 96641975331 88431976512 87641975322
86541975432
1: 86431976532

Length: 12

3: 865552644432 643110888654 877320876222
7: 863330866632 863332666632 643332666654 433320876666
853331766642 753330866643 843330866652
3: 655430865444 832110888762 877652643222
3: 654330866544 833210887662 876532664322
3: 865532664432 643310886654 873320876622

1: 975330866421
3: 865332666432 643330866654 833320876662
3: 654310886544 873210887622 876552644322
3: 977510884221 977550844221 975510884421
3: 977750842221 975550844421 975110888421
3: 977530864221 975530864421 975310886421
3: 997750842201 997550844201 997510884201
1: 997530864201
1: 633331766664
1: 999750842001
1: 555499994445

Longth:13

5: 8874319765212 8765419754322 8654209875432 9664209875331
9864319765311
5: 8643209876532 9664319765331 8843319766512 8764319765322
8654319765432
5: 8854319765412 8764209875322 9665419754331 8843209876512
9766419753321
2: 8733209876622 9665429654331
1: 8643319766532

Longth:14

3: 86555526444432 64311108888654 87773208762222
3: 86533326666432 64333308666654 83333208766662
3: 65554308654444 83211108888762 87776526432222
3: 65543308665444 83321108887662 87765326643222
3: 65433308666544 83332108876662 87653326664322
3: 87655326644322 65433108866544 87332108876622
3: 86553326664432 64333108866654 87333208766622
3: 97533108866421 97753308664221 97553308664421
7: 86333308666632 86333326666632 64333326666654
43333208766666 85333317666642 75333308666643
84333308666652
3: 86555326644432 64331108886654 87733208766222
3: 65543108865444 87321108887622 87765526443222
3: 65431108886544 87732108876222 87655526444322
1: 97755108844221
3: 97777508422221 97555508444421 97511108888421

3:　97775308642221　97555308644421　97531108886421
3:　97775108842221　97755508444221　97551108884421
3:　97753108864221　97755308644221　97553108864421
3:　97751108884221　97775508442221　97555108844421
3:　99777508422201　99755508444201　99751108884201
3:　99775308642201　99755308644201　99753108864201
3:　99775108842201　99775508442201　99755108844201
3:　99977508422001　99975508442001　99975108842001
1:　97533308666421
1:　99753308664201
1:　99975308642001
1:　63333317666664
1:　99997508420001

Length:15

5:　887543197654212　876542098754322　966542098754331
　　986432098765311　987643197653211
5:　876433197665322　865433197665432　864332098766532
　　966433197665331　884333197666512
5:　865432098765432　966432098765331　986433197665311
　　887433197665212　876543197654322
5:　976654197543321　885432098765412　976642098753321
　　986543197654311　887432098765212
5:　885433197665412　876432098765322　966543197654331
　　884332098766512　976643197653321
2:　873332098766622　966543296654331
1:　864333197666532
1:　555549999944445

Length:16

3:　8655555264444432　6431111088888654　8777732087622222
7:　8633333086666632　8633333266666632　6433333266666654
　　4333332087666666　8533333176666642　7533333086666643
　　8433333086666652
3:　6555543086544444　8321111088888762　8777765264322222
3:　6555433086654444　8332111088887662　8777653266432222
3:　6554333086665444　8333211088876662　8776533266643222
3:　6543333086666544　8333321088766662　8765333266664322
3:　8765553266444322　6543311088866544　8773321088766222

3: 8655333266664432 6433331088666654 8733332087666622
3: 9755331088664421 9775331088664221 9775533086644221
3: 9753311088866421 9777533086642221 9755533086644421
3: 8653333266666432 6433333086666654 8333332087666662
3: 9775333086664221 9755333086664421 9753331088666421
3: 8776553266443222 6554331088665444 8733211088876622
3: 8655553266444432 6433111088886654 8777332087662222
3: 8655533266644432 6433311088866654 8773332087666222
3: 8765533266644322 6543331088666544 8733321088766622
3: 6555431088654444 8732111088887622 8777655264432222
3: 6554311088865444 8773211088876222 8776555264443222
3: 6543111088886544 8777321088762222 8765555264444322
3: 9775551088444221 9775511088844221 9777551088442221
3: 9777775084222221 9755555084444421 9751111088888421
3: 9777753086422221 9755553086444421 9753111088886421
3: 9777751088422221 9775555084444221 9755111088884421
3: 9777531088642221 9775553086444221 9755311088864421
3: 9777511088842221 9777555084442221 9755511088844421
3: 9775311088864221 9777553086442221 9755531088644421
3: 9775111088884221 9777755084422221 9755551088444421
1: 9775531088644221
3: 9977775084222201 9975555084444201 9975111088884201
3: 9977753086422201 9975553086444201 9975311088864201
3: 9977533086642201 9975533086644201 9975331088664201
3: 9977751088422201 9977555084442201 9975511088844201
3: 9977531088642201 9977553086442201 9975531088644201
3: 9977511088842201 9977755084422201 9975551088444201
1: 9977551088442201
3: 9997775084222001 9997555084442001 9997511088842001
3: 9997753086422001 9997553086442001 9997531088642001
3: 9997751088422001 9997755084422001 9997551088442001
3: 9999775084220001 9999755084420001 9999751088420001
2: 8764421997755322 8765431997654322
1: 9753333086666421
1: 9975333086664201
1: 9997533086642001
1: 9999753086420001

1: 6333333176666664

1: 9999975084200001

Length: 17

5: 97665420987543321 98654320987654311 98764320987653211
98765431976543211 88754320987654212

5: 87643320987665322 96654331976654331 88433320987666512
97664331976653321 88543331976665412

5: 97664320987653321 98654331976654311 88743320987665212
97665431976543321 88543320987665412

5: 88433331976666512 87643331976665322 86543331976665432
86433320987666532 96643331976665331

5: 98764331976653211 88754331976654212 87654320987654322
96654320987654331 98643320987665311

1: 98765420987543211

5: 96643320987665331 98643331976665311 88743331976665212
87654331976654322 86543320987665432

2: 87333320987666622 96654332966654331

1: 86433331976666532

Length: 18

3: 865555552644444432 643111110888888654 877777320876222222

3: 865333332666666432 643333330866666654 833333320876666662

3: 655555430865444444 832111110888888762 877777652643222222

3: 655554330866544444 833211110888887662 877776532664322222

3: 655543330866654444 833321110888876662 877765332666432222

3: 655433330866665444 833332110888766662 877653332666643222

3: 654333330866666544 833333210887666662 876533332666664322

3: 876555532664444322 654331110888866544 877733210887662222

7: 863333330866666632 863333332666666632 643333332666666654
433333320876666666 853333331766666642 753333330866666643
843333330866666652

3: 977533310886664221 977553330866644221 975533310886664421

3: 876553332666644322 654333310886666544 873333210887666622

3: 975331110888866421 977775330866422221 975555330866444421

3: 975333110888666421 977753330866642221 975553330866644421

3: 876555332666444322 654333110888666544 877333210887666222

1: 886644219977553312

3: 977555330866444221 975533110888664421 977753310886642221

3： 877655532664443222 655433110888665444 877332110888766222
3： 865555532664444432 643311110888886654 877773320876622222
3： 865555332666444432 643331110888866654 877733320876662222
3： 865553332666644432 643333110888666654 877333320876666222
3： 865533332666664432 643333310886666654 873333320876666622
3： 877655332666443222 655433310886665444 873332110888766622
3： 655554310886544444 873211110888887622 877776552644322222
3： 655543310886654444 873321110888876622 877765532664432222
3： 655543110888654444 877321110888876222 877765552644432222
3： 655431110888865444 877732110888762222 877655552644443222
3： 654311110888886544 877773210887622222 876555552644444322
3： 977555510884444221 977551110888844221 977775510884422221
3： 977777750842222221 975555550844444421 975111110888888421
3： 977777530864222221 975555530864444421 975311110888886421
3： 977533330866664221 975533330866664421 975333310886666421
3： 977777510884222221 977555550844444221 975511110888884421
3： 977775310886422221 977555530864444221 975531110888864421
3： 977775110888422221 977755550844442221 975551110888844421
3： 977753110888642221 977755530864442221 975553110888644421
3： 977533110888664221 977755330866442221 975553310886644421
3： 977751110888842221 977775550844422221 975555110888444421
3： 977531110888864221 977775530864422221 975555310886444421
3： 977511110888884221 977777550844222221 975555510884444421
3： 977755310886442221 977555310886444221 977553110888644221
1： 977553310886644221
3： 977755110888442221 977755510884442221 977555110888444221
3： 997777750842222201 997555550844444201 997511110888884201
3： 997777530864222201 997555530864444201 997531110888864201
3： 997775330866422201 997555330866444201 997533110888664201
3： 997753330866642201 997553330866644201 997533310886664201
3： 997777510884222201 997755550844442201 997551110888844201
3： 997775310886422201 997755530864442201 997553110888644201
3： 997753310886642201 997755330866442201 997553310886644201
3： 997775110888422201 997775550844422201 997555110888444201
3： 997753110888642201 997775530864422201 997555310886444201
3： 997751110888842201 997777550844222201 997555510884444201
3： 997775510884422201 997755510884442201 997755110888442201

1: 9977553108864422 01

3: 999777750842222001 999755550844442001 999751110888842001

3: 999777530864222001 999755530864442001 999753110888642001

3: 999775330866422001 999755330866442001 999753310886642001

3: 999777510884222001 999775550844422001 999755110888442001

3: 999775310886422001 999775530864422001 999755310886442001

3: 999775110888422001 999777550844222001 999755510884442001

1: 999775510884422001

3: 999977750842220001 999975550844420001 999975110888420001

3: 999977530864220001 999975530864420001 999975310886420001

3: 999977510884220001 999977550844220001 999975510884420001

3: 999997750842200001 999997550844200001 999997510884200001

1: 975333330866666421

1: 997533330866664201

1: 999753330866642001

1: 999975330866420001

1: 999997530864200001

1: 633333331766666664

1: 999999750842000001

1: 555554999999444445

Longth: 19

1: 9876543209876543211

5: 9766543319766543321 8854333209876665412
9766433209876653321 9865433319766654311
8874333209876665212

5: 9876543319766543211 8875433209876654212
9766543209876543321 9865433209876654311
9876433209876653211

5: 8854333319766665412 8764333209876665322
9665433319766654331 8843333209876666512
9766433319766653321

5: 8843333319766666512 8764333319766665322
8654333319766665432 8643333209876666532
9664333319766665331

5: 9864333209876665311 9876433319766653211
8875433319766654212 8765433209876654322
9665433209876654331

3: 9876554209875443211 9876542109887543211
9877654209875432211
5: 9664333209876665331 9864333319766665311
8874333319766665212 8765433319766654322
8654333209876665432
1: 9987654209875432101
2: 8733333209876666622 9665433329666654331
1: 8643333319766666532

Length:20

3: 86555555526444444432 64311111108888888654
87777773208762222222
3: 86553333326666664432 64333333108866666654
87333333208766666622
3: 65555554308654444444 83211111108888888762
87777776526432222222
3: 65555543308665444444 83321111108888887662
87777765326643222222
3: 65555433308666544444 83332111108888876662
87777653326664322222
3: 65554333308666654444 83333211108888766662
87776533326666432222
3: 65543333308666665444 83333321108887666662
87765333326666643222
3: 65433333308666666544 83333332108876666662
87653333326666664322
3: 87655555326644444322 65433111108888866544
87777332108876622222
3: 97753333108866664221 97755333308666644221
97553333108866664421
3: 86533333326666666432 64333333308666666654
83333333208766666662
5: 98666442199775533311 88864432199776553112
88766442199775533212 88665442199775543312
88664422099877553312
3: 87765533326666443222 65543333108866665444
87333321108887666622
3: 97533111108888866421 97777753308664222221

9755555330866444421

1: 9775533310886664422 1

3: 9755331110888866442 1 9777753310886642222 1

9775555330866444422 1

3: 8765553332666644432 2 6543333110888666654 4

8773333210887666622 2

3: 9775333110888666422 1 9777553330866644222 1

9755533310886664442 1

1: 8866443219977655331 2

7: 8633333330866666663 2 8633333332666666663 2

6433333332666666665 4 4333333320876666666 6

8533333331766666664 2 7533333330866666664 3

8433333330866666665 2

3: 9775553330866644422 1 9755333110888666442 1

9777533310886664222 1

3: 8776555532664444322 2 6554331110888866544 4

8777332110888766222 2

3: 8655555532664444443 2 6433111110888888665 4

8777773320876622222 2

3: 8655555332666444443 2 6433311110888886665 4

8777733320876662222 2

3: 8655553332666644443 2 6433331110888866665 4

8777333320876666222 2

3: 8655533332666666444 32 6433333110888666665 4

8773333320876666622 2

3: 8765555332666444432 2 6543331110888866654 4

8777333210887666222 2

3: 8765533332666664432 2 6543333310886666654 4

8733333210887666662 2

3: 8776555332666444322 2 6554333110888666544 4

8773332110888766622 2

3: 8777655332666443222 2 6555433310886665444 4

8733321110888876662 2

3: 6555555431088654444 44 8732111110888888762 2

8777776552644322222 2

3: 6555543310886654444 4 8733211110888887662 2

8777765532664432222 2

3: 6555543110888654444 8773211110888876222
8777765552644432222

3: 6555433110888654444 8773321110888766222
8777655532664443222

3: 6555431110888865444 8777321110888762222
8777655552644443222

3: 6554311110888886544 8777732110888762222
8776555552644444322

3: 6543111110888888654 8777773210887622222
8765555552644444432

3: 9775555510884444221 9775511110888884422
9777775510884222221

3: 9777777750842222221 9755555550844444421
9751111110888888421

3: 9777777530864222221 9755555530864444421
9753111110888886421

3: 9777753330866642221 9755553330866644421
9753331110888866642

3: 9777533330866664222 9755533330866664442
9753333110888666642

3: 9775333330866666422 9755333330866666442
9753333310886666642

3: 9777777510884222222 9775555550844444422
9755111110888888442

3: 9777775310886422222 9775555530864444422
9755311110888886442

3: 9777775110888422222 9777555550844444222
9755511110888884442

3: 9777753110888642222 9777555530864444222
9755531110888864442

3: 9777533110888664222 9777555330866444222
9755533110888664442

3: 9777751110888842222 9777755550844442222
9755551110888844442

3: 9777531110888864222 9777755530864442222
9755553110888644442

3: 9775331110888866422 9777755330866442222

9755553310886644442l

3: 97775111108888842221 97777755508444222221

97555551108884444421

3: 97753111108888864221 97777755308644222221

97555553108864444421

3: 97751111108888884221 97777775508442222221

97555555108844444421

3: 97777553108864422221 97755553108864444221

97755311108888644221

3: 97775533108866442221 97755533108866444221

97755331108886644221

3: 97777551108884422221 97775555108844442221

97755511108888444221

3: 97775531108886442221 97775553108864442221

97755531108886444221

3: 97775511108888442221 97777555108844422221

97755551108884444221

1: 97775551108884442221

3: 99777777508422222201 99755555508444444201

99751111108888884201

3: 99777775308642222201 99755555308644444201

99753111108888864201

3: 99777753308664222201 99755553308664444201

99753311108888664201

3: 99777533308666422201 99755533308666444201

99753331108886664201

3: 99775333308666642201 99755333308666644201

99753333108866664201

3: 99777775108842222201 99775555508444442201

99755111108888844201

3: 99777753108864222201 99775555308644442201

99755311108888644201

3: 99777533108866422201 99775553308664442201

99755331108886644201

3: 99775333108866642201 99775533308666442201

99755333108866644201

3: 99777751108884222201 99777555508444422201

9975551110888844420l

3： 99777531108886422201 99777555308644422201
99755531108886444201

3： 99775331108886642201 99777553308664422201
99755533108866444201

3： 99777511108888422201 99777755508444222201
99755551108884444201

3： 99775311108888642201 99777755308644222201
99755553108864444201

3： 99775111108888842201 99777775508442222201
99755555108844444201

3： 99777755108844222201 99775555108844442201
99775511108888442201

3： 99777553108864422201 99775553108864442201
99775531108886442201

1： 99775533108866442201

3： 99777551108884422201 99777555108844422201
99775551108884442201

3： 99977777508422222001 99975555508444442001
99975111108888842001

3： 99977775308642222001 99975555308644442001
99975311108888642001

3： 99977753308664222001 99975553308664442001
99975331108886642001

3： 99977533308666422001 99975533308666442001
99975333108866642001

3： 99977775108842222001 99977555508444422001
99975511108888442001

3： 99977753108864222001 99977555308644422001
99975531108886442001

3： 99977533108866422001 99977553308664422001
99975533108866442001

3： 99977751108884222001 99977755508444222001
99975551108884442001

3： 99977531108886422001 99977755308644222001
99975553108864442001

3： 99977511108888422001 99977775508442222001

9997555510884444200l

3: 99977755108844222001 99977555108844422001

99977551108884422001

1: 99977553108864422001

3: 99997777508422220001 99997555508444420001

99997511108888420001

3: 99997775308642220001 99997555308644420001

99997531108886420001

3: 99997753308664220001 99997553308664420001

99997533108866420001

3: 99997775108842220001 99997755508444220001

99997551108884420001

3: 99997753108864220001 99997755308644220001

99997553108864420001

3: 99997751108884220001 99997775508442220001

99997555108844420001

1: 99997755108844220001

3: 99999777508422200001 99999755508444200001

99999751108884200001

3: 99999775308642200001 99999755308644200001

99999753108864200001

3: 99999775108842200001 99999775508442200001

99999755108844200001

3: 99999977508422000001 99999975508442000001

99999975108842000001

1: 97533333308666666421

1: 99753333308666664201

1: 99975333308666642001

1: 99997533308666420001

1: 99999753308664200001

1: 99999975308642000001

1: 63333333317666666664

1: 99999997508420000001

count:333

$k(N_m)(m \leqslant 20)$ 的周期轨条数

m \ t ($p_t(k_m)$)	1	2	3	4	5	7	8	14	$p(k_m)$
2					1				1
3	1								1
4	1								1
5		1		2					3
6	2					1			3
7							1		1
8	2		1			1			4
9	2							1	3
10	3		4			1			8
11	1				1		1		3
12	5		10			1			16
13	1	1			3				5
14	6		20			1			27
15	2	1			5				8
16	8	1	36			1			46
17	2	1			6				9
18	12		60			1			73
19	3	1	1		6				11
20	14		94		1	1			110

参 考 文 献

[1] R. M. Krause, N. Miller, C. W. Trigg, Problem E2222, Amer. Math. Monthly, 77(1970), 307 and 78(1971), 197 − 198.

[2] 王江,关于 m 位黑洞数的探求,《中国初等数学研究文集》,河南教育出版社,1992 年,115 − 117.

[3] 徐利治,王兴华,《数学分析的方法及例题选讲》(修订版),高等教育出版社,1983 年.

[4] 李抗强,研究黑洞数问题的一个简捷方法 —— 特征数法,《湖南数学通讯》,1990 年第 6 期,26 − 28.

一类条件恒等式的存在性

浙江舟山市普陀中学　徐和郁

1957年上海市数学竞赛高二第二试第3题是[1]:设$\alpha+\beta+\gamma=0$,求证:

$$\frac{\alpha^2+\beta^2+\gamma^2}{2}\cdot\frac{\alpha^5+\beta^5+\gamma^5}{5}=\frac{\alpha^7+\beta^7+\gamma^7}{7}. \qquad (1)$$

这道试题的精彩之处在于给出了一个洋溢着数学美感的条件恒等式(1). 现在要问,在条件$\alpha+\beta+\gamma=0$下,除了(1)这个形式优美的条件恒等式外,还有别的类似的恒等式吗?即是否存在别的自然数组(m,n),使下式在条件$\alpha+\beta+\gamma=0$下恒等:

$$\frac{\alpha^m+\beta^m+\gamma^m}{m}\cdot\frac{\alpha^n+\beta^n+\gamma^n}{n}=\frac{\alpha^{m+n}+\beta^{m+n}+\gamma^{m+n}}{m+n}. \qquad (2)$$

本文试图对此问题作番讨论.

因为$\alpha+\beta+\gamma=0$,所以(2)等价于

$$\frac{\alpha^m+\beta^m+(-\alpha-\beta)^m}{m}\cdot\frac{\alpha^n+\beta^n+(-\alpha-\beta)^n}{n}=\frac{\alpha^{m+n}+\beta^{m+n}+(-\alpha-\beta)^{m+n}}{m+n}. \qquad (3)$$

若(3)关于α、β恒成立,则令$\alpha=x,\beta=1$即知

$$\frac{x^m+1+(-x-1)^m}{m}\cdot\frac{x^n+1+(-x-1)^n}{n}=\frac{x^{m+n}+1+(-x-1)^{m+n}}{m+n} \qquad (4)$$

关于x恒成立. 反之,若(4)关于x恒成立,则(3)关于α、β也恒成立. 这是因为,当α、β都为零时,(3)显然成立,而当α、β不都为零

时，不妨设 $\beta \neq 0$，则在(4)中，令 $x = \frac{\alpha}{\beta}$，就可推出(3)成立. 因此，上述问题就可化归为寻求使(4)成为恒等式的自然数组 (m,n) 问题.

在(4)中，令 $x = 0$，得

$$\frac{1+(-1)^m}{m} \cdot \frac{1+(-1)^n}{n} = \frac{1+(-1)^{m+n}}{m+n},$$

这是(4)为恒等式的必要条件. 由此可见，m、n 只能同偶或一偶一奇.

若 m、n 同偶，则有 $2m+2n = mn$，满足此式的偶数解只有 $(4,4)$. 但容易验证，当 $m = n = 4$ 时，(4)不恒等，例当 $x = 1$ 代入时就不成立. 于是，m、n 只能一偶一奇，不妨设 m 偶 n 奇. 显然，$n \neq 1$. 这样，通过比较(4)两边关于 x 的最高次项系数，可得 $m = 2$. 从而，可将(4)化为

$$(x^2+x+1)\sum_{i=1}^{n-1} \frac{C_n^i}{n} x^{n-i} = \sum_{i=1}^{n+1} \frac{C_{n+2}^i}{n+2} x^{n+2-i}. \tag{5}$$

若 $n = 3$，不难检验，(5)恒等，所以 $(2,3)$ 是使(4)恒等的一组解.

若 $n \geqslant 5$，这时比较(5)两边的 x^{n-1} 项系数得

$$\frac{C_n^3}{n} + \frac{C_n^2}{n} + \frac{C_n^1}{n} = \frac{C_{n+2}^3}{n+2},$$

解得 $n = 5$. 而当 $n = 5$ 时，也不难检验，(5)恒等，因此，$(2,5)$ 是使(4)恒等的另一组解.

综上所述，我们有 1982 年第 11 届美国数学奥林匹克第 2 题[2]：

定理 1 设 $\alpha+\beta+\gamma = 0$，则使(2)恒成立的自然数组 $(m,n)(m \leqslant n)$ 只有 $(2,3)$、$(2,5)$ 两组.

至此，前面提出的问题已得到了完满的回答. 现在，我们再将前述问题作些发散. 发散Ⅰ：当条件式 $\alpha+\beta+\gamma = 0$ 中的变量多于 3 个时，是否还有类似于(1)这样的恒等式?发散Ⅱ：当结论式

(1) 的左边的因式多于 2 个时，是否也有类似的恒等式？

为使下面的讨论在书写上能得到简化，我们引入符号：

$$F_t(m)=\frac{\alpha_1^m+\alpha_2^m+\cdots+\alpha_t^m}{m}\quad(t,m\in N).$$

对于发散 I，我们有

定理 2　设 $\alpha_1+\alpha_2+\alpha_3+\alpha_4=0$，则使

$$F_4(m)F_4(n)=F_4(m+n)\tag{6}$$

恒成立的自然数组 $(m,n)(m\leqslant n)$ 只有唯一的一组 $(2,3)$.

证明　易知，在条件 $\alpha_1+\alpha_2+\alpha_3+\alpha_4=0$ 下，使(6) 恒成立的自然数组 (m,n) 也使(2) 在条件 $\alpha+\beta+\gamma=0(\alpha=\alpha_1、\beta=\alpha_2、\gamma=\alpha_3)$ 下恒成立. 因此，由定理 1 可知，(m,n) 最多只有 $(2,3)$、$(2,5)$ 两组.

容易检验，当 $m=2$、$n=5$ 时，(6) 不恒成立，例当 $\alpha_1=\alpha_2=\alpha_3=1$，$\alpha_4=-3$ 代入时就不成立.

而当 $m=2$、$n=3$ 时，(6) 恒成立，我们可这样来证：

当 α_i 中有一个为零时，由定理 1 可知，(6) 恒成立，所以，以下假设 α_i 都非零. 设

$$p=\sum_{i<j}\alpha_i\alpha_j,\qquad q=-\sum_{i<j<r}\alpha_i\alpha_j\alpha_r,$$

$$s=\alpha_1\alpha_2\alpha_3\alpha_4,\qquad a_k=\sum_i\alpha_i^{\,k}\quad(k\in Z).$$

则 $\alpha_i(i=1、2、3、4)$ 是方程 $x^4+px^2+qx+s=0$ 的四个非零实根. 所以

$$\alpha_i^{\,4}+p\alpha_i^{\,2}+q\alpha_i+s=0,$$

从而，

$$\alpha_i^{\,k+4}+p\alpha_i^{\,k+2}+q\alpha_i^{\,k+1}+s\alpha_i^{\,k}=0\quad(k\in Z).$$

将 $i=1、2、3、4$ 时对应的 4 式相加，可得

$$a_{k+4}+pa_{k+2}+qa_{k+1}+sa_k=0.\tag{7}$$

因为 $a_{-1}=-\dfrac{q}{s}$，$a_0=4$，$a_1=0$，$a_2=-2p$，故由(7) 可推得

$$a_3 = -pa_1 - qa_0 - sa_{-1} = -3q,$$

$$a_5 = -pa_3 - qa_2 - sa_1 = 5pq,$$

$$\therefore \quad \frac{a_2}{2} \cdot \frac{a_3}{3} = \frac{a_5}{5}.$$

即 $$F_4(2) \cdot F_4(3) = F_4(5).$$ □

定理 3 设 $\alpha_1 + \alpha_2 + \cdots + \alpha_t = 0 (t \geqslant 5)$，则不存在自然数组 (m,n) 使下式恒成立：

$$F_t(m)F_t(n) = F_t(m+n). \tag{8}$$

证明 易知，在条件 $\alpha_1 + \alpha_2 + \cdots + \alpha_t = 0$ 下，使(8)恒成立的自然数组 (m,n)，也使(6)在条件 $\alpha_1 + \alpha_2 + \alpha_3 + \alpha_4 = 0$ 下恒成立，因此，由定理 2 可知，(m,n) 只可能是(2,3)．但容易验证，当 $m = 2$、$n = 3$ 时，(8)不恒成立，例当 $\alpha_1 = \alpha_2 = \alpha_3 = \alpha_4 = 1$，$\alpha_5 = -4$，其余变量均取 0 代入时，就不成立． □

至此，发散Ⅰ也就得到了完满的回答．

对于发散Ⅱ，有

定理 4 设 $\alpha_1 + \alpha_2 + \alpha_3 = 0$，则使

$$F_3(l)F_3(m)F_3(n) = F_3(l+m+n)$$

恒成立的自然数组 $(l,m,n)(l \leqslant m \leqslant n)$ 只有唯一的一组(2,2,3)．

证明 由定理 1 可知，在条件 $\alpha_1 + \alpha_2 + \alpha_3 = 0$ 下，有

$$F_3(2)F_3(3) = F_3(5),$$

$$F_3(2)F_3(5) = F_3(7),$$

两式相乘即得

$$F_3(2)F_3(2)F_3(3) = F_3(7).$$

至于唯一性可仿定理 1 证明． □

定理 5 设 $\alpha_1 + \alpha_2 + \cdots + \alpha_t = 0 (t \geqslant 4)$，则不存在自然数组 (l,m,n) 使得下式恒成立：

$$F_t(l)F_t(m)F_t(n) = F_t(l+m+n).$$

此定理的证明完全雷同于定理 3.

定理6 设 $\alpha_1+\alpha_2+\cdots+\alpha_t=0(t\geqslant 3)$，则不存在自然数组 $(m_1,m_2,\cdots,m_k)(k\geqslant 4)$ 使得下式恒成立：

$$F_t(m_1)F_t(m_2)\cdots F_t(m_k)=F_t(m_1+m_2+\cdots+m_k). \tag{9}$$

证明 只要证明 $t=3$ 时结论为真就行了，即只要证明在条件 $\alpha_1+\alpha_2+\alpha_3=0$ 下，不存在自然数组 $(m_1,m_2,\cdots,m_k)$ 使(9)恒成立．类似于定理1推证中的说明，问题可化归为证明：不存在自然数组 $(m_1,m_2,\cdots,m_k)$ 使下式恒等

$$\prod_{i=1}^{k}\frac{x^{m_i}+1+(-x-1)^{m_i}}{m_i}=\frac{x^{\sum\limits_{i=1}^{k}m_i}+1+(-x-1)^{\sum\limits_{i=1}^{k}m_i}}{\sum\limits_{i=1}^{k}m_i}. \tag{10}$$

首先，来证明全由偶数组成的数组 $(m_1,m_2,\cdots,m_k)$ 不可能使(10)恒等．不然，在(10)中，分别令 $x=-1$、-2 将有

$$\prod_{i=1}^{k}\frac{2}{m_i}=\frac{2}{\sum\limits_{i=1}^{k}m_i}, \tag{11}$$

$$\prod_{i=1}^{k}\frac{2^{m_i}+2}{m_i}=\frac{2^{\sum\limits_{i=1}^{k}m_i}+2}{\sum\limits_{i=1}^{k}m_i}. \tag{12}$$

(12)即为

$$\prod_{i=1}^{k}\frac{2}{m_i}\cdot\prod_{i=1}^{k}(1+2^{m_i-1})=\frac{2}{\sum\limits_{i=1}^{k}m_i}\cdot\left(1+2^{\sum\limits_{i=1}^{k}m_i-1}\right),$$

由(11)即知

$$\prod_{i=1}^{k}(1+2^{m_i-1})=\left(1+2^{\sum\limits_{i=1}^{k}m_i-1}\right). \tag{13}$$

但(13)不成立．

事实上，由 $a+b\leqslant ab(a,b\geqslant 2$，且等号仅当 $a=b=2$ 成

立) 知：当 $m_i \in N$ 且 $m_i \geqslant 2$ 时，

$$(1+2^{m_1-1})(1+2^{m_2-1}) = 1+2^{m_1-1}+2^{m_2-1}+2^{m_1+m_2-2}$$
$$\leqslant 1+2^{m_1+m_2-2}+2^{m_1+m_2-2} = 1+2^{m_1+m_2-1};$$
$$(1+2^{m_1-1})(1+2^{m_2-1})(1+2^{m_3-1}) \leqslant (1+2^{m_1+m_2-1})(1+2^{m_3-1})$$
$$< 1+2^{m_1+m_2+m_3-1};$$

如此下去，可知

$$\prod_{i=1}^{k}(1+2^{m_i-1}) < 1+2^{\sum\limits_{i=1}^{k} m_i - 1} \quad (k \geqslant 4).$$

所以(13) 不成立.

其次，可证明有多于 1 个的奇数组成的数组$(m_1, m_2, \cdots, m_k)$也不可能使(10) 恒等. 不然，(10) 左边的次数就低于 $\sum m_i - 1$ 次，而右边的次数不低于 $\sum m_i - 1$ 次.

最后证明，有且只有一个奇数组成的数组$(m_1, m_2, \cdots, m_k)$ 也不可能使(10) 恒等. 不然，不妨设 m_1 是奇数，其余 m_i 都是偶数，显然 $m_1 \geqslant 3$. 这时，若 m_2、m_3、…、m_k 中存在大于 2 的偶数，则比较(10) 两边的最高次项系数，有

$$\frac{2}{m_2} \cdot \frac{2}{m_3} \cdot \cdots \cdot \frac{2}{m_k} = 1.$$

这是不可能的.

若 m_2、m_3、…、m_k 都等于 2，且 $m_1 = 3$，则(10) 可化为

$$(x^2+x)(x^2+x+1)^{k-1} = \frac{(x+1)^{2k+1} - x^{2k+1} - 1}{2k+1}. \quad (14)$$

注意到

$$(x^2+x+1)^{k-1} = x^{2k-2} + (k-1)x^{2k-3} + \frac{k(k-1)}{2}x^{2k-4} + \cdots,$$

故比较(14) 两边 x^{2k-2} 项系数，有

$$\frac{k(k-1)}{2} + (k-1) = \frac{C_{2k+1}^{3}}{2k+1}.$$

解得 $k = 2$ 或 $k = 3$，这与 $k \geqslant 4$ 矛盾.

若 m_2、m_3、…、m_k 都等于 2，且 $m_1 \geqslant 5$，这时，(10) 可化为

$$\sum_{i=1}^{m_1-1}\frac{C_{m_1}^i}{m_1}x^{m_1-i}\cdot\left[x^{2k-2}+(k-1)x^{2k-3}+\frac{k(k-1)}{2}x^{2k-4}+\cdots\right]$$
$$=\sum_{i=1}^{m_1+2k-3}\frac{C_{m_1+2k-2}^i}{m_1+2k-2}x^{m_1+2k-2-i}.$$

比较两边 x^{m_1+2k-5} 项系数，有

$$\frac{C_{m_1}^3}{m_1}+\frac{C_{m_1}^2}{m_1}(k-1)+\frac{C_{m_1}^1}{m_1}\cdot\frac{k(k-1)}{2}=\frac{C_{m_1+2k-2}^3}{m_1+2k-2}.$$

化简后得 $k=1$ 或 $m_1+k=7$，这也不可能. □

至此，定理 6 证毕. 发散 Ⅰ 也就得到了完满的回答.

最后，我们将以上诸定理总结成

定理 7 设 $\alpha_1+\alpha_2+\cdots+\alpha_t=0(t\geqslant 3)$，则使

$$F_t(m_1)F_t(m_2)\cdots F_t(m_k)=F_t(m_1+m_2+\cdots+m_k)$$

$(k\geqslant 2)$ 恒成立的自然数组 $(t|m_1,m_2,\cdots,m_k)$ 只有 $(3|2,3)$、$(3|2,5)$、$(4|2,3)$、$(3|2,2,3)$ 四组.

这就是说，类似于(1) 这样的形式优美的条件恒等式有 4 个，那就是

$$F_3(2)F_3(3)=F_3(5)、F_3(2)F_3(5)=F_3(7)$$
$$F_4(2)F_4(3)=F_4(5)、F_3(2)F_3(2)F_3(3)=F_3(7).$$

参考文献

[1] 郭友朋等收集，《历届中学生数学竞赛题解》，福建人民出版社，1979 年，189—190.

[2] 熊斌编著，《美国数学奥林匹克试题与解答》，上海科技教育出版社，1993 年，10—11，41—42.

[3] 刘培杰，从一道条件恒等式的证明谈起，《数学竞赛》第 14 辑，湖南教育出版社，60—74.

互补型樊畿不等式的推广

汕头大学数学所　王　振
宁波大学数学系　陈　计

(一) 引　言

1961年,Ky Fan在Beckenbach与Bellman合写的书[1]中发表了关于$x=(x_1,\cdots,x_n)$,$1-x=(1-x_1,\cdots,1-x_n)$的算术平均——几何平均比的不等式:若$0\leqslant x_1,\cdots,x_n\leqslant\frac{1}{2}$,则

$$\frac{G(x)}{G(1-x)}\leqslant\frac{A(x)}{A(1-x)}. \tag{1}$$

1974年,Chan,Goldberg和Gonek[2]开始考虑Segaiman关于(1)的幂平均推广的猜测:

$$\frac{M_p(x)}{M_p(1-x)}\leqslant\frac{M_q(x)}{M_q(1-x)},(p\leqslant q). \tag{2}$$

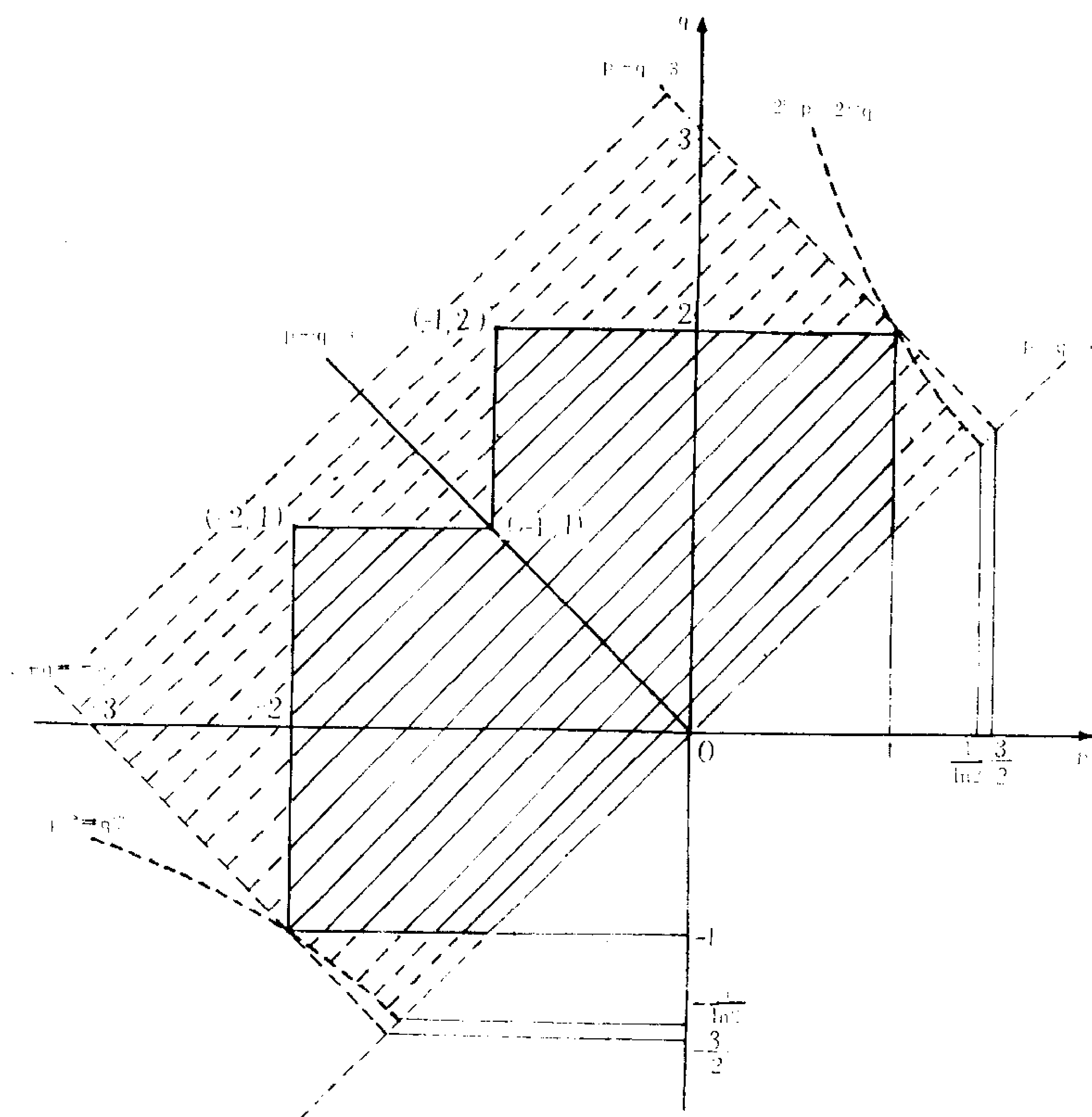
他们证明了:(i) 当$0\leqslant p\leqslant 1\leqslant q\leqslant 2$时,(2)成立;(ii) 当$p<0$,$p+q=0$时,(2)成立;(iii) 当$n=2$时,(2)成立;(iv) 当$0<2^p/p<2^q/q$时,(2)不成立;(v) 当$p+q>9$时,(2)不成立.

最近,王挽澜和王鹏飞[3]证明了(2)对$p=-1,q=0$成立;李广兴与陈计[4]证明了:当$-1\leqslant p\leqslant 0\leqslant q\leqslant 1$时,(2)成立;王振与陈计[5]进一步证明了:(i) 当$x_1,\cdots,x_n$不全相等时,函数$R(p)=M_p(x)/M_p(1-x)$在$[-1,1]$上严格递增,(ii) 若(2)对(p,q)成立,则对$(-q,-p)$也成立.

本文中,我们定出了不等式(2)对任意自然数n都成立的$(p,$

q) 的集合 C,即 $C = \{(p,q) \mid (\text{i}) p \leqslant q, (\text{ii}) |p+q| \leqslant 3, (\text{iii})$ 当 $p > 0$ 时 $2^p/p \geqslant 2^q/q, (\text{iv})$ 当 $q < 0$ 时 $p2^p \leqslant q2^q\}$.

下图的阴影部分表示$(p,q) \in C$;空白部分表示$(p,q) \overline{\in} C$. 而实线阴影部分则表示曾被证明的结果.



由于 Chan 等人[2] 已经证明:当 $n = 2, p \leqslant q$ 时,不等式(2)成立,所以,当 $q < p$ 时,$(p,q) \overline{\in} C$. 于是,我们只须考虑 $p < q$ 的情形,并可把本文的主要结论叙述成如下:

定理 设 $p<q, x_i\in(0,\frac{1}{2}], i=1,\cdots,n$，则不等式

$$\left[\frac{\sum_{i=1}^{n}x_i^p}{\sum_{i=1}^{n}(1-x_i)^p}\right]^{1/p}\leqslant\left[\frac{\sum_{i=1}^{n}x_i^q}{\sum_{i=1}^{n}(1-x_i)^q}\right]^{1/q}\tag{3}$$

对任何 n 都成立的充要条件是 $|p+q|\leqslant 3$，当 $p>0$ 时 $2^p/p\geqslant 2^q/q$，当 $q<0$ 时 $p2^p\leqslant q2^q$.

我们不妨假定 $pq\neq 0$，因为 $pq=0$ 的情形可以通过令 p 或 $q\to 0$ 取极限而得.

在(二)中，我们给出必要性的证明；在(三)——(五)中，我们来完成充分性的证明；在(六)中，我们将给出定理的两个直接推论，并提出进一步研究的问题.

(二) 必要性的证明

2.1 文[2]已经证明：当 $p>0$ 时，若(3)对任何 n 都成立，则必有 $2^p/p\geqslant 2^q/q$.

2.2 当 $q<0$ 时，在(3)中令 $x_1=\cdots=x_{n-1}=\varepsilon(0<\varepsilon<\frac{1}{2}), x_n=\frac{1}{2}$，得

$$\left[\frac{(n-1)\varepsilon^p+2^{-p}}{(n-1)(1-\varepsilon)^p+2^{-p}}\right]^{1/p}\leqslant\left[\frac{(n-1)\varepsilon^q+2^{-q}}{(n-1)(1-\varepsilon)^q+2^{-q}}\right]^{1/q},$$

或

$$\frac{[\varepsilon^p+2^{-p}(n-1)^{-1}]^{1/p}}{[\varepsilon^q+2^{-q}(n-1)^{-1}]^{1/q}}\leqslant\frac{[(1-\varepsilon)^p+2^{-p}(n-1)^{-1}]^{1/p}}{[(1-\varepsilon)^q+2^{-q}(n-1)^{-1}]^{1/q}};\tag{4}$$

再令 $\varepsilon\to 0$，得

$$1\leqslant\frac{[1+2^{-p}(n-1)^{-1}]^{1/p}}{[1+2^{-q}(n-1)^{-1}]^{1/q}},$$

即

$$[1+2^{-q}(n-1)^{-1}]^{1/q} \leqslant [1+2^{-p}(n-1)^{-1}]^{1/p}; \quad (5)$$

或

$$n\{[1+2^{-q}(n-1)^{-1}]^{1/q}-1\} \leqslant n\{[1+2^{-p}(n-1)^{-1}]^{1/p}-1\},$$

令 $n \to +\infty$，得 $2^{-q}/q \leqslant 2^{-p}/p$，即 $p2^p \leqslant q2^q$.

2.3 在(3)中令 $x_i=(1-u_i)/2$，$(0 \leqslant u_i < 1)$，得其等价形式

$$\left[\frac{\sum_{i=1}^{n}(1-u_i)^p}{\sum_{i=1}^{n}(1+u_i)^p}\right]^{1/p} \leqslant \left[\frac{\sum_{i=1}^{n}(1-u_i)^q}{\sum_{i=1}^{n}(1+u_i)^q}\right]^{1/q}; \quad (6)$$

令 $u_1=\cdots=u_{n-1}=0, u_n=u(0<u<1)$，得

$$\left[\frac{(n-1)+(1-u)^p}{(n-1)+(1+u)^p}\right]^{1/p} \leqslant \left[\frac{(n-1)+(1-u)^q}{(n-1)+(1+u)^q}\right]^{1/q}; \quad (7)$$

或

$$\frac{1}{u^3}\left\{\left[\frac{(n-1)+(1-u)^p}{(n-1)+(1+u)^p}\right]^{1/p}-1+\frac{2u}{n}-\frac{2u^2}{n^2}\right\}$$

$$\leqslant \frac{1}{u^3}\left\{\left[\frac{(n-1)+(1-u)^q}{(n-1)+(1+u)^q}\right]^{1/q}-1+\frac{2u}{n}-\frac{2u^2}{n^2}\right\},$$

再令 $u \to 0$ 得

$$-\frac{(n-1)[(n-2)p^2-3np]+2(n^2+2)}{3n^3}$$

$$\leqslant -\frac{(n-1)[(n-2)q^2-3nq]+2(n^2+2)}{3n^3},$$

即

$$(n-2)p^2-3np \geqslant (n-2)q^2-3nq,$$

或

$$(p-q)[(n-2)(p+q)-3n] \geqslant 0; \quad (8)$$

所以，当 $n \geqslant 3$ 时，

$$p+q \leqslant \frac{3n}{n-2}; \quad (9)$$

令 $n\to+\infty$,得 $p+q\leqslant 3$.

类似地,在(6)中令 $u_1=\cdots=u_{n-1}=u(0<u<1)$, $u_n=$

在 $u\to 0$ 时可得

$$p+q\geqslant -\frac{3n}{n-2};\tag{10}$$

再令 $n\to+\infty$ 得 $p+q\geqslant -3$.

(二) 等价性命题

文[5]已经证明:

命题 1 设 $p<q$,则下列三个不等式彼此等价:

$$\text{(i)}\left[\frac{\sum_{i=1}^{n}\lambda_i x_i^p}{\sum_{i=1}^{n}\lambda_i(1-x_i)^p}\right]^{1/p}<\left[\frac{\sum_{i=1}^{n}\lambda_i x_i^q}{\sum_{i=1}^{n}\lambda_i(1-x_i)^q}\right]^{1/q},$$

其中 $\lambda_i>0$, $0<x_i\leqslant\frac{1}{2}$, $i=1,\cdots,n$,且 x_i 不全相等;

$$\text{(ii)}\left[\frac{\lambda x^p+\mu y^p}{\lambda(1-x)^p+\mu(1-y)^p}\right]^{1/p}<\left[\frac{\lambda x^q+\mu y^q}{\lambda(1-x)^q+\mu(1-y)^q}\right]^{1/q}.$$

其中 $\lambda,\mu>0$, $0<x\neq y\leqslant\frac{1}{2}$;

$$\text{(iii)}\left[\frac{\mu x^{-q}+\lambda y^{-q}}{\mu(1-x)^{-q}+\lambda(1-y)^{-q}}\right]^{-1/q}<\left[\frac{\mu x^{-p}+\lambda y^{-p}}{\mu(1-x)^{-p}+\lambda(1-y)^{-p}}\right]^{-1/p}.$$

其中 $\lambda,\mu>0$, $0<x\neq y\leqslant\frac{1}{2}$.

注记 由命题1可知:若不等式(3)对 (p,q) 成立,则对 $(-q,-p)$ 也成立.

本节中,我们再给出一个等价性命题,从而使问题大为简化.

命题 2 设 $p<q$,则上述命题 1 中不等式(ii)与下列不等式等价:

$$\text{(iv)}\quad\left[\frac{\lambda+(1-u)^p}{\lambda+(1+u)^p}\right]^{1/p}<\left[\frac{\lambda+(1-u)^q}{\lambda+(1+u)^q}\right]^{1/q},$$

其中 $\lambda > 0, 0 < u < 1$.

证明 (ii)⇒(iv).

在(ii)中令 $\mu = 1, x = 1/2, y = (1-u)/2$,即得(iv).

(iv)⇒(ii).

不妨设 $x > y$,令 $y/x = 1-u, x/(1-x) = k$,则 $0 < u < 1, 0 < k \leqslant 1, (1-y)/(1-x) = 1 + ku$. 于是(ii)便等价于

$$f(k) = \frac{1}{q}\ln\frac{\lambda + \mu(1-u)^q}{\lambda + \mu(1+ku)^q} - \frac{1}{p}\ln\frac{\lambda + \mu(1-u)^p}{\lambda + \mu(1+ku)^p} > 0. \tag{11}$$

但

$$\begin{aligned} f'(k) &= -\frac{\mu u(1+ku)^{q-1}}{\lambda + \mu(1+ku)^q} + \frac{\mu u(1+ku)^{p-1}}{\lambda + \mu(1+ku)^p} \\ &= \frac{u}{1+ku}\left[\frac{\mu(1+ku)^p}{\lambda + \mu(1+ku)^p} - \frac{\mu(1+ku)^q}{\lambda + \mu(1+ku)^q}\right] < 0. \end{aligned} \tag{12}$$

所以

$$f(k) = f(1) = \frac{1}{q}\ln\frac{\lambda + (1-u)^q}{\lambda + (1+u)^q} - \frac{1}{p}\ln\frac{\lambda + (1-u)^p}{\lambda + (1+u)^p} > 0. \tag{13}$$

□

(四)三个引理

引理 1 设 $\alpha \leqslant 0, \alpha < \beta \leqslant 1-\alpha, 0 \leqslant u < 1$,则

$$(1+u)^\alpha + (1-u)^\alpha \geqslant (1+u)^\beta + (1-u)^\beta, \tag{14}$$

等号成立当且仅当 $u = 0$ 或 $(\alpha, \beta) = (0, 1)$.

证明 设 $\varphi(x) = (1+u)^x + (1-u)^x, (0 < u < 1)$,则

$$\varphi''(x) = (1+u)^x\ln^2(1+u) + (1-u)^x\ln^2(1-u)^2 > 0. \tag{15}$$

所以,要证(14)只须证 $\beta = 1-\alpha$ 的情形,即

$$\Phi(u) = (1+u)^\alpha + (1-u)^\alpha - (1+u)^{1-\alpha} - (1-u)^{1-\alpha} > 0, \tag{16}$$

其中 $\alpha < 0, 0 < u < 1$.

$$\Phi(u) = 2\sum_{n=0}^{\infty}\left[\binom{\alpha}{2n} - \binom{1-\alpha}{2n}\right]u^{2n}$$

$$= 2\alpha(\alpha-1)\sum_{n=2}^{\infty}\frac{u^{2n}}{(2n)!}\left[\prod_{k=2}^{2n-1}(\alpha-k) - \prod_{k=2}^{2n-1}(1-\alpha-k)\right].$$

由于$(\alpha-k)^2-(1-\alpha-k)^2=(1-2k)(2\alpha-1)>0$,所以$k-\alpha>|1-\alpha-k|$,从而$\Phi(u)>0$. □

引理 2 设$0<\alpha<\beta<1-\alpha, 0<u\leqslant 1$,则函数$G(u)=(1+u)^{\alpha}+(1-u)^{\alpha}-(1+u)^{\beta}-(1-u)^{\beta}$存在唯一的零点$u_0$,且

(i) 当$0<u<u_0$时,$G(u)>0$;

(ii) 当$u_0<u\leqslant 1$时,$G(u)<0$.

证明
$$G'(u) = \alpha[(1+u)^{\alpha-1}-(1-u)^{\alpha-1}] - \beta[(1+u)^{\beta-1}-(1-u)^{\beta-1}],$$

$$\begin{aligned}G''(u) &= \alpha(\alpha-1)[(1+u)^{\alpha-2}+(1-u)^{\alpha-2}] \\ &\quad - \beta(\beta-1)[(1+u)^{\beta-2}+(1-u)^{\beta-2}] \\ &= \beta(\beta-1)[(1+u)^{\alpha-2}+(1-u)^{\alpha-2}] \\ &\quad \times\left[\frac{\alpha(\alpha-1)}{\beta(\beta-1)} - \frac{(1+u)^{\beta-2}+(1-u)^{\beta-2}}{(1+u)^{\alpha-2}+(1-u)^{\alpha-2}}\right].\end{aligned}$$

由于$0<\alpha<\beta<1-\alpha$,所以$\beta(\beta-1)<\alpha(\alpha-1)<0$,从而$0<[\alpha(\alpha-1)]/[\beta(\beta-1)]<1$.记$g(u)=[(1+u)^{\beta-2}+(1-u)^{\beta-2}]/[(1+u)^{\alpha-2}+(1-u)^{\alpha-2}]$,则$g(0)=1, g(1)=0$.在$0<u<1$时,对$g(u)$求导,

$$g'(u) = \frac{(\beta-2)[(1+u)^{\beta-3}-(1-u)^{\beta-3}]}{(1+u)^{\alpha-2}+(1-u)^{\alpha-2}}$$
$$-\frac{(\alpha-2)[(1+u)^{\alpha-3}-(1-u)^{\alpha-3}][(1+u)^{\beta-2}+(1-u)^{\beta-2}]}{[(1+u)^{\alpha-2}+(1-u)^{\alpha-2}]^2}$$
$$<(\alpha-2)\{[(1+u)^{\beta-3}-(1-u)^{\beta-3}][(1+u)^{\alpha-2}+(1-u)^{\alpha-2}]$$
$$-[(1+u)^{\alpha-3}-(1-u)^{\alpha-3}][(1+u)^{\beta-2}+(1-u)^{\beta-2}]\}/[(1+u)^{\alpha-2}$$
$$+(1-u)^{\alpha-2}]^2$$

$$= \frac{2(\alpha-2)(1+u)^{\alpha+\beta-6}}{[(1+u)^{\alpha-2}+(1-u)^{\alpha-2}]^2}\left[\left(\frac{1-u}{1+u}\right)^{\alpha-3}-\left(\frac{1-u}{1+u}\right)^{\beta-3}\right]<0, \tag{16}$$

即知 $g(u)$ 为严格单调函数，从而存在唯一的 $u_1 \in (0,1)$，使 $g(u_1) = [\alpha(\alpha-1)]/[\beta(\beta-1)]$，且

当 $0 < u < u_1$ 时，$G''(u) > 0$，

当 $u_1 < u < 1$ 时，$G''(u) < 0$；

又由 $G(0) = 0, G(1) = 2^\alpha - 2^\beta < 0$，易知：$G(u)$ 在 $(u_1,1)$ 中存在唯一 u_0，使 $G(u_0) = 0$，且

当 $0 < u < u_0$ 时，$G(u) > 0$；

当 $u_0 < u \leqslant 1$ 时，$G(u) < 0$. □

引理 3 设 $p < q, p+q \leqslant 3$，且当 $p > 0$ 时，$2^p/p \geqslant 2^q/q$，则当 $0 \leqslant u < 1$ 时，有

$$\frac{(1+u)^p-(1-u)^p}{p} \geqslant \frac{(1+u)^q-(1-u)^q}{q}, \tag{17}$$

等号成立当且仅当 $u = 0$ 或 $(p,q) = (1,2)$.

证明 令 $H(u) = [(1+u)^p-(1-u)^p]/p - [(1+u)^q-(1-u)^q]/q$，则 $H'(u) = (1+u)^{p-1}+(1-u)^{p-1}-(1+u)^{q-1}-(1-u)^{q-1}$.

当 $p \leqslant 1$ 时，$p-1 < q-1 \leqslant 1-(p-1)$. 由引理 1 知：$H'(u) \geqslant 0$，等号成立当且仅当 $u = 0$ 或 $(p,q) = (1,2)$. 于是 $H(u) \geqslant H(0) = 0$，等号成立当且仅当 $u = 0$ 或 $(p,q) = (1,2)$.

当 $p > 1$ 时，由于函数 $h(r) = 2^r/r$ 在 $(0,\frac{1}{\ln 2}]$ 上严格递减，在 $[\frac{1}{\ln 2},+\infty)$ 上严格递增（详见（六）中推论 1 的证明），且 $h(1) = h(2)$，所以再由 $h(p) \geqslant h(q)$ 即知 $p+q < 1+2 = 3$. 从而 $0 < p-1 < q-1 < 1-(p-1)$. 由引理 2 知：$H'(u)$ 在 $(0,1)$ 上有唯一零点 u_0，且

当 $0 < u < u_0$ 时，$H'(u) > 0$，故 $H(u) > H(0) = 0$，

当 $u_0 < u < 1$ 时，$H'(u) < 0$，故 $H(u) > H(1) = 2^p/p - 2^q/q \geqslant 0$.

综上所述，$H(u) \geqslant 0$，等号成立当且仅当 $u = 0$ 或 $(p,q) = (1,2)$. □

（五）充分性的证明

由（三）中的等价性命题1和2，我们仅须证明：

命题3　设 $\lambda > 0$，$0 < u < 1$，$p < q$，$|p+q| \leqslant 3$，当 $p > 0$ 时，$2^p/p \geqslant 2^q/q$，当 $q < 0$ 时，$p2^p \leqslant q2^q$，则

$$\left[\frac{\lambda + (1-u)^p}{\lambda + (1+u)^p}\right]^{1/p} < \left[\frac{\lambda + (1-u)^q}{\lambda + (1+u)^q}\right]^{1/q}. \tag{18}$$

证明　上述不等式等价于

$$F(\lambda) = \frac{1}{q}\ln\frac{\lambda + (1-u)^q}{\lambda + (1+u)^q} - \frac{1}{p}\ln\frac{\lambda + (1-u)^p}{\lambda + (1+u)^p} > 0. \tag{19}$$

但
$$\begin{aligned} F'(\lambda) &= \frac{1}{q}\left[\frac{1}{\lambda + (1-u)^q} - \frac{1}{\lambda + (1+u)^q}\right] \\ &\quad - \frac{1}{p}\left[\frac{1}{\lambda + (1-u)^p} - \frac{1}{\lambda + (1+u)^p}\right] \\ &= (A\lambda^2 + B\lambda + C)/Q(\lambda), \end{aligned}$$

其中
$$\begin{aligned} Q(\lambda) &= [\lambda + (1-u)^q][\lambda + (1+u)^q] \\ &\quad \times [\lambda + (1-u)^p][\lambda + (1+u)^p], \end{aligned}$$

$$A = [(1+u)^q - (1-u)^q]/q - [(1+u)^p - (1-u)^p]/p,$$

$$\begin{aligned} B &= [(1+u)^p + (1-u)^p][(1+u)^q - (1-u)^q]/q \\ &\quad - [(1+u)^q + (1-u)^q][(1+u)^p - (1-u)^p]/p, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} C &= (1-u^2)^{p+q}\{[(1+u)^{-q} - (1-u)^{-q}]/(-q) \\ &\quad - [(1+u)^{-p} - (1-u)^{-p}]/(-p)\}. \end{aligned}$$

当 $(p,q) \neq (1,2), (-2,-1)$ 时，由引理3得 $A < 0 < C$；

当$(p,q)=(1,2)$时，$A=0,B=-4u^3<0,C=2u^3(1-u^2)>0$；

当$(p,q)=(-2,-1)$时，$A=-2u^3/(1-u^2)^2<0,B=4u^3/(1-u^2)^3>0,C=0$.

因此，$F'(\lambda)$有唯一正根λ_0，并且，当$0<\lambda<\lambda_0$时，$F'(\lambda)>0$，当$\lambda>\lambda_0$时，$F'(\lambda)<0$. 所以，当$\lambda>0$时，$F(\lambda)>F(0)=F(+\infty)=0$. □

（六）推论与猜想

6.1 文[5]中，我们证明了函数$R(p)=M_p(x)/M_p(1-x)$在$[-1,1]$上递增. 现在，我们应用本文建立的定理来拓广单调区间.

推论1 设$0<x_i\leqslant\frac{1}{2},i=1,\cdots,n$，则函数$R(p)=\frac{M_p(x)}{M_p(1-x)}$在$\left[-\frac{1}{\ln2},\frac{1}{\ln2}\right]$上单调递增.

证明 当$-\frac{1}{\ln2}\leqslant p<q\leqslant\frac{1}{\ln2}$时，$|p+q|<\frac{2}{\ln2}=2.88\cdots<3$. 所以，由定理，要证$R(p)\leqslant R(q)$，只须证：当$p>0$时，$2^p/p\geqslant 2^q/q$；当$q<0$时，$p2^p\leqslant q2^q$.

当$0<p<q\leqslant\frac{1}{\ln2}$时，令$h(r)=\frac{2^r}{r}(r>0)$，则$h'(r)=\frac{2^r}{r}(\ln2-\frac{1}{r})$. 所以，当$0<r<\frac{1}{\ln2}$时，$h'(r)<0$，从而$h(p)>h(q)$.

当$-\frac{1}{\ln2}<p<q<0$时，令$k(r)=r2^r(r<0)$，则$k'(r)=2^r(1+r\ln2)$. 所以，当$-\frac{1}{\ln2}<r<0$时，$k'(r)>0$，从而$k(p)<k(q)$. □

6.2　值得注意的是：本文定理中不等式(4)成立的条件是对任意自然数 n 而言的. 然而，对给定的自然数 n 而言，(4)成立的条件尚可放宽(例如：当 $n=2$ 时，(4)成立的充要条件是 $p \leqslant q$).

猜想 1　设 $0 < x_i \leqslant \frac{1}{2}, i = 1,\cdots,n, n \geqslant 3, p < q, |p+q| \leqslant 3n/(n-2)$，当 $p > 0$ 时，$[1+2^p/(n-1)]^{1/p} \geqslant [1+2^q/(n-1)]^{1/q}$，当 $q < 0$ 时，$[1+2^{-p}/(n-1)]^{1/p} \geqslant [1+2^{-q}/(n-1)]^{1/q}$. 则

$$\left[\frac{\sum_{i=1}^{n} x_i^p}{\sum_{i=1}^{n}(1-x_i)^p}\right]^{1/p} \leqslant \left[\frac{\sum_{i=1}^{n} x_i^q}{\sum_{i=1}^{n}(1-x_i)^q}\right]^{1/q}, \tag{20}$$

等号成立当且仅当 $x_1 = \cdots = x_n$.

6.3　王挽澜和王鹏飞[3]还对初等对称函数 $E_r(x) = \sum_{1 \leqslant i_1 < \cdots < i_r \leqslant n} \prod_{j=1}^{r} x_{i_j} (1 \leqslant r \leqslant n)$ 建立了如下不等式：

$$\frac{E_1(x)}{E_1(1-x)} \geqslant \left[\frac{E_2(x)}{E_2(1-x)}\right]^{1/2} \geqslant \cdots \geqslant \left[\frac{E_n(x)}{E_n(1-x)}\right]^{1/n}, \tag{21}$$

其中 $0 \leqslant x_i \leqslant \frac{1}{2}, i = 1,2,\cdots,n$.

陈计[6]对 Hamy 平均 $G_r(x) = \binom{n}{r}^{-1} \sum_{1 \leqslant i_1 < \cdots < i_r \leqslant n} \left(\prod_{j=1}^{r} x_{i_j}\right)^{1/r} (1 \leqslant r \leqslant n)$ 提出了类似于(21)的不等式：

猜想 2　设 $0 \leqslant x_i \leqslant \frac{1}{2}, i = 1,2,\cdots,n$，则

$$\frac{G_1(x)}{G_1(1-x)} \geqslant \frac{G_2(x)}{G_2(1-x)} \geqslant \cdots \geqslant \frac{G_n(x)}{G_n(1-x)}, \tag{22}$$

等号成立当且仅当 $x_1 = x_2 = \cdots = x_n$.

6.4　刘启铭[7]考虑了平均

$$I_r(x) = \binom{n+r-1}{r}^{-1} \sum_{\substack{i_1 + \cdots + i_n = r \\ i_1 \geqslant 0, \cdots, i_n \geqslant 0}} \left(\prod_{j=1}^{n} x_j^{i_j}\right)^{1/r} (r \in N)$$

的 Ky Fan 型不等式：

猜想 3　设 $0 \leqslant x_j \leqslant \frac{1}{2}, j = 1,2,\cdots,n$，则

$$\frac{I_1(x)}{I_1(1-x)} \geqslant \frac{I_2(x)}{I_2(1-x)} \geqslant \cdots \geqslant \frac{I_r(x)}{I_r(1-x)} \geqslant \cdots. \tag{23}$$

6.5　在定理的相同条件下，我们有

推论 2　若 $r < 0$，则

$$M_p^r(1-x) - M_p^r(x) \leqslant M_q^r(1-x) - M_q^r(x). \tag{24}$$

特别地，当 $r = -1, (p,q) = (-1,0), (0,1)$ 时，得 Alzer 在[11]中建立的主要结论：

$$\frac{1}{H(1-x)} - \frac{1}{H(x)} \leqslant \frac{1}{G(1-x)} - \frac{1}{G(x)}$$

$$\leqslant \frac{1}{A(1-x)} - \frac{1}{A(x)}. \tag{25}$$

证明　由定理得 $M_q^r(x)M_p^r(1-x) \leqslant M_p^r(x)M_q^r(1-x)$，即

$$[M_q^r(x) + M_p^r(1-x)]^2 - [M_q^r(x) - M_p^r(1-x)]^2$$
$$\leqslant [M_p^r(x) + M_q^r(1-x)]^2 - [M_p^r(x) - M_q^r(1-x)]^2; \tag{26}$$

又由幂平均单调性 $M_q^r(x) + M_q^r(1-x) \leqslant M_p^r(x) + M_p^r(1-x)$，得

$$M_q^r(x) - M_p^r(1-x) \leqslant M_p^r(x) - M_q^r(1-x). \tag{27}$$

由(26)和(27)得

$$M_q^r(x) + M_p^r(1-x) \leqslant M_p^r(x) + M_q^r(1-x), \tag{28}$$

即不等式(24)成立．　□

6.6　Alzer[13] 建立的一个 Ky Fan 型不等式

$$G(x) - G(1-x) \leqslant A(x) - A(1-x) \tag{29}$$

可导出 Ky Fan 不等式：(29)等价于

$$G(x) + A(1-x) \leqslant A(x) + G(1-x); \tag{30}$$

又　$G(x) + G(1-x) \leqslant A(x) + A(1-x)$ 等价于

$$G(1-x) - A(x) \leqslant A(1-x) - G(x), \tag{31}$$

从而

$$[G(x)+A(1-x)]^2+[G(1-x)-A(x)]^2$$
$$\leqslant [A(x)+G(1-x)]^2+[A(1-x)-G(x)]^2, \quad (32)$$

即

$$G(x)A(1-x)\leqslant A(x)G(1-x), \quad (33)$$

它等价于 Ky Fan 不等式(1).

最后,我们给出 Fan—Alzer 不等式(29) 的一种推广形式:

猜想 4　设 $0<x_i\leqslant \frac{1}{2}, i=1,\cdots,n, n\geqslant 2, p<q, q\geqslant 1, 0\leqslant p+q\leqslant 3$,当 $p>0$ 时,$2^p/p\geqslant 2^q/q$,则

$$M_p(x)-M_p(1-x)\leqslant M_q(x)-M_q(1-x). \quad (34)$$

说明　本文的工作完成于 1988 年 2 月(见[8]). 1993 年出版的[9 — 10]记录了本文的主要结果;但在此之前,证明一直未正式发表.

参考文献

[1] E. F. Beckenbach, R. Bellman, Inequalities, Springer — Verlag, 1961, 5.

[2] F. Chan, D. Goldberg, S. Gonek, On extensions of an inequality among means, Proc. Amer. Math. Soc., 42(1974), 202 — 207.

[3] 王挽澜,王鹏飞,对称函数的一类不等式,《数学学报》,1984 年第 4 期, 485 — 497.

[4] 李广兴,陈计,樊墈不等式的推广,《湖南数学通讯》,1989 年第 4 期,37 — 39.

[5] 王振,陈计,Ky Fan 不等式的推广,《宁波大学学报》(理工版),1990 年第 2 期,23 — 26.

[6] 陈计,征解问题 120*(b),《数学通讯》,1993 年第 7 期,39.

[7] 刘启铭,征解问题 66(b)*,《数学通讯》,1991 年第 4 期,39;1993 年第 7 期,40.

[8] 王振,陈计,互补型的樊墈不等式之推广,《蛙鸣数学杂志》第 33 期,中国科学技术大学数学系,1988 年,1 — 8.

[9] 匡继昌,《常用不等式》(第二版),湖南教育出版社,1993年,158－161.

[10] D. S. Mitrinovic,J. E. Pečaric,A. M. Fink,Classical and New Inequalities in Analysis,Kluwer Academic Publishers,1993,28－31.

[11] H. Alzer, Inequalities for arithmetic, geometric and harmonic means, Bull. London Math. Soc., 22(1990), 362—366.

[12] J. Sandor, On an inequality of Ky Fan, to appear.

[13] H. Alzer, Ungleichunger fur geometrische und arithmetische Mittelwerte, Proc. Kon. Nederl. Akad. wetensch., 91(1988), 365—374.

[14] J. E. Pecaric, H. Alzer, On Ky Fan's inequality, to appear.

三元四次对称不等式

福建南安市五星中学　陈胜利

1971 年，Stolarsky[1] 发现了关于三角形不等式的如下基本定理：

设 $F(a,b,c)$ 为次数 $n \leqslant 3$ 的实对称齐次多项式，则不等式 $F(a,b,c) \geqslant 0$ 对任意三角形的三边 a,b,c 成立的充要条件是

$F(1,1,1), F(1,1,0), F(2,1,1) \geqslant 0.$

据此作代换：

$$a = y + z, b = z + x, c = x + y,$$

则可得到与上述定理等价的如下

命题　**次数 $n \leqslant 3$ 的实齐次对称不等式 $F(x,y,z) \geqslant 0$ 对任意正数 x,y,z 成立的充要条件是**

$F(1,0,0), F(1,1,0), F(1,1,1) \geqslant 0.$

那么，当次数 $n \geqslant 4$ 时，是否有类似的定理呢？对于 $n = 4$，我们有上述命题的如下推广

定理　**给定三元四次对称不等式：**

$$F(x,y,z) \equiv \lambda\left(\sum x\right)^4 + \mu\sum(yz)^2 + v\sum x\prod x + k\left(\sum x\right)^2\sum yz \geqslant 0 \quad (\lambda,\mu,v,k \in R), \tag{1}$$

则当 $k \geqslant -5\lambda$ 时，(1) 对任意正数 x,y,z 成立的充要条件是

$$\begin{cases} F(1,0,0) = \lambda \geqslant 0 & (2\text{-}1) \\ F(1,1,0) = 4k + 16\lambda + \mu \geqslant 0 & (2\text{-}2) \\ F(1,1,1) = 3(9k + 27\lambda + \mu + v) \geqslant 0. & (2\text{-}3) \end{cases}$$

当 $k < -5\lambda$ 时，若 $F(1,1,1) = 0$，则(1) 对任意正数 x,y,z 成立的

充要条件是

$$\begin{cases} F(1,0,0) = \lambda > 0 & (3\text{-}1) \\ \lambda\mu \geq (3\lambda + k)^2 = (\mu + v)^2/81. & (3\text{-}2) \end{cases}$$

为证明此定理，我们先建立下面的

引理 设 $x, y, z > 0, \lambda_0 \in R$，则有

$$F_1(x,y,z) = (\sum x)^2 \sum yz - 4\sum (yz)^2 - 5\sum x \prod x \geq 0, \tag{4}$$

$$F_2(x,y,z) = (\sum x)^4 - 16\sum (yz)^2 - 11\sum x \prod x \geq 0, \tag{5}$$

$$\begin{aligned} F_3(x,y,z) = {} & \lambda_0^2(\sum x)^4 + (3\lambda_0 - 1)^2 \sum (yz)^2 \\ & - (36\lambda_0^2 - 15\lambda_0 + 1)\sum x \prod x \\ & - \lambda_0(\sum x)^2 \sum yz \geq 0. \end{aligned} \tag{6}$$

证明 由齐次性不妨设

$$\sum x = 1, \tag{7}$$

则据 $\triangle ABC$ 中的恒等式

$$\sum \operatorname{tg}\frac{B}{2}\operatorname{tg}\frac{C}{2} = 1, \tag{7'}$$

可作代换：

$$x = \operatorname{tg}\frac{B}{2}\operatorname{tg}\frac{C}{2}, y = \operatorname{tg}\frac{C}{2}\operatorname{tg}\frac{A}{2}, z = \operatorname{tg}\frac{A}{2}\operatorname{tg}\frac{B}{2}, \tag{8}$$

从而由熟知关系式：

$$\sum \operatorname{tg}\frac{A}{2} = (4R + r)/s, \prod \operatorname{tg}\frac{A}{2} = r/s, \tag{9}$$

(s, R, r 为 $\triangle ABC$ 的半周长，外、内半径) 得

$$\begin{aligned} & \sum yz = r(4R + r)/s^2, \\ & \sum (yz)^2 = [r^2(4R + r)^2 - 2s^2r^2]/s^4, \end{aligned} \tag{10}$$

于是(4)，(5) 可化为

$$s^2(R + r) - r(4R + r)^2 \geq 0,$$

$$s^4+21r^2s^2-16r^2(4R+r)^2\geqslant 0,$$

而据 Gerretsen 不等式 $s^2\geqslant 16Rr-5r^2$ 及 Euler 不等式 $R-2r\geqslant 0$,易证上面两式成立,故(4),(5)得证(其中等号当且仅当 $x=y=z$ 时成立).

为证(6),我们可将它整理成如下形式:

$$\varphi(\lambda_0)=a_0\lambda_0^2-b_0\lambda_0+c_0\geqslant 0, \qquad (6')$$

式中

$$\begin{aligned}
a_0&=\left(\sum x\right)^4+9\sum(yz)^2-36\sum x\prod x\\
&=[s^4-54r^2s^2+9r^2(4R+r)^2]/s^4\text{(由(8)}\sim\text{(10))}\\
&=[(s^2-27r^2)^2+27r^2(R-2r)(2R+5r)]/s^4\geqslant 0,\\
b_0&=\left(\sum x\right)^2\sum yz+6\sum(yz)^2-15\sum x\prod x\\
&=[2s^2r(2R-13r)+6r^2(4R+r)^2]/s^4,\\
c_0&=\sum(yz)^2-\sum x\prod x\\
&=[-3s^2r^2+r^2(4R+r)^2]/s^4.
\end{aligned}$$

则当 $a_0=0$ 即 $s^2=27r^2,R=2r$ 时,有 $b_0=c_0=0$,从而 $\varphi(\lambda_0)=0$,即(6′)成立(这时 $x=y=z$);当 $a_0>0$ 时,$\varphi(\lambda_0)$ 的判别式

$$\begin{aligned}
\Delta&=b_0^2-4a_0c_0\\
&=12s^{-6}r^2[s^4-2(2R^2+10Rr-r^2)s^2+r(4R+r)^3]\\
&\leqslant 0\text{(见文[2]引理 1 的证明)}.
\end{aligned}$$

从而 $\varphi(\lambda_0)\geqslant 0$,(6′)得证(这时等号成立当且仅当 $2\lambda_0=b_0/a_0,a_0>0,(x-y)(y-z)(z-x)=0$). □

定理的证明 显见(1)成立(对任意 $x,y,z>0$)的必要条件是(2-1)～(2-3)各式成立.在此条件下,当 $k\geqslant -5\lambda$ 时,由(2-1)知 $\lambda\geqslant 0$.则当 $k\geqslant 0$ 时,有

$$\begin{aligned}
F(x,y,z)&\geqslant\lambda\left(\sum x\right)^4+\mu\sum(yz)^2-(27\lambda+9k\\
&\quad+\mu)\sum x\prod x+k\left(\sum x\right)^2\sum yz\text{(由条件(2-3))}\\
&=k\left[\left(\sum x\right)^2\sum yz-9\sum x\prod x\right]+\lambda\left[\left(\sum x\right)^4\right.
\end{aligned}$$

$$-27\sum x\prod x]+\mu[\sum(yz)^2-\sum x\prod x] \tag{11}$$

$$\geqslant k[(\sum x)^2\sum yz-9\sum x\prod x]+\lambda[(\sum x)^4$$

$$-27\sum x\prod x]-(4k+16\lambda)[\sum(yz)^2-\sum x\prod x]$$（由条件(2 − 2)）

$$=k[(\sum x)^2\sum yz-4\sum(yz)^2-5\sum x\prod x]$$

$$+\lambda[(\sum x)^4-16\sum(yz)^2-11\sum x\prod x] \tag{12}$$

$\geqslant 0$（由(4)，(5) 及 $k,\lambda\geqslant 0$）；

而当 $0>k\geqslant-5\lambda$ 时，如上，由(2-3)、(2-2) 可得(12) 式，再由(5) 式及 $\lambda\geqslant-\frac{1}{5}k>0$，得

$$F(x,y,z)\geqslant k[(\sum x)^2\sum yz-4\sum(yz)^2-5\sum x\prod x]$$

$$-\frac{1}{5}k[(\sum x)^4-16\sum(yz)^2-11\sum x\prod x]$$

$$=-\frac{1}{5}k[(\sum x)^4+4\sum(yz)^2+14\sum x\prod x$$

$$-5(\sum x)^2\sum yz]$$

$\geqslant 0$（在(6) 中令 $\lambda_0=\frac{1}{5}$ 即知），

故当 $k\geqslant-5\lambda$ 时定理成立. 当 $k<-5\lambda$ 时，若有

$$F(1,1,1)=3(9k+27\lambda+\mu+v)=0, \tag{2-4}$$

则由必要条件(2 − 1)（即 $\lambda\geqslant 0$），只要考虑 $k<-5\lambda=0$ 及 $k<-5\lambda<0$ 两种情况. 对于第一种情况，假设不等式(1) 对 $x,y,z>0$ 成立，则有

$$0\leqslant F(x,y,y)=\mu y^2(2x^2+y^2)-(\mu+9k)xy^2(2x+y)$$

$$+ky(2x+y)^3$$

$$=y(x-y)^2[\mu y+2k(2x+y)],$$

令 $y=tx,t>0,t\neq 1$，得

$$\mu t+2k(t+2)\geqslant 0,$$

再令 $t\to+0$，得 $k\geqslant 0$，与 $k<0$ 矛盾，可见(1) 成立的必要条件是

(3-1) 即 $\lambda > 0$，下面只要证明：当 $k < -5\lambda < 0$ 时，若有(2-4)，则(1) 成立的充要条件是(3-2)．事实上，若(1) 成立，则当 $x = ty, t > 0, t \neq 1$ 时，有

$$F(ty,y,y) = y^4[k(t+2)^2(2t+1) + \lambda(t+2)^4 + \mu(2t^2+1) - (9k+27\lambda+\mu)t(t+2)] = y^4 g(t)(t-1)^2 \geqslant 0,$$

其中 $g(t) = \lambda t^2 + 2(5\lambda + k)t + 16\lambda + 4k + \mu$

$$= \lambda\left(t + \frac{5\lambda + k}{\lambda}\right)^2 + \frac{\lambda\mu - (3\lambda+k)^2}{\lambda} \geqslant 0,$$

令 $t \to -\frac{5\lambda + k}{\lambda}(> 0)$，则由 $g(t) \geqslant 0$ 得

$$\lambda\mu \geqslant (3\lambda + k)^2 \tag{3-2$'$}$$

(由(2 − 4) 知上式右边 $= (\mu + v)^2/81$)．反之，若上式成立，则

$$F(x,y,z) \geqslant k[(\sum x)^2 \sum yz - 9\sum x \prod x] + \lambda[(\sum x)^4 - 27\sum x \prod x] + \frac{(3\lambda+k)^2}{\lambda}[\sum (yz)^2 - \sum x \prod x]$$

$$= \frac{k^2}{\lambda}[\lambda_0^2(\sum x)^4 + (3\lambda_0 - 1)^2 \sum (yz)^2 - (36\lambda_0^2 - 15\lambda_0 + 1)\sum x \prod x - \lambda_0(\sum x)^2 \sum yz] \text{(式中 } \lambda_0 = -\lambda/k)$$

$$\geqslant 0 \text{(由(6) 式)},$$

即(1) 式成立，可见当 $k < -5\lambda$ 时定理也成立． □

附注 当 $k < -5\lambda$ 时，若 $F(1,1,1) > 0$，则由上面的证明知，(3-1)，(3-2)$'$ 是(1) 成立的充分条件．

另外我们还有与上述定理等价的如下

推论 设 $F(x,y,z) = \alpha_1 \sum x^4 + \alpha_2 \sum x^3(y+z)$

$$+ \alpha_3 \sum (yz)^2 + \alpha_4 \sum x^2 yz \quad (\alpha_i \in R), \tag{13}$$

则当 $\alpha_1 + \alpha_2 \geqslant 0$ 时，(13) 对 $x, y, z > 0$ 成立的充要条件是

$$\begin{cases} F(1,0,0) = \alpha_1 \geqslant 0 & (14\text{-}1) \\ F(1,1,0) = 2\alpha_1 + 2\alpha_2 + \alpha_3 \geqslant 0 & (14\text{-}2) \\ F(1,1,1) = 3(\alpha_1 + 2\alpha_2 + \alpha_3 + \alpha_4) \geqslant 0, & (14\text{-}3) \end{cases}$$

而当 $\alpha_1+\alpha_2<0$ 时，若 $F(1,1,1)=0$，则(13)成立的充要条件是

$$\begin{cases}F(1,0,0)=\alpha_1>0, & (15\text{-}1)\\ \alpha_1(\alpha_1+\alpha_3)\geqslant\alpha_2^2. & (15\text{-}2)\end{cases}$$

事实上，由恒等式

$$\sum x^4=\left(\sum x\right)^4+2\sum(yz)^2+8\sum x\prod x-4\left(\sum x\right)^2\sum yz, \tag{16}$$

$$\sum x^3(y+z)=-2\sum(yz)^2-5\sum x\prod x+\left(\sum x\right)^2\sum yz, \tag{17}$$

$$\sum x^2yz=\sum x\prod x, \tag{18}$$

并比较(13)及(1)式可得

$\lambda=\alpha_1$,

$\mu=2\alpha_1-2\alpha_2+\alpha_3$,

$\nu=8\alpha_1-5\alpha_2+\alpha_4$,

$k=-4\alpha_1+\alpha_2$,

将它们代入定理中有关式子，经整理即可得到上述推论． □

略举数例说明上述定理的应用．

例1[3] 设 $x,y,z>0$，求证：

$$\sum x^4\overset{①}{\geqslant}\frac{1}{2}\sum x^3(y+z)\overset{②}{\geqslant}\sum(yz)^2$$
$$\overset{③}{\geqslant}\sum x\prod x\overset{④}{\geqslant}\sum x^3(y+z-x). \tag{19}$$

证明 由恒等式(16)～(18)可知①～④各等价于

$$2\left(\sum x\right)^4+6\sum(yz)^2+21\sum x\prod x-9\left(\sum x\right)^2\sum yz\geqslant0,$$

$$-4\sum(yz)^2-5\sum x\prod x+\left(\sum x\right)^2\sum yz\geqslant0,$$

$$\sum(yz)^2-\sum x\prod x\geqslant0,$$

$$\left(\sum x\right)^4+4\sum(yz)^2+14\sum x\prod x-5\left(\sum x\right)^2\sum yz\geqslant0,$$

以上各式中的系数均满足定理中的条件 $k\geqslant-5\lambda$，并且当 (x,y,z)

分别取(1,0,0),(1,1,0),(1,1,1)时不等式均成立,故据定理知(19)成立. □

例2[4] 在$\triangle ABC$中,求使下式成立的最大λ:

$$\sum \operatorname{ctg} A \geqslant \sqrt{\frac{\lambda R}{2r}+3-\lambda} \qquad (20)$$

解 由$\sum \operatorname{ctg} A=\sum \frac{2bc\cos A}{2bc\sin A}=\frac{\sum a^2}{4\Delta}$及$\frac{R}{2r}=\frac{\sum a\cdot\prod a}{16\Delta^2}$知(21)等价于关于三边$a,b,c$的不等式:

$$(\sum a^2)^2 \geqslant \lambda\sum a\cdot\prod a+(3-\lambda)\sum a\prod(b+c-a). \qquad (20')$$

作代换$a=y+z,b=z+x,c=x+y$,可得

$$\sum a=2\sum x,\ \sum a^2=2(\sum x)^2-2\sum yz,$$

$$\sum bc=(\sum x)^2+\sum yz,$$

$$\sum(bc)^2=(\sum x)^4+\sum(yz)^2+6\sum x\prod x-2(\sum x)^2\sum yz,$$

$$\prod a=\sum x\sum yz-\prod x,\ \prod(b+c-a)=8\prod x,$$

于是(20′)可化为关于$x,y,z>0$的不等式:

$$f(x,y,z)=4(\sum x)^4+4\sum(yz)^2$$

$$-(40-18\lambda)\sum x\prod x-(8+2\lambda)(\sum x)^2\sum yz\geqslant 0,$$

注意到$f(1,1,1)=0$,于是据定理知上式成立的充要条件是

$$\begin{cases}5\times 4-(8+2\lambda)\geqslant 0,\\ f(1,0,0)=4\geqslant 0,\\ f(1,1,0)=-4(8+2\lambda)+16\times 4+4\geqslant 0,\end{cases}$$

$$\text{或}\begin{cases}5\times 4-(8+2\lambda)<0,\\ 4\times 4\geqslant(3\times 4-8-2\lambda)^2,\end{cases}$$

即$\lambda\leqslant 9/2$,故使不等式(20)成立的最大$\lambda=9/2$. □

以上表明,关于正数x,y,z或三角形三边的齐四次对称不等式常可化为(1)的形式,并据定理给定的判断条件验证其是否成

立.这不仅在理论上而且在实际应用上都是很有意义的.

参考文献

[1] K.B.Stolarsky,Cubic triangle inequalities,Amer. Math. Monthly, 78(1971),879—881.

[2] 陈胜利,证明一类不等式的新方法——等量替换法,《福建中学数学》,1993年第3期,20—23.

[3] 匡继昌,《常用不等式》,湖南教育出版社,1993年第二版.

[4] 陈计,余切和下界的估计,《福建中学数学》,1994年第1期,12.

[5] P.J.Van Albada, Geometric inequalities and their geometry, Univ. Beograd. Publ. Elektrotehn. Fak.Ser. Mat.Fiz., No.338—352 (1971),41—45.

[6] O.Bottema and J.T.Groenman, On Some triangle inequalities, Univ. fiz., No.577—598 (1977), 11—20.

[7] J.F. Rigby, Quartic and sextic inequalities for the sides of triangles, and best possible inequalities, Univ. Beograd. Publ. Elektrotehn. Fak. Ser. Mat. Fiz., No.602—633(1978), 195—202.

Janous − Gmeiner 不等式的完善

福建福州市第二十四中学　杨学枝

本文将完全用初等的方法来研究 Janous − Gmeiner 不等式(下文(1) 式). 我们首先对此问题的提出和研究现状作一个简单介绍,然后再给出并证明问题的加强.

为叙述简便,本文将统一采用以下记号:在 $\triangle ABC$ 中,三边为 $BC=a,CA=b,AB=c$,其对应的中线分别为 m_a、m_b、m_c,R 与 r 分别为 $\triangle ABC$ 的外接圆半径与内切圆半径,应用记号 $\sum$ 表示对 x、y、z 轮换求和,如 $\sum x=x+y+z$,$\sum yz=yz+zx+xy$ 等.

(一) 问题的背景

1986 年,W. Janous 在文[1] 中提出了

命题 1　在 $\triangle ABC$ 中,有

$$\sum a\cdot\sum\frac{1}{m_a}>10. \tag{1}$$

1987 年,W. Gmeiner 和 W. Janous 在文[2] 中,应用中线对偶变换(见以下引理 1) 又提出了

命题 2　在 $\triangle ABC$ 中,有

$$\sum\frac{1}{a}\cdot\sum m_a>\frac{15}{2}. \tag{2}$$

由于直接证明(1) 式比较困难,此后,人们一直在探讨对(2) 的证明.

1988 年,W. Gmeiner 和 W. Janous 以及 1989 年单墫和刘亚强

分别用微积分知识独立地完成了对(2)的证明,可分别见文[3]及文[4].1991年,陈计在文[5]中,用初等方法证明了(2)式,同时在1992年,他又给出并证明了(2)的加强式,即

命题3 在$\triangle ABC$中,有

$$\sum \frac{1}{a} \cdot \sum m_a \geqslant \frac{15}{2} \sqrt{1 + \frac{4r}{25R}}, \tag{3}$$

当且仅当$\triangle ABC$为正三角形时,(3)式取等号.

1987年,W. Gmeiner和W. Janous在[3]中还同时对(2)式提出了一个推广,即

命题4 设P为$\triangle ABC$内一点,则

$$\sum \frac{1}{a} \cdot \sum PA > 5. \tag{4}$$

1991年3月,杨学枝加强了(4)式,得到

命题5[5-7] 在$\triangle ABC$中,$\max(A,B,C) = A$,P为此三角形所在平面内任意一点,那么

i)当$A \geqslant \frac{2\pi}{3}$时,有

$$\sum \frac{1}{a} \cdot \sum PA \geqslant 4 + \csc \frac{A}{2}; \tag{5}$$

ii)当$A < \frac{2\pi}{3}$时,有

$$\sum \frac{1}{a} \cdot \sum PA \geqslant \left(4 + \csc \frac{A}{2}\right) \cdot \sin\left(\frac{\pi}{6} + \frac{A}{2}\right)$$

$$> 4 + \frac{2}{\sqrt{3}}. \tag{6}$$

由以上介绍可知,对于(2)式的研究可以说已获得圆满解决,但对原问题,即对(1)式的研究和所得到的结果甚少.1991年,安振平在文[8]中给出了

命题7 在$\triangle ABC$中,有

$$\sum \frac{1}{m_a} \geqslant \frac{3\sqrt{3}}{s + \varepsilon}, \tag{7}$$

其中 $s=\frac{1}{2}\sum a,\varepsilon=\frac{1}{\sqrt{6}}\sum|b-c|$.

受(7)式的启发,1992年,石世昌又给了较(1)、(7)更强的式子,即

命题8[9] 在 $\triangle ABC$ 中,有

$$\sum\frac{1}{m_a}\geqslant\frac{3\sqrt{3}}{s+\delta},\tag{8}$$

其中 $s=\frac{1}{2}\sum a,\delta=\frac{3\sqrt{3}-5}{10}\sum|b-c|$.

命题9[12] 在 $\triangle ABC$ 中,有

$$\sum\frac{1}{m_a}\geqslant\frac{2\sqrt{3}}{M_k(a,b,c)},\tag{9}$$

其中 $k\geqslant\frac{\ln9-\ln4}{\ln25-\ln12}=1.10\cdots$.

(8)与(9)虽然加强了(1)式,但从形式上看,并不理想.

本文中,笔者证明了如下不等式[13]:

$$\begin{aligned}\sum a\cdot\sum\frac{1}{m_a}&\geqslant10\sqrt{1+\frac{4r}{25R}}\\&\geqslant10+(6\sqrt{3}-10)\frac{2r}{R},\end{aligned}\tag{10}$$

于是,便圆满解决了1986年 W. Janous 所提出的问题.

(二)问题的解决

以下几个引理在解决问题中都将起到作用,故先予提出.

引理1 (Klamkin 中线对偶定理)设 $\varphi(a,b,c,m_a,m_b,m_c)$ 是 $\triangle ABC$ 中关于边 a、b、c 对称的零次齐次函数,则

$\varphi(a,b,c,m_a,m_b,m_c)\geqslant k$(常数)

的充要条件是

$\varphi(\frac{2}{3}m_a,\frac{2}{3}m_b,\frac{2}{3}m_c,\frac{1}{2}a,\frac{1}{2}b,\frac{1}{2}c)\geqslant k$.

证明参见文[4].

引理 2　在 $\triangle ABC$ 中,有

$$\sum a\cdot\sum b^2c^2\geqslant 3abc\cdot\sum a^2,\tag{11}$$

当且仅当 $\triangle ABC$ 为正三角形时,(11) 式取等号.

证明　作变量代换:$x=-a+b+c, y=a-b+c, z=a+b-c$,则

$$\begin{aligned}
&\sum a\cdot\sum b^2c^2-3abc\cdot\sum a^2\\
=&\frac{1}{16}\Big[\sum x\cdot\sum(x+y)^2(x+z)^2\\
&-3(y+z)(z+x)(x+y)\cdot\Big(\sum x^2+\sum yz\Big)\Big]\\
=&\frac{1}{16}\Big[\sum x\cdot\sum x^4+3\sum x\cdot\Big(\sum yz\Big)^2+2\sum x\cdot\sum x^2\cdot\sum yz\\
&-3\Big(\sum x\cdot\sum yz-xyz\Big)\cdot\Big(\sum x^2+\sum yz\Big)\Big]\\
=&\frac{1}{16}\Big[\sum x^5-\sum y^2z^2(y+z)+xyz\cdot\sum yz\Big]\\
=&\frac{1}{16}\sum x(x^2-y^2)(x^2-z^2)\geqslant 0,
\end{aligned}$$

最后一步用了 Schur 不等式.　□

应用引理 1 的中线对偶变换于(11) 式,同时注意到恒等式:

$$4\sum m_a^2=3\sum a^2;\quad 16\sum m_b^2m_c^2=9\sum b^2c^2;$$

即得

引理 3　在 $\triangle ABC$ 中,有

$$\sum\frac{1}{m_bm_c}\geqslant\frac{4\sum a^2}{\sum b^2c^2},\tag{12}$$

当且仅当 $\triangle ABC$ 为正三角形时,(12) 式取等号.

引理 4　在 $\triangle ABC$ 中,有

$$\sum\frac{1}{a^2}\cdot\Big(\sum m_a\Big)^2\geqslant\frac{81}{4},\tag{13}$$

当且仅当 $\triangle ABC$ 为正三角形时,(13) 式取等号.

这是陈计与楼红卫在[14]中给出的不等式

$$\sum \frac{1}{a^2} \cdot \left(\sum PA\right)^2 \geqslant 9$$

在 $P = G$ 时的特例.

引理 5 在 $\triangle ABC$ 中,记 $x = \dfrac{R}{2r}$,则

$$\frac{\left(\sum a\right)^2 \cdot \sum a^2}{\sum b^2c^2} \geqslant 8 + \frac{4}{x+3}, \tag{14}$$

当且仅当 $\triangle ABC$ 为正三角形时,(14) 式取等号.

证明 记 $a+b+c = 6\sqrt{3}yr$,由文[11]可知有

$$\sum a^2 = 2(27y^2 - 8x - 1)r^2;$$

$$\sum b^2c^2 = [(27y^2)^2 - (16x-2) \cdot 27y^2 + (8x+1)^2]r^4;$$

$$32x - 5 \overset{①}{\leqslant} 27y^2 \overset{②}{\leqslant} 16x^2 + 8x + 3; \quad x \geqslant 1. \quad ③$$

在(14)式中作 $x - y$ 代换,并经化简得到

$$\frac{(8x-3) \cdot 27y^2 - (8x+1)^2}{(27y^2)^2 - (16x-2) \cdot 27y^2 + (8x+1)^2} \geqslant \frac{1}{2(x+3)}, \quad ④$$

因此,要证(14)式成立,只需证 ④ 式成立.

首先,利用 ① ~ ③ 式,我们不难证明

$$\begin{aligned}&\frac{(8x-3) \cdot 27y^2 - (8x+1)^2}{(27y^2)^2 - (16x-2) \cdot 27y^2 + (8x+1)^2} \\ \geqslant\ &\frac{(8x-3)u - (8x+1)^2}{u^2 - (16x-2)u + (8x+1)^2} \\ =\ &\frac{64x^3 - 24x^2 - 8x - 5}{8(16x^4 + 8x^2 + 2x + 1)}, \quad ⑤\end{aligned}$$

这里 $u = 16x^2 + 8x + 3$.

事实上,我们只需证明 ⑤ 式左端减去右端并经通分后所得式子中的分子不小于零即可.这时分子为

$$\begin{aligned}\delta = &[(8x-3) \cdot 27y^2 - (8x+1)^2][u^2 - (16x-2)u \\ &+ (8x+1)^2] - [(8x-3)u - (8x+1)^2][(27y^2)^2\end{aligned}$$

$$-(16x-2)\cdot 27y^2+(8x+1)^2]$$
$$=(u-27y^2)\{[(8x-3)u-(8x+1)^2]\cdot 27y^2$$
$$-(8x+1)^2(16x^2+2)\}.$$

由于$[(8x-3)u-(8x+1)^2]\cdot 27y^2-(8x+1)^2(16x^2+2)$

$\geqslant [(8x-3)(16x^2+8x+3)-(8x+1)^2](32x-5)$

$-(8x+1)^2(16x^2+2)$(据①式)

$=16(192x^4-152x^3-26x^2-17x+3)$

$=16(x-1)(192x^3+40x^2+14x-3)$

$\geqslant 0$(据③式),

又由②式知$u-27y^2\geqslant 0$,因此,以上$\delta\geqslant 0$,故知⑤式成立.

其次,再应用③式,易证

$$\frac{64x^3-24x^2-8x-5}{16x^4+8x^2+2x+1}\geqslant\frac{4}{x+3},$$

因此获得④式,故(14)式成立,从证明中易知,当且仅当$\triangle ABC$为正三角形时,(14)式取等号. □

下面,我们给出(1)式的加强式.

定理 在$\triangle ABC$中,有

$$\sum a\sum\frac{1}{m_a}\geqslant\sqrt{36+\frac{8(\sum a)^2\cdot\sum a^2}{\sum b^2c^2}},\tag{15}$$

当且仅当$\triangle ABC$为正三角形时,(15)式取等号.

证明 在(13)式中,应用引理1中中线对偶变换,可得到

$$(\sum a)^2\cdot\sum\frac{1}{m_a^2}\geqslant 36.$$

应用上式以及引理3中的(12)式,便有

$$\left[\sum a\cdot\sum\frac{1}{m_a}\right]^2$$
$$=(\sum a)^2\cdot\sum\frac{1}{m_a^2}+2(\sum a)^2\cdot\sum\frac{1}{m_bm_c}$$
$$\geqslant 36+\frac{8(\sum a)^2\cdot\sum a^2}{\sum b^2c^2},$$

由此即得(15)式,易知当且仅当 $\triangle ABC$ 为正三角形时,(15)式中取等号. $\square$

推论 1 在 $\triangle ABC$ 中,有

$$\sum a \cdot \sum \frac{1}{m_a} \geqslant 10\sqrt{1+\frac{16r}{25(R+6r)}}, \tag{16}$$

当且仅当 $\triangle ABC$ 为正三角形时,(16)式取等号.

(16)式易由(15)、(14)两式得到.

如果在(16)式中,再应用 $R \geqslant 2r$,可得

推论 2 在 $\triangle ABC$ 中,有

$$\sum a \sum \frac{1}{m_a} \geqslant 10\sqrt{1+\frac{4r}{25R}} \geqslant 10+(6\sqrt{3}-10)\frac{2r}{R}, \tag{17}$$

当且仅当 $\triangle ABC$ 为正三角形时,(17)式取等号.

参 考 文 献

[1] Walther Janous,Problem 1137*,Crux Math.,12(1986),79,177 (revised).

[2] Wolfgang Gmeiner,Walther Janous,Partial solution to problem 1137*,Crux Math.,13(1987),228 — 230.

[3] Wolfgang Gmeiner,Walther Janous,Solution(completed) to problem 1137*,Crux Math.,14(1988),79 — 83.

[4] 单墫,刘亚强,介绍一个几何不等式,《中等数学》,1989 年第 6 期,9 11.

[5] 杨学枝,Janous — Gmeiner 不等式的初等证明,《中等数学》,1992 年第 1 期.

[6] 杨学枝,Janous — Gmeiner 不等式的初等证明,《初等数学研究论文选》,上海教育出版社,1992 年,353 — 358.

[7] 杨学枝,一个几何不等式的初等证明,《中国初等数学研究文集》,河南

教育出版社，1992年，265－267.

[8] 安振平，几个三角形不等式的推广，《数学通讯》，1991年第8期，21－24.

[9] 石世昌，Janous不等式的加强，《数学通讯》，1993年第8期，26－28.

[10] 陈计，Janous不等式的一个加强，《福建中学数学》，1992年第6期，8－9.

[11] 杨学枝，一类三角不等式的统一证法，《数学竞赛》第19辑，湖南教育出版社，1994年，24－40.

[12] 陈计，Janous猜想的简单证明，《数学通讯》，1992年第9期，16－17.

[13] 陈胜利，征解问题61的注记(Ⅷ)，《数学通讯》，1995年第4期.

[14] 陈计，楼红卫，征解问题30，《数学通讯》，1989年第3期，43；1989年第11期，44；1992年第9期，39－41.

Janous－Gmeiner 不等式的加强

浙江新昌中学　　石世昌

1989 年，单墫和刘亚强[1] 指出如下的三角形不等式不成立：

$$\frac{1}{m_a}+\frac{1}{m_b}+\frac{1}{m_c}\geqslant\frac{3\sqrt{3}}{s}=\frac{2\sqrt{3}}{(a+b+c)/3},\tag{1}$$

其中 m_a、m_b、m_c 是边长为 a、b、c 的三角形的中线长，s 为其半周长.

若将分子 $3\sqrt{3}$ 改成较小的数 5，(1) 式就成为由 Janous[2] 在 1986 年提出的有名不等式：

$$\frac{1}{m_a}+\frac{1}{m_b}+\frac{1}{m_c}>\frac{5}{s}.\tag{2}$$

文[1]和[3]分别独立地用微积分知识证明了(2)式. 1991 年，陈计[4] 用初等方法给出了一个简捷的证明.

本文将(1)式右端的分母 $(a+b+c)/3$ 放大，建立如下的

定理　对三角形的三边长 a、b、c，定义幂平均 $M_k(a,b,c)=\left(\frac{a^k+b^k+c^k}{3}\right)^{1/k}$，则当

$$k\geqslant k_0=\frac{\ln 9-\ln 4}{\ln 25-\ln 12}=1.104855958\cdots\tag{3}$$

时，有
$$\frac{1}{m_a}+\frac{1}{m_b}+\frac{1}{m_c}\geqslant\frac{2\sqrt{3}}{M_k(a,b,c)},\tag{4}$$

等号当且仅当 $a=b=c$ 时成立，且 k_0 是最佳的.

值得预先一提的是，我们当 $k=k_0$ 时还将证明(4)要比(2)式强.

引理　令 $m_1=\frac{1}{2}\sqrt{(b+c)^2-a^2}$，

$m_2 = \frac{1}{2}\sqrt{\left(\frac{b+c}{2}\right)^2 + 2a^2}$，则当 $a \leqslant b \leqslant c$ 时，

(i) $\frac{1}{m_a} + \frac{1}{m_b} + \frac{1}{m_c} \geqslant \frac{1}{m_1} + \frac{2}{m_2}$；

(ii) $M_k(a,b,c) \geqslant M_k\left(a, \frac{b+c}{2}, \frac{b+c}{2}\right)$，$(k \geqslant k_0 > 1)$

等号当且仅当 $b = c$ 时成立.

证明 (i) 因为 $a \leqslant b \leqslant c$，所以由三角形中线长公式易得，$m_a \geqslant m_1 \geqslant m_b \geqslant m_2 \geqslant m_c$，且 $m_b \leqslant \frac{\sqrt{3}}{2}c$、$m_c \leqslant \frac{\sqrt{3}}{2}b$. 因此

$$\left(\frac{1}{m_a} + \frac{1}{m_b} + \frac{1}{m_c}\right) - \left(\frac{1}{m_1} + \frac{2}{m_2}\right)$$

$$= \frac{m_1^2 - m_a^2}{m_a m_1(m_a + m_1)} + \frac{m_2^2 - m_b^2}{m_b m_2(m_b + m_2)} + \frac{m_2^2 - m_c^2}{m_c m_2(m_c + m_2)}$$

$$\geqslant \left(\frac{m_2^2 - m_c^2}{m_c} - \frac{m_b^2 - m_2^2}{m_b} - \frac{m_a^2 - m_1^2}{m_a}\right) \Big/ m_2(m_b + m_2)$$

$$= \left[\frac{(m_2^2 - m_c^2)(m_b^2 - m_c^2)}{m_b m_c(m_b + m_c)} - \frac{m_b^2 + m_c^2 + 2m_2^2}{m_b} - \frac{m_a^2 - m_1^2}{m_a}\right] \Big/ m_2(m_b + m_2)$$

$$\geqslant \left[\frac{(m_2^2 - m_c^2)(m_b^2 - m_c^2)}{m_c(m_b + m_c)} - (m_b^2 + m_c^2 - 2m_2^2) - (m_a^2 - m_1^2)\right] \Big/ m_b m_2(m_b + m_2)$$

$$\geqslant \left\{\frac{3}{16}\left[\left(\frac{b+c}{2}\right)^2 + c^2 - 2b^2\right](c^2 - b^2) \Big/ \frac{3}{4}b(b+c) - \frac{3}{8}(c-b)^2\right\} \Big/ m_b m_2(m_b + m_2)$$

$$= (b + 5c)(c - b)^2 / 16 \cdot b m_b m_2 (m_b + m_2) \geqslant 0$$，故(i) 式成立.

(ii) 从已知不等式，$\left(\frac{b^k + c^k}{2}\right)^{1/k} \geqslant \frac{b+c}{2}$ 即 $b^k + c^k \geqslant 2\left(\frac{b+c}{2}\right)^k$，易得证明. □

定理的证明 由对称性，不妨设 $a \leqslant b \leqslant c$.

因为当 $k \geqslant k_0$ 时，已知 $M_k(a,b,c) \geqslant M_{k_0}(a,b,c)$，故由引理知，我们只要证明：

$$\frac{1}{m_1}+\frac{2}{m_2}\geqslant\frac{2\sqrt{3}}{M_{k_0}\left(a,\frac{b+c}{2},\frac{b+c}{2}\right)}. \tag{5}$$

又不妨令$\frac{b+c}{2}=1$及$a=x(0<x\leqslant 1)$，则(5)式等价于

$$f(x)=\left(\frac{2+x^{k_0}}{3}\right)^{1/k_0}\left(\frac{1}{\sqrt{4-x^2}}+\frac{2}{\sqrt{1+2x^2}}\right)-\sqrt{3}\geqslant 0, \tag{6}$$

求导得，

$$f'(x)=\frac{2x}{3(1+2x^2)^{3/2}}\left(\frac{2+x^{k_0}}{3}\right)^{\frac{1-k_0}{k_0}}$$
$$\left\{x^{k_0-2}\left[2\left(\frac{1+2x^2}{4-x^2}\right)^{\frac{3}{2}}+1\right]-\left[4-\left(\frac{1+2x^2}{4-x^2}\right)^{\frac{3}{2}}\right]\right\}, \tag{7}$$

作变换：$t=\left(\frac{1+2x^2}{4-x^2}\right)^{\frac{1}{2}}$，即$x=\left(\frac{4t^2-1)}{2+t^2}\right)^{\frac{1}{2}}(\frac{1}{2}<t\leqslant 1)$.

则(7)式右端大括号内的式子成为，

$$g(t)=\left(\frac{4t^2-1}{2+t^2}\right)^{\frac{1}{2}k_0-1}(2t^3+1)-(4-t^3). \tag{8}$$

$$令\ h(t)=\ln\left[\left(\frac{4t^2-1}{2+t^2}\right)^{\frac{1}{2}k_0-1}(2t^3+1)\right]-\ln(4-t^3), \tag{9}$$

求导得

$$h'(t)=9[2(2-k_0)t^6+12t^5+7(1+k_0)t^3-6t-4(2-k_0)]$$
$$/(4t^2-1)(2+t^2)(2t^3+1)(4-t^3), \tag{10}$$

$$再令\ \varphi(t)=2(2-k_0)t^6+12t^5+7(1+k_0)t^3-6t$$
$$-4(2-k_0), \tag{11}$$

求导得

$$\varphi'(t)=12(2-k_0)t^5+60t^4+21(1+k_0)t^2-6. \tag{12}$$

显然，$\varphi'(t)>\varphi'(\frac{1}{2})>0$. 由于$\varphi(\frac{1}{2})<0,\varphi(1)>0$，所以$\varphi(t)$在$(\frac{1}{2},1)$内有唯一零点，记作$t_0$，即当$\frac{1}{2}<t<t_0$时，$\varphi(t)<0$；当

$t_0 < t < 1$ 时,$\varphi(t) > 0$. 也即,当 $\frac{1}{2} < t < t_0$ 时 $h'(x) < 0$,当 $t_0 < t < 1$ 时 $h'(x) > 0$.

又由于 $\lim\limits_{t\to 0^+} h(t) = +\infty$(因为 $\frac{1}{2}k_0 - 1 < 0$),$h(1) = 0$,所以 $h(t)$ 在 $(\frac{1}{2},1)$ 内有唯一零点 t_1,满足 $\frac{1}{2} < t_1 < t_0$. 即当 $\frac{1}{2} < t < t_1$ 时 $h(t) > 0$,当 $t_1 < t < 1$ 时 $h(t) < 0$. 也即当 $\frac{1}{2} < t < t_1$ 时 $g(t) > 0$,当 $t_1 < t < 1$ 时 $g(t) < 0$.

再因为 x 关于 t 的函数 $x = \left(\frac{4t^2 - 1}{2 + t^2}\right)^{\frac{1}{2}}$ 在 $(\frac{1}{2},1)$ 内单调增加,所以 $x_0 = \left(\frac{4t_1^2 - 1}{2 + t_1^2}\right)^{\frac{1}{2}} \in (0,1)$,并当 $0 < x < x_0$ 时 $f'(x) > 0$,当 $x_0 < x < 1$ 时 $f'(x) < 0$,即 $x = x_0$ 是 $f(x)$ 在 $(0,1)$ 内的唯一(极大)驻点,$f(x)$ 的最小值在区间 $(0,1]$ 的两端达到. 但由 k_0 的定义易算得 $\lim\limits_{t\to 0^+} f(x) = 0$,又显然 $f(1) = 0$,因此,当 $0 < x \leqslant 1$ 时,恒有 $f(x) \geqslant 0$. 故(4)式成立.

又特别地令 $a = 0, b = c = 1$,这时 $m_a = 1, m_b = m_c = \frac{1}{2}$. 则(4)式成为:

$$5 \geqslant \frac{2\sqrt{3}}{\left(\frac{2}{3}\right)^k},\text{即 } k \geqslant \frac{2(\ln 3 - \ln 2)}{2\ln 5 - 2\ln 2 - \ln 3} = k_0,$$

因此,k_0 是不可改进的. □

最后,我们证明当 $k = k_0$ 时,(4)比(2)式要强.

为此,引进三个正数,$\lambda = \frac{1}{2}(b + c - a)$,$\mu = \frac{1}{2}(c + a - b)$,$v = \frac{1}{2}(a + b - c)$,并设 $\lambda \geqslant \mu \geqslant v$.

因为 $\lambda + \mu < \lambda + \mu + v$,$(\mu + v) + (\lambda + \mu) = \mu + (\lambda + \mu + v)$ 且 $k_0 > 1$,所以[5]

$$(\mu+v)^{k_0}+(\lambda+\mu)^{k_0}<\mu^{k_0}+(\lambda+\mu+v)^{k_0}. \tag{13}$$

同理可得，

$$\mu^{k_0}+(\lambda+v)^{k_0}<(\lambda+\mu+v)^{k_0}. \tag{14}$$

由(13)、(14)两式即得，$a^{k_0}+b^{k_0}+c^{k_0}=(\mu+v)^{k_0}+(v+\lambda)^{k_0}+(\lambda+\mu)^{k_0}<2(\lambda+\mu+v)^{k_0}=2\cdot s^{k_0}$，因此，

$$M_{k_0}(a,b,c)<(\frac{2}{3})_{\frac{1}{k_0}}\cdot s. \tag{15}$$

注意到$(\frac{2}{3})^{\frac{1}{k_0}}=\frac{2\sqrt{3}}{5}$，就得

$$\frac{2\sqrt{3}}{M_{k_0}(a,b,c)}>\frac{5}{s}. \tag{16}$$

从(16)式即知，当$k=k_0$时，(4)比(2)式更强.

参考文献

[1] 单墫，刘亚强，介绍一个几何不等式，《中等数学》，1989年第6期，9－11.

[2] Walther Janous, Problem 1137*, Crux Math., 12(1986), 79, 177 (revised).

[3] Wolfgan Gmeiner, Walther Janous, Solution(completed)to problem 1137*, Crux Math., 14(1988), 79－83.

[4] 陈计，Janous不等式的初等证明，《数学通讯》，1991年第11期，11－14.

[5] 陈计，Guggenheimer不等式的指数推广，《数学通讯》，1989年第12期，3.

[6] 石世昌，Janous不等式的加强，《数学通讯》，1993年第8期，26－28.

三角形内角平分线的不等式

华东交通大学土木系　刘　健

近年来，有不少文献[1－5]讨论了有关三角形内角平分线的不等式，其中有的结论较为深刻，证明十分精彩．本文给出笔者最近发现的一些角平分线不等式，并提出若干猜想.

在本文中，我们恒用 a,b,c 表示 $\triangle ABC$ 的三边，以 s,r,R,Δ 分别表示 $\triangle ABC$ 的半周、内切圆半径、外接圆半径和面积，$\angle A$，$\angle B$，$\angle C$ 的内角平分线分别设为 w_a,w_b,w_c. 未作特别说明时，$\triangle ABC$ 均指任意三角形，另外，为简便起见，文中省略所有不等式等号成立条件的确定过程.

1966 年，V. O. Gordon 给出了三角形内角平分线与面积之间的以下不等式（见[6]）：

$$w_a^2+w_b^2+w_c^2\geqslant 3\sqrt{3}\Delta. \tag{1}$$

这一不等式较弱，事实上我们有下述更强的结论：

定理 1　在 $\triangle ABC$ 中有

$$w_bw_c+w_cw_a+w_aw_b\geqslant 3\sqrt{3}\Delta, \tag{2}$$

等号当且仅当 $\triangle ABC$ 为正三角形时成立.

笔者在作本文初稿（1994 年 5 月）时，猜测成立着不等式(2). 陈计先生 7 月初来信告知：王振在 1993 年 9 月已经证出了(2)式，其后 不久，笔者利用下面的引理 1 与引理 2 也完成了不等式的证明.

引理 1　$\dfrac{s-a}{aw_a}+\dfrac{s-b}{bw_b}+\dfrac{s-c}{cw_c}\leqslant\dfrac{1}{2r}.\qquad\{E\}\qquad(3)$

证明 利用 $s-a=r\operatorname{ctg}\frac{A}{2}$, $abc=4Rrs$, $w_a=\frac{2bc}{b+c}\cos\frac{A}{2}$，易证

$$\frac{s-a}{w_a}=\frac{b+c}{2s}\cos\frac{A}{2}, \tag{4}$$

于是注意到 $\sin\frac{A}{2}\leqslant\frac{a}{b+c}$ 便知

$$\sum\frac{s-a}{aw_a}=\frac{1}{2s}\sum\frac{b+c}{a}\cos\frac{A}{2}\leqslant\frac{1}{2s}\sum\operatorname{ctg}\frac{A}{2}=\frac{1}{2r}.$$

不等式(3) 得证. □

注 符号{E}表示其前面的不等式的等号仅当 $\triangle ABC$ 为正三角形时成立，以下同此.

引理 2[7] 设 x,y,z 为任意正数，则在 $\triangle ABC$ 中有

$$\frac{s-a}{x}+\frac{s-b}{y}+\frac{s-c}{z}\geqslant\frac{(xa+yb+zc)s}{yza+zxb+xyc}, \tag{5}$$

等号当且仅当 $x=y=z$ 时成立.

加权的三角形不等式(5) 是一个很有用的结果，后面将多次用到它.

定理 1 的证明 首先，在不等式(5) 中取 $x=aw_a$, $y=bw_b$, $z=cw_c$，根据引理 1 知

$$\frac{1}{2r}\geqslant\frac{s\sum a^2w_a}{abc\sum w_bw_c},$$

利用 $abc=4Rrs$ 得

$$2R\sum w_bw_c\geqslant\sum a^2w_a. \tag{6}$$

其次按 Cauchy 不等式有

$$\sum a^2w_a=w_aw_bw_c\sum\frac{a^2}{w_bw_c}\geqslant\frac{4w_aw_bw_cs^2}{\sum w_bw_c},$$

据此及(6) 便知

$$R\left(\sum w_bw_c\right)^2\geqslant 2w_aw_bw_cs^2,$$

再利用 $abc=4\Delta R$ 与等式：

$$w_a w_b w_c = \frac{8abcs\triangle}{(b+c)(c+a)(a+b)}, \tag{7}$$

就得 $$(\sum w_b w_c)^2 \geqslant \frac{64s^3}{(b+c)(c+a)(a+b)}\triangle^2. \tag{8}$$

又由算术 —— 几何平均不等式易见

$$(b+c)(c+a)(a+b) \leqslant \frac{(4s)^3}{27},$$

因此按(8)知 $$(\sum w_b w_c)^2 \geqslant 27\triangle^2,$$

两边开平方即得不等式(2). □

由于 $\sum w_a^2 \geqslant \sum w_b w_c$,所以不等式(2)要强于不等式(1).

接下来,我们给出和式 $\sum w_b w_c$ 与 R,r 之间的一个不等式链.

定理 2 在 $\triangle ABC$ 中有

$$\frac{16}{9}(4R+r)r < w_b w_c + w_c w_a + w_a w_b \leqslant 3(4R+r)r, \tag{9}$$

其中等号当且仅当 $\triangle ABC$ 为正三角形时成立.[第二个不等式在1993年4月已为王振得到 —— 编者注]

证明 先证(9)的左半不等式,由等式(7)及杨学枝[3]不等式:

$$\frac{1}{w_a} + \frac{1}{w_b} + \frac{1}{w_c} \geqslant \frac{1}{R} + \frac{1}{2r}, \tag{10}$$

得 $$\sum w_b w_c \geqslant \left(\frac{1}{R} + \frac{1}{2r}\right)\frac{8abcs\triangle}{(b+c)(c+a)(a+b)},$$

利用 $\triangle = rs$ 与 $abc = 4Rrs$ 及恒等式

$$(b+c)(c+a)(a+b) = 2s(s^2 + 2Rr + r^2), \tag{11}$$

进而得 $$\sum w_b w_c \geqslant \frac{8(R+2r)rs^2}{s^2 + 2Rr + r^2}. \tag{12}$$

由此可见,欲证(9)的左半不等式只需证

$$\frac{(R+2r)s^2}{s^2 + 2Rr + r^2} \geqslant \frac{2}{9}(4R+r),$$

整理即得 $$(R+16r)s^2 > 2(4R+r)(2R+r)r. \tag{13}$$

再据 Gerretsen 不等式(见[6]) $s^2 \geqslant 16Rr - 5r^2$ 知,要证(13)只需证:

$$(R+16r)(16R-5r)>2(4R+r)(2R+r),$$

即 $$239Rr-82r^2>0,$$

由 Euler 不等式 $R\geqslant 2r$ 知上式成立，从而(9)的左半不等式获证.

再证(9)的右半不等式，注意到以下代数不等式（参见[8－9]）：

$$[x(v+w)+y(w+u)+z(u+v)]^2$$
$$\geqslant 4(yz+zx+xy)(vw+wu+uv), \tag{14}$$

其中 x,y,z,u,v,w 均为正数.

现于(14)中取 $x=w_a,y=w_b,z=w_c,u=\frac{1}{a},v=\frac{1}{b},w=\frac{1}{c}$，利用 $\sum\frac{1}{bc}=\frac{1}{2Rr}$ 与 $w_a=\frac{2bc}{b+c}\cos\frac{A}{2}$ 等，得

$$\left(\sum 2\cos\frac{A}{2}\right)^2\geqslant\frac{2}{Rr}\sum w_bw_c. \tag{15}$$

另利用恒等式： $$\sum\cos^2\frac{A}{2}=2+\frac{r}{2R}, \tag{16}$$

易证 $$\left(\sum\cos\frac{A}{2}\right)^2\leqslant 3\left(2+\frac{r}{2R}\right),$$

于是 $$\sum w_bw_c\leqslant 6Rr\left(2+\frac{r}{2R}\right)=3(4R+r)r,$$

即(9)的右半不等式得证. □

根据Colombier——Doucet的不等式 $s^2\geqslant 3(4R+r)r$（见[6]）知，(9)的右半不等式加强了众所周知的不等式：$\sum w_bw_c\leqslant s^2$. 另外，已经知道(9)的左半不等式中的系数 $\frac{16}{9}$ 是最佳值，不能再改进.

推论 2.1 $$\frac{1}{w_bw_c}+\frac{1}{w_cw_a}+\frac{1}{w_aw_b}\geqslant\frac{1}{3R^2}+\frac{1}{2Rr}. \quad \{E\} \tag{17}$$

证明 由不等式链(9)的右半不等式容易推得

$$\sum\frac{1}{w_bw_c}\geqslant\frac{3}{(4R+r)r}. \tag{18}$$

而 $$\frac{3}{(4R+r)r}-\left(\frac{1}{3R^2}+\frac{1}{2Rr}\right)=\frac{(6R+r)(R-2r)}{6R^2(4R+r)r}\geqslant 0,$$
因此不等式(17)成立.

推论 2.2 $$\frac{a(s-a)}{w_b w_c}+\frac{b(s-b)}{w_c w_a}+\frac{c(s-c)}{w_a w_b}\geqslant 2. \quad \{E\} \qquad (19)$$

证明 不妨设 $a\geqslant b\geqslant c$,则易证 $a(s-a)\leqslant b(s-b)\leqslant c(s-c)$,又注意到 $\frac{1}{w_b w_c}\leqslant\frac{1}{w_c w_a}\leqslant\frac{1}{w_a w_b}$. 根据切比雪夫不等式得

$$\sum\frac{a(s-a)}{w_b w_c}\geqslant\frac{1}{3}\sum a(s-a)\sum\frac{1}{w_b w_c}. \qquad (20)$$

利用 $\triangle ABC$ 中的恒等式

$$\sum bc=s^2+4Rr+r^2, \qquad (21)$$

$$\sum a^2=2(s^2-4Rr-r^2), \qquad (22)$$

易证 $$\sum a(s-a)=2(4R+r)r. \qquad (23)$$

于是根据(20)、(23)与(18)就知(19)成立. □

顺便指出,根据不等式(2)与不等式(14)还易将定理1的不等式推广到两个三角形中,即可得到以下不等式

$$w_a(w_b'+w_c')+w_b(w_c'+w_a')+w_c(w_a'+w_b')\geqslant 6\sqrt{3\Delta\Delta'}, \qquad (24)$$

其中 w_a',w_b',w_c',Δ' 是 $\triangle A'B'C'$ 相应于 $\triangle ABC$ 的几何元素.

现在,我们对锐角三角形提出类似于(9)的一个猜想.

猜想 设 $\triangle ABC$ 为锐角三角形,则

$$(w_a+w_b+w_c)^2\geqslant 9(4R+r)r. \quad \{E\} \qquad (25)$$

下面再给出和式 $\sum\frac{1}{w_a^2}$ 与 R,r 之间的一个不等式链.

定理 3 在 $\triangle ABC$ 中有

$$\frac{1}{3R^2}+\frac{1}{4r^2}\leqslant\frac{1}{w_a^2}+\frac{1}{w_b^2}+\frac{1}{w_c^2}\leqslant\frac{1}{4r^2}+\frac{1}{6Rr}, \qquad (26)$$

等号均当且仅当 $\triangle ABC$ 为正三角形时成立.

证明 根据公式 $w_a=2\Delta\Big/a\cos\frac{B-C}{2}$ 易得:

$$8\Delta^2\sum\frac{1}{w_a^2}=\sum a^2+\sum a^2\cos(B-C). \tag{27}$$

注意到 $a\cos(B-C)=b\cos B+c\cos C$，又知

$$\begin{aligned}\sum a^2\cos(B-C)&=\sum a(b\cos B+c\cos C)\\&=\sum bc(\cos B+\cos C)\\&=\sum bc\sum\cos A-\sum bc\cos A\\&=\sum bc\cos A-\sum\frac{1}{2}(b^2+c^2-a^2)\\&=\sum bc\sum\cos A-\frac{1}{2}\sum a^2,\end{aligned}$$

于是由(27)得

$$\sum\frac{1}{w_a^2}=\frac{1}{8\Delta^2}\left(\sum bc\sum\cos A+\frac{1}{2}\sum a^2\right). \tag{28}$$

再将 $\Delta=rs$ 与 $\sum\cos A=1+\frac{r}{R}$ 以及(21)、(22)代入(28)中，整理得

$$\sum\frac{1}{w_a^2}=\frac{1}{4r^2}+\frac{1}{8Rr}+\frac{4R+r}{8Rs^2}. \tag{29}$$

由上式可见，欲证(26)的左半不等式只需证

$$\frac{1}{8r}+\frac{4R+r}{8s^2}\geqslant\frac{1}{3R},$$

按 Euler 不等式 $R\geqslant 2r$ 与 Gerretsen 不等式[6]：$s^2\leqslant 4R^2+4Rr+3r^2$，又知，要证上式只需证

$$\frac{1}{4R}+\frac{4R+r}{8(4R^2+4Rr+3r^2)}\geqslant\frac{1}{3R},$$

整理即得 $(R-2r)(4R+3r)\geqslant 0$，

这显然成立，故(26)的左半不等式获证.

由等式(28)还可知，要证(26)的右半不等式只需证

$$\frac{1}{8r}+\frac{4R+r}{s^2}\leqslant\frac{1}{6r},$$

整理即得前面已提及的不等式 $s^2\geqslant 3(4R+r)r$，故(26)的右半不等式得证. □

推论 3.1 $a^2\cos(B-C)+b^2\cos(C-A)+c^2\cos(A-B)$

$$\leqslant bc+ca+ab. \quad \{E\} \tag{30}$$

证明 根据(26)的右半不等式与 $R\geqslant 2r$ 知

$$\frac{1}{w_a^2}+\frac{1}{w_b^2}+\frac{1}{w_c^2}\leqslant\frac{1}{3r^2}. \tag{31}$$

于是由恒等式(27)得

$$\sum a^2\cos(B-C)\leqslant\frac{8}{3}s^2-\sum a^2=\frac{1}{3}(4\sum bc-\sum a^2),$$

再利用 $\sum a^2\geqslant\sum bc$，便知 $\sum a^2\cos(B-C)\leqslant\sum bc$，即不等式(30)成立. □

参考文献

[1] 王振，陈计，三角形角平分线的平方和，《中学教研》(数学版)，1993年第1期，34－35.

[2] 石世昌，赵德钧，陈计，杜庆坤，征解问题79，《数学通讯》，1991年第11期，40；1993年第12期，35－38.

[3] 杨学枝，关于角平分线的几个不等式，《数学通讯》，1994年第5期，24－26.

[4] 刘健，一些新的三角形不等式，《中学数学》(苏州)，1994年第5期，9－12.

[5] 王振，陈计，两个猜想不等式的加强及其它，《中学教研》(数学版)，1994年第7－8期，51－53.

[6] O. Bottema 等著，单墫译，《几何不等式》，北京大学出版社，1991年.

[7] 刘健，涉及三角形边长的又一不等式及其应用，《中学数学》(苏州)，1992年第11期，11－14.

[8] 陈计，何明秋，涉及两个三角形的不等式，《数学通讯》，1988年第1期，3－4.

[9] 陈计，关于Gerber不等式的加强，《福建中学数学》，1992年第5期，8－9.

三角形和点的一个不等式

江西永修县第一中学　宋　庆

本文给出关于三角形和点的一个十分有意义的加权不等式，并揭示它和一些已知不等式的紧密关系.

引理 1[1]　设 α、β、γ 中至少有两个正数，且 $\beta\gamma+\gamma\alpha+\alpha\beta>0$，则对任意实数 x,y,z 有

$$(\alpha x+\beta y+\gamma z)^2 \geqslant (\beta\gamma+\gamma\alpha+\alpha\beta)(2yz+2zx+2xy-x^2-y^2-z^2), \tag{1}$$

等号当且仅当 $\frac{x}{\beta+\gamma}=\frac{y}{\gamma+\alpha}=\frac{z}{\alpha+\beta}$ 时成立.

引理 2[2]　设 a、b、c 为 $\triangle ABC$ 的三边，则对 $\triangle ABC$ 所在平面上任一点 P 有

$$\frac{PB\cdot PC}{bc}+\frac{PC\cdot PA}{ca}+\frac{PA\cdot PB}{ab}\geqslant 1, \tag{2}$$

等号当且仅当 P 为锐角 $\triangle ABC$ 的垂心时或 P 为 $\triangle ABC$ 的一个顶点时成立.

定理　设 a、b、c 为 $\triangle ABC$ 的三边，则对任意实数 x、y、z 及 $\triangle ABC$ 所在平面上任一点 P 有

$$\left(\frac{x}{a}PA+\frac{y}{b}PB+\frac{z}{c}PC\right)^2\geqslant 2yz+2zx+2xy-x^2-y^2-z^2, \tag{3}$$

等号当且仅当 $\frac{x}{a^2}=\frac{y}{b^2}=\frac{z}{c^2}$ 且 P 为锐角 $\triangle ABC$ 的垂心时，或 $\frac{x}{a^2}=\frac{y}{b^2}=\frac{z}{a^2+b^2}$ 且 $P=C$ 时成立.

证明　不妨设(3) 式右端 $\geqslant 0$(不然，不等式(3) 显然成立).

在(1)中取$\alpha=\frac{PA}{a},\beta=\frac{PB}{b},\gamma=\frac{PC}{c}$,再利用(2)式,即得不等式(3)(等号成立条件的确定过程从略). □

注 当x、y、z非负时,(3)式对空间任一点P都成立.

以下我们约定:a、b、c、s与Δ分别表示$\triangle ABC$的三边、半周长及面积;对$\triangle A'B'C'$用类似的记号.

在(3)式中,取$x=a',y=b',z=c'$,立得

推论 1[3] 对$\triangle ABC$、$\triangle A'B'C'$及任一点P有

$$\frac{a'}{a}PA+\frac{b'}{b}PB+\frac{c'}{c}PC \geqslant \sqrt{2b'c'+2c'a'+2a'b'-a'^2-b'^2-c'^2}, \tag{4}$$

等号当且仅当$\frac{a'}{a^2}=\frac{b'}{b^2}=\frac{c'}{c^2}$且$P$为锐角$\triangle ABC$的垂心时,或$\frac{a'}{a^2}=\frac{b'}{b^2}=\frac{c'}{a^2+b^2}$且$P=C$时成立.

在(3)式中,取$x=a'^2,y=b'^2,z=c'^2$,且注意到海伦公式,得

推论 2[3] 对$\triangle ABC$、$\triangle A'B'C'$及任一点P有

$$\frac{a'^2}{a}PA+\frac{b'^2}{b}PB+\frac{c'^2}{c}PC \geqslant 4\Delta', \tag{5}$$

等号当且仅当$\frac{a'}{a}=\frac{b'}{b}=\frac{c'}{c}$且$P$为锐角$\triangle ABC$的垂心时,或$\frac{a'}{a}=\frac{b'}{b}=\frac{c'}{\sqrt{a^2+b^2}}$且$P=C$时成立.

(5)式推广了 Steensholt 不等式[4]

$$aPA+bPB+cPC \geqslant 4\Delta. \tag{6}$$

在(3)式中,用$y+z$、$z+x$、$x+y$分别替换x、y、z,可得

推论 3 对任意实数x、y、z及$\triangle ABC$所在平面上任一点P有

$$\left(\frac{y+z}{a}PA+\frac{z+x}{b}PB+\frac{x+y}{c}PC\right)^2 \geqslant 4(yz+zx+xy), \tag{7}$$

等号当且仅当$\frac{y+z}{a^2}=\frac{z+x}{b^2}=\frac{x+y}{c^2}$且$P$为锐角$\triangle ABC$的垂

心时，或$\frac{y+z}{a^2}=\frac{z+x}{b^2}=\frac{x+y}{a^2+b^2}$且 $P=C$ 时成立.

注 当 x、y、z 中任两数之和非负时，(7) 式对空间任一点 P 都成立.

(7) 式推广了刘健新近给出的不等式[3]

$$\frac{b+c}{a}PA+\frac{c+a}{b}PB+\frac{a+b}{c}PC\geqslant 2\sqrt{bc+ca+ab}. \quad (8)$$

在(7) 式中，取 $x=bc, y=ca, z=ab$，可得

推论 4 对 $\triangle ABC$ 及任一点 P 有

$$(b+c)PA+(c+a)PB+(a+b)PC \geqslant 2\sqrt{abc(a+b+c)}, \quad (9)$$

等号当且仅当 P 为正 $\triangle ABC$ 的中心时成立.

(9) 式加强了 Tsintsifas 不等式[2]

$$(b+c)PA+(c+a)PB+(a+b)PC\geqslant 8\Delta. \quad (10)$$

在(7) 式中，取 $x=\frac{bc}{a}, y=\frac{ca}{b}, z=\frac{ab}{c}$，可得

推论 5 对 $\triangle ABC$ 及任一点 P 有

$$\left(\frac{c}{b}+\frac{b}{c}\right)PA+\left(\frac{a}{c}+\frac{c}{a}\right)PB+\left(\frac{b}{a}+\frac{a}{b}\right)PC \geqslant 2\sqrt{a^2+b^2+c^2}, \quad (11)$$

等号当且仅当 P 为正 $\triangle ABC$ 的中心时成立.

结合 Băndilă 不等式[5]

$$\frac{R}{r}\geqslant\frac{c}{b}+\frac{b}{c}, \quad (12)$$

由(11) 式可得较弱但要简明的不等式

$$PA+PB+PC\geqslant\frac{2r}{R}\sqrt{a^2+b^2+c^2}, \quad (13)$$

其中 R 与 r 分别为 $\triangle ABC$ 的外接圆与内切圆半径.

在(7) 中，取 $x=(s'-b')(s'-c'), y=(s'-c')(s'-a')$，$z=(s'-a')(s'-b')$，且注意到海伦公式，可得

推论 6 对 $\triangle ABC$、$\triangle A'B'C'$ 及任一点 P 有

$$\frac{a'(s'-a')}{a}PA+\frac{b'(s'-b')}{b}PB+\frac{c'(s'-c')}{c}PC\geqslant 2\Delta', \quad (14)$$

等号当且仅当$\frac{s'-a'}{a^2b'c'}=\frac{s'-b'}{b^2c'a'}=\frac{s'-c'}{c^2a'b'}$且$P$为锐角$\triangle ABC$的垂心时成立.

(14) 式推广了 Janous 不等式[2]

$$(s-a)PA+(s-b)PB+(s-c)PC\geqslant 2\Delta \quad (15)$$

和 Finsler—Hadwiger 不等式[4]

$$a'^2+b'^2+c'^2\geqslant 4\sqrt{3}\Delta'+(b'-c')^2+(c'-a')^2+(a'-b')^2. \quad (16)$$

在(7) 中取$x=\frac{P'A'}{a'}, y=\frac{P'B'}{b'}, z=\frac{P'C'}{c'}$,再利用(2) 式,得

推论 7 对$\triangle ABC$所在平面上任一点P及$\triangle A'B'C'$所在平面上任一点P'有

$$\frac{PA}{a}\left(\frac{P'B'}{b'}+\frac{P'C'}{c'}\right)+\frac{PB}{b}\left(\frac{P'C'}{c'}+\frac{P'A'}{a'}\right)+\frac{PC}{c}\left(\frac{P'A'}{a'}+\frac{P'B'}{b'}\right)\geqslant 2, \quad (17)$$

等号当且仅当$\triangle ABC$与$\triangle A'B'C'$为相似的锐角三角形且P与P'分别为它们的垂心时或$ab'=a'b$且$P=C$及$P'=C'$时成立.

(17) 式推广了林鹤一不等式(2).

在(14) 中,取P'为$\triangle A'B'C'$的外心,可得

推论 8 对$\triangle ABC$、$\triangle A'B'C'$及任一点P有

$$\frac{a'(b'+c')}{a}PA+\frac{b'(c'+a')}{b}PB+\frac{c'(a'+b')}{c}PC\geqslant 8\Delta', \quad (18)$$

等号当且仅当$\triangle ABC$与$\triangle A'B'C'$均为正三角形且P为$\triangle ABC$的中心时成立.

(18) 式推广了 Tsintsifas 不等式(10) 和不等式[4]

$$b'c'+c'a'+a'b'\geqslant 4\sqrt{3}\Delta'. \quad (19)$$

注记 对比(6) 式与不等式[6]

$$(aPA+bPB+cPC)^2 \geqslant (PB\cdot PC+PC\cdot PA+PA\cdot PB)(2bc+2ca+2ab-a^2-b^2-c^2), \quad (20)$$

猜想

$$(PB\cdot PC+PC\cdot PA+PA\cdot PB)(2bc+2ca+2ab-a^2-b^2-c^2) \geqslant 16\varDelta^2. \quad (21)$$

如若(21)式成立,那么陈计[7]1992年建立的不等式

$$r_2r_3+r_3r_1+r_1r_2 \leqslant \frac{4\varDelta^2}{2bc+2ca+2ab-a^2-b^2-c^2} \quad (22)$$

便加强了Child不等式[4]

$$4(r_2r_3+r_3r_1+r_1r_2) \leqslant PB\cdot PC+PC\cdot PA+PA\cdot PB, \quad (23)$$

其中r_1、r_2、r_3分别为$\triangle ABC$内任一点P到三边的距离.

参考文献

[1] 杨克昌,一类不等式的统一证明与推广,《湖南数学通讯》,1987年第4期,38—40.

[2] D.S.Mitrinović 等著,陈计等译,《几何不等式的新进展》,北京大学出版社,1995年.

[3] 刘健,Bottema不等式的推广及应用,《福建中学数学》,1994年第1期,8－10.

[4] O.Bottema等著,单墫译,《几何不等式》,北京大学出版社,1991年.

[5] V.Băndilă,Problem C:474,Gaz.Mat.,(Bucharest),90(1985),65.

[6] 刘健,三个新的三角形不等式,《教学月刊》(中学理科版),1993年第8期,14.

[7] 陈计,关于Gerber不等式的加强,《福建中学数学》,1992年第5期,8－9.

[8] 陈计,Guggenheimer不等式的指数推广,《数学通讯》,1989年第12期,3.

Zirakzadeh 不等式的推广

汕头大学数学所　王　振
宁波大学数学系　陈　计

(一) 引　　言

1960 年，Zirakzadeh[1] 用纯粹 Euclid 几何的方法证明了下面的

命题　设 P,Q,R 分别位于 $\triangle ABC$ 的边 BC,CA,AB 上，且将三角形的周界三等分，则

$$QR+RP+PQ\geqslant(a+b+c)/2; \tag{1}$$

可是他的证法十分复杂. 1986 年，陶衎颀与张景中用多点例证法处理过这个不等式(参见[2-3])，并于 1987 年用计算机给出一个证明(见[4]). 1991 年，杨学枝[5] 发表了不等式(1) 的一个简证.

1989 年 2 月，陈计与高海明[6] 提出了(1) 的一个推广方向：当 $k\geqslant 1$ 时，

$$QR^k+RP^k+PQ^k\geqslant 2^{-k}(a^k+b^k+c^k), \tag{2}$$

并且证明了 $k=2$ 的情形.

1989 年 7 月，陈计证明了下面的不等式：设 $a\geqslant b\geqslant c$，则 $QR\geqslant a/2$. 这说明(2) 在 $k\to+\infty$ 的情形：

$$\max\{QR,RP,PQ\}\geqslant\frac{1}{2}\max\{a,b,c\} \tag{3}$$

是成立的. 1989 年 11 月，王振证明了

$$QR^2+RP^2\geqslant(a^2+b^2)/4, \tag{4}$$

从而得到下列弱优超关系：

$$(QR^2,RP^2,PQ^2)_w \succ (a^2,b^2,c^2), \tag{5}$$

进而可知不等式(2) 对 $k \geqslant 2$ 成立.

由于不等式(4) 的证法不够漂亮,且猜测有比(5) 更强的弱优超关系

$$(QR,RP,PQ)_w \succ (a,b,c), \tag{6}$$

所以一直未发表优超式(5) 的证明.

本文中,我们首先证明优超式(6),然后导出不等式(2) 及关于三角形覆盖圆半径的不等式:

$$R_{\triangle PQR} \geqslant R_{\triangle ABC}/2. \tag{7}$$

(二) 主要结论

定理 设 P,Q,R 分别位于 $\triangle ABC$ 的边 BC,CA,AB 上,且将三角形的周界三等分,则当 $a \geqslant b \geqslant c$ 时,有

(i) $QR \geqslant a/2$, (8)

(ii) $QR + \max\{RP,PQ\} \geqslant (a+b)/2$. (9)

证明 (i) 作 $BD \parallel RQ$,交直线 AC 于 D.

当 D 在 AC 的延长线上时,由于 $\angle C < \pi/2$,所以 $BD > a$,从而

$$RQ = \frac{(a+b+c)BD}{3(c+b+CD)} > \frac{a(a+b+c)}{3(b+c)} \geqslant \frac{a}{2}. \tag{10}$$

当 D 在边 AC 上时,若 $a > b$,作等腰 $\triangle A'B'C'$,使 $A'C' = B'C' = a$,$A'B' = b+c-a$;在 $A'B'$ 上取 R',在 $A'C'$ 上取 Q',D',使得 $D'C' = DC$,$A'R'/A'B' = AR/AB$,$R'Q' \parallel B'D'$. 从而 $\angle C' < \angle C$,即 $B'D' < BD$;又由 $D'C' = DC$ 知 $A'B' + A'D' = AB + AD$,所以 $A'R' + A'Q' = AR + AQ$,$R'Q' < RQ$. 因此,下面不妨设 $a = b$.

由余弦定理,

$$RQ^2 = AR^2 + AQ^2 - 2AR \cdot AQ\cos A$$
$$= AR^2 + \left(\frac{2a+c}{3} - AR\right)^2 - AR\left(\frac{2a+c}{3} - AR\right)\frac{c}{a}$$
$$= \frac{2a+c}{a}AR^2 - \frac{(2a+c)^2}{3a}AR + \left(\frac{2a+c}{3}\right)^2. \tag{11}$$

当 $a \leqslant 3c$ 时,

$$RQ^2 - a^2/4$$
$$= \frac{2a+c}{a}\left(AR - \frac{2a+c}{6}\right)^2 - \frac{2a+c}{a}\left(\frac{2a+c}{6}\right)^2 + \left(\frac{2a+c}{3}\right)^2 - \frac{a^2}{4}$$
$$\geqslant (a-c)(-a^2 + 3ac + c^2)/(36a) \geqslant 0. \tag{12}$$

当 $a > 3c$ 时, $AR \leqslant c < (2a+c)/6$,

$$RQ^2 \geqslant \frac{2a+c}{a}c^2 - \frac{2a+c}{3a}c + \left(\frac{2a+c}{3}\right)^2$$
$$= a^2/4 + (7a^3 - 32a^2c + 26ac^2 + 24c^3)/(36a)$$
$$= a^2/4 + [7a(a-3c)(a-2c) + c(a-3c)(3a-8c)$$
$$+ ac^2]/(36a) > a^2/4. \tag{13}$$

(ii) 不妨设 $BP \geqslant (a+b+c)/6$. 否则 $BR > BP$, 且由 $PC > a/2 (> CQ)$ 知 $AQ = b - (a+b+c)/3 + PC > (a+b+c)/6$. 从而, 当 P, Q, R 同时向 C, A, B 移动时, QR, RP, PQ 都不增; 这样移动当 BP 增加到 $(a+b+c)/6$ 为止.

下面, 我们分三种情况进行证明, 前两种情形中, 我们将证明

$$QR + RP \geqslant (a+b)/2, \tag{14}$$

为此先估计

$$QR + RP - (a+b)/2$$
$$\geqslant (AQ\cos C + AR\cos B) + (BP\cos C + BR\cos A)$$
$$- (a+b)/2$$
$$= \frac{2a+2b-c}{3}\cos C + \left(c - \frac{a+b+c}{3} + BP\right)\cos B$$
$$+ \left(\frac{a+b+c}{3} - BP\right)\cos A$$
$$- \frac{1}{2}[(a+b)\cos C + c\cos B + c\cos A]$$

$$= \frac{a+b-2c}{6}\cos C$$

$$+ \left(\frac{c}{2} - \frac{a+b+c}{3} + BP\right)(\cos B - \cos A). \tag{15}$$

① 当 $BP \geqslant (a+b)/4$ 时，

$$QR + RP - \frac{a+b}{2} \geqslant \frac{a+b-2c}{6}\cos C$$

$$+ \left(\frac{c}{2} - \frac{a+b+c}{3} + \frac{a+b}{4}\right)(\cos B - \cos A)$$

$$= \frac{a+b-2c}{12}(2\cos C - \cos B + \cos A) \geqslant 0. \tag{16}$$

② 当 $A \leqslant \pi/2$ 时，注意到 $BP \geqslant (a+b+c)/6$，

$$QR + RP - \frac{a+b}{2} \geqslant \frac{a+b-2c}{6}\cos C$$

$$+ \left(\frac{c}{2} - \frac{a+b+c}{3} + \frac{a+b+c}{6}\right)(\cos B - \cos A)$$

$$= \frac{a+b-2c}{6}(\cos C - \cos B + \cos A) \geqslant 0. \tag{17}$$

③ 当 $A > \pi/2$ 且 $BP < (a+b)/4$ 时，由于 $AR = c - (a+b+c)/3 + BP < c - (a+b+c)/3 + (a+b)/4 = (8c-a-b)/12 < (a+b+c)/6$，所以

$$RQ^2 > AR^2 + AQ^2$$

$$= AR^2 + \left(\frac{a+b+c}{3} - AR\right)^2$$

$$> \left(\frac{8c-a-b}{12}\right)^2 + \left(\frac{a+b+c}{3} - \frac{8c-a-b}{12}\right)^2$$

$$= [13(a+b)^2 - 28c(a+b) + 40c^2]/72$$

$$= (a+b)^2/9 + [(5a+5b-14c)^2 + 4c^2]/360$$

$$> (a+b)^2/9, \tag{18}$$

从而

$$QR + \max\{RP, PQ\}$$

$$\geqslant QR + (RP+PQ)/2 > 3QR/2 > (a+b)/2. \tag{19}$$

由上述证明过程易知，不等式(8) 与(9) 中的等号成立均当且

仅当 $\triangle ABC$ 是正三角形，且 P,Q,R 分别是三条边的中点． □

由定理及不等式(1) 得弱优超关系(6)；又因为当 $k\geqslant 1$ 时，函数 $f(a,b,c)=a^k+b^k+c^k$ 是 Schur 凸的，所以不等式(2) 成立．(有关优超及 Schur 凸的定义及定理详见[7])

(三) 覆盖圆半径的 Schur 凸性

首先，我们先介绍一下简单的

性质 $D\subset R^n$ 为凸区域，$f(x_1,x_2,\cdots,x_n)$ 在 D 上连续且分片 Schur 凸，则 f 在 D 上 Schur 凸．

利用这一性质及优超式(6)，我们来证明 1991 年发表的一个猜想(见[8] 与[9])，即

推论 不等式(7) 成立．

证明 不妨设 $\triangle ABC$ 的三边 $a\geqslant b\geqslant c$，外接圆与覆盖圆的半径分别为 R_0 与 R. 则

$$R=\begin{cases}R_0, & \text{当 } A<\pi/2 \text{ 时}, \\ a/2, & \text{当 } A\geqslant\pi/2 \text{ 时}\end{cases} \tag{16}$$

是(a,b,c) 的分段光滑的连续函数，且

$$\left(\frac{2R}{2a},\frac{2R}{2b},\frac{2R}{2c}\right) = \begin{cases}\frac{1}{2}\mathrm{ctg}A\,\mathrm{ctg}B\,\mathrm{ctg}C(\sec A,\sec B,\sec C), & A<\frac{\pi}{2}, \\ \left(\frac{1}{2},0,0\right), & A\geqslant\frac{\pi}{2}.\end{cases} \tag{17}$$

显然$\frac{2R}{2a}\geqslant\frac{2R}{2b}\geqslant\frac{2R}{2c}$，所以由本节的性质及 Ostrowski 定理知：R 是(a,b,c) 的 Schur 凸函数．再由弱优超关系(6)，即知不等式(7) 成立． □

(四) 一 些 注 记

4.1　对三角形的面积，陈计与罗承辉建立了

$$S_{\triangle PQR} > \frac{2}{9} S_{\triangle ABC}, \tag{18}$$

其中常数 2/9 是最佳的（见[10] 或[11]）. 这一结论后又为周华生与张肇平[12] 重新发现 .

4.2　我们在[8] 中还对三角形内切圆的半径提出了如下不等式：

$$r_{\triangle PQR} > \frac{1}{3} r_{\triangle ABC}. \tag{19}$$

这一猜想至今尚未获得解决 .

4.3　陈计与高海明[6] 曾提出下列猜想：

$$RP \cdot PQ + PQ \cdot QR + RP \cdot PQ \geqslant \frac{1}{4}(bc + ca + ab). \tag{20}$$

石世昌[13] 证明了不等式(20)，并把它加强成

$$\begin{aligned} & RP \cdot PQ + PQ \cdot QR + RP \cdot PQ \\ \geqslant & \frac{7}{36}(a^2 + b^2 + c^2) + \frac{1}{18}(bc + ca + ab). \end{aligned} \tag{22}$$

由此可导出不等式(1).

4.4　陈计与杨学枝[14] 还证明了不等式(1) 的两个加强：

$$\begin{aligned} & QR + RP + PQ \\ \geqslant & \frac{a + b + c}{3}\left(\frac{a}{b + c} + \frac{b}{c + a} + \frac{c}{a + b}\right), \end{aligned} \tag{23}$$

$$\begin{aligned} & (QR + RP + PQ)^3 \\ \geqslant & \frac{9}{8}(a^3 + b^3 + c^3), \end{aligned} \tag{24}$$

由不等式(24) 可导出不等式(2) 在 $1 \leqslant k \leqslant 3$ 的情形 .

参考文献

[1] A. Zirakzadeh, A property of a triangle inscribed in a convex curve, Preprint.

[2] D. S. Mitrinovic 等著，陈计等译，《几何不等式的新进展》，北京大学出版社，1995 年.

[3] 洪加威，能用举例法证明几何定理吗?《现代数学进展》，安徽教育出版社，1988 年.

[4] 陶懋颀，张景中，杨路，用多点例证法证明一个几何不等式，《中国科学》，待发表.

[5] 杨学枝，征解问题19的评注(Ⅰ)，《数学通讯》，1991年第2期，40－41.

[6] 陈计，高海明，一道征解题的拓广和加强，《数学通讯》，1989年第8期，4－5.

[7] A. W. Marshall, I. Olkin 著，陈计，曹冬极译，不等式优超方法引论，《玉溪师专学报》(自然科学版)，1989 年第 4 期，86－101.

[8] D. S. Mitrinović, J. E. Pečarić, V. Volenec, J. Chen, Addenda to the monograph "Recent Advances in Geometric Inequalities", Part Ⅰ，《宁波大学学报》(理工版)，1991 年第 2 期，79－145.

[9] 杨之，《初等数学研究的问题与课题》，湖南教育出版社，1993 年，297－302.

[10] 陈计，罗承辉，关于三角形面积的一个不等式，《中国科学技术大学学生学报》(数学专辑)，第 4 卷第 1 期，1988 年 1 月，55－56.

[11] Ji Chen, Cheng-Hui Lou, O. P. Lossers, Problem E 3397; Amer. Math. Monthly, 97(1990), 611; 99(1992), 70－71.

[12] 周华生，张肇平，一道竞赛题的引伸，《数学竞赛》，第 5 辑，湖南教育出版社，1989 年，80－82.

[13] 石世昌，征解问题19的解答(Ⅳ)与评注(Ⅶ)，《数学通讯》，1992年第2期，40－41；1994 年第 3 期，38.

[14] Ji Chen, Xue-Zhi Yang, On a Zirakzadeh inequality related to two triangles inscribed one in the other, Univ. Beograd. Publ.

Elektrotehn. Fak. Ser. Mat., 4(1993), 25 — 27.

[15] Shi-Chang Shi, Ji Chen, Problem 1849, Crux Math., 19(1993), 141; 20(1994), 138 — 140.

[16] 曾振柄,一个几何不等式,《科学通报》,1989 年第 11 期,809-810.

三角形中线及其延长线的不等式

复旦大学计算机系　周　栋

设 $\triangle ABC$ 的中线长为 m_a, m_b, m_c，中线延伸到外接圆的长为 M_a, M_b, M_c. 1981 年，J. Garfunkel[1] 给出了

$$\frac{M_a}{m_a}+\frac{M_b}{m_b}+\frac{M_c}{m_c}\geqslant 4. \tag{1}$$

1992 年，王振[2] 把它加强成：

$$\frac{m_a^2}{M_a^2}+\frac{m_b^2}{M_b^2}+\frac{m_c^2}{M_c^2}\leqslant\frac{27}{16}; \tag{2}$$

同时，他还给出了

$$\frac{m_a^4}{M_a^4}+\frac{m_b^4}{M_b^4}+\frac{m_c^4}{M_c^4}\geqslant\frac{243}{256}, \tag{3}$$

等号成立当且仅当 $\triangle ABC$ 是正三角形.

本文中，我们首先给出(2) 左边的下确界，然后估计 $\sum m_a^3/M_a^3$；最后，我们将不等式(2) 和(3) 推广到高维.

(一)

首先引入一些记号：令 $x=\dfrac{3m_a^2}{m_a^2+m_b^2+m_c^2}$ 等，$y+z=T$，不失一般性，不妨设 $a\leqslant b\leqslant c$(a,b,c 为 $\triangle ABC$ 三边长)，则据文[2]，我们有：$x+y+z=3, 2\geqslant x\geqslant y\geqslant z\geqslant 0, x\in[1,2], T\in[1,2]$.

$$\frac{m_a}{M_a}=\frac{3}{2}\frac{x}{1+x},\frac{m_b}{M_b}=\frac{3}{2}\frac{y}{1+y},\frac{m_c}{M_c}=\frac{3}{2}\frac{z}{1+z}.$$

引理 1 $\left(\frac{y}{1+y}\right)^2+\left(\frac{z}{1+z}\right)^2\geqslant 2-\left(\frac{T+3}{T+2}\right)^2$.

证明 令 $u=(1+y)(1+z)\in\left[T+1,\left(1+\frac{T^2}{2}\right)\right]$，则

$$\left(\frac{y}{1+y}\right)^2+\left(\frac{z}{1+z}\right)^2=\frac{(2u-T-2)^2-2u(-T-1+u)}{u^2}$$

$$=(T+2)^2\left(\frac{1}{u}\right)^2+(-2T-6)\left(\frac{1}{u}\right)+2\geqslant 2-\left(\frac{T+3}{T+2}\right)^2,$$

等号成立当且仅当 $u=\frac{(T+2)^2}{T+3}$. □

定理 1 $\frac{m_a^2}{M_a^2}+\frac{m_b^2}{M_b^2}+\frac{m_c^2}{M_c^2}\geqslant\frac{3}{2}$. (4)

证明 由引理 1，

$$\sum\left(\frac{x}{1+x}\right)^2-\frac{2}{3}\geqslant\left(\frac{x}{1+x}\right)^2+2-\left(\frac{T+3}{T+2}\right)^2-\frac{2}{3}$$

$$=\left(\frac{x}{1+x}\right)^2-\left(\frac{6-x}{5-x}\right)^2+\frac{4}{3}$$

$$=\frac{4(x-2)}{3(1+x)^2(5-x)^2}(x^3-6x^2+3x+1).$$

由 $x^3-6x^2+3x+1=-x^2(2-x)-(x-1)(4x+1)\leqslant 0$ 及 $x-2\leqslant 0$，得

$$\sum\left(\frac{x}{1+x}\right)^2-\frac{2}{3}\geqslant 0\text{，所以}\sum\left(\frac{x}{1+x}\right)^2\geqslant\frac{2}{3}\text{，从而}$$

$$\sum\left(\frac{m_a}{M_a}\right)^2=\frac{9}{4}\sum\left(\frac{x}{1+x}\right)^2\geqslant\frac{3}{2},$$

等号成立当 $a=0,b=c$. □

引理 2 $2\left(\frac{T}{T+2}\right)^3\leqslant\left(\frac{y}{1+y}\right)^3+\left(\frac{z}{1+z}\right)^3\leqslant\left(\frac{T}{T+1}\right)^3$.

证明 令 $u=(1+y)(1+z)\in\left[1+T,\left(\frac{T}{2}+1\right)^2\right]$，则

$$\left(\frac{y}{1+y}\right)^3+\left(\frac{z}{1+z}\right)^3$$

$$=\frac{2u^3-(T+4)u^2+3(T+2)(T+3)u-(T+2)^2}{u^3}$$

(1) $\left(\frac{y}{1+y}\right)^3+\left(\frac{z}{1+z}\right)^3\geqslant 2\left(\frac{T}{T+2}\right)^3$ 等价于

$$2[(T+2)^3-T^3]u^3-3(T+4)(T+2)^3u^2$$
$$+3(T+2)^4(T+3)u-(T+2)^6\geqslant 0 \qquad (*)$$

左式 $=4\left[u-[\frac{T}{2}+1)^2\right][(3T^2+6T+4)u^2$
$-(3T+5)(T+2)^2u+(T+2)^4]$.

令 $f(u)=(3T^2+6T+4)u^2-(3T+5)(T+2)^2u$
$+(T+2)^4$,则 $f(u)\leqslant\max\{f(T+1),f[(\frac{T}{2}+1)^2]\}$.

因为$f(T+1)=T(T^3-6T-6)$
$=T[-T^2(2-T)-2(T-1)(2-T)-2]\leqslant 0$,

$f\left((\frac{T}{2}+1)^2\right)=\frac{3}{16}T(T+2)^4(T-2)\leqslant 0$.

所以 $f(u)\leqslant 0$,又由 $u-\left(\frac{T}{2}+1\right)^2\leqslant 0$ 立得($*$)式成立.

从而$\left(\frac{y}{1+y}\right)^3+\left(\frac{z}{1+z}\right)^3\geqslant 2\left(\frac{T}{T+2}\right)^3$.

(2)$\left(\frac{y}{1+y}\right)^3+\left(\frac{z}{1+z}\right)^3\leqslant\left(\frac{T}{1+T}\right)^3$ 等价于

$$[2(T+1)^3-T^3]u^3-3(T+4)(T+1)^3u^2$$
$$+3(T+2)(T+3)(T+1)^3u-(T+2)^3(T+1)^3\leqslant 0. \qquad (*)'$$

左式 $=(u-T-1)g(u)$,式中 $g(u)=(T^3+6T^2+6T+2)u^2$
$-(2T^3+12T^2+21T+10)(T+1)u+(T+2)^3(T+1)^2$.

因为 $g(u)\leqslant\max\left\{g(T+1),g\left((\frac{T}{2}+1)^2\right)\right\}$,

$g(T+1)=-3T(T+1)^2\leqslant 0$,

$g((\frac{T}{2}+1)^2)=\frac{1}{16}(T^3-6T-6)T\leqslant 0$,

所以 $g(u)\leqslant 0$. 又由 $u-T-1\geqslant 0$ 立得($*$)$'$ 式成立.

从而$\left(\frac{y}{1+y}\right)^3+\left(\frac{z}{1+z}\right)^3\leqslant\left(\frac{T}{1+T}\right)^3$.

由(1)、(2) 可知引理 2 得证. □

定理 2 $\frac{5}{4} \leqslant \frac{m_a^3}{M_a^3} + \frac{m_b^3}{M_b^3} + \frac{m_c^3}{M_c^3} \leqslant \frac{729}{500}$. (5)

证明 (1) 由引理 2,

$$\sum\left(\frac{x}{1+x}\right)^3 \geqslant \left(\frac{x}{1+x}\right)^3 + 2\left(\frac{T}{T+2}\right)^3$$
$$= \left(\frac{x}{1+x}\right)^3 + \frac{2(3-x)^3}{(5-x)^3}.$$

因为 $27x^3(5-x)^3 + 54(1+x)^3(3-x)^3$

$-10(1+x)^3 \cdot (5-x)^3$

$=-(x-2)^2(71x^4 - 325x^3 + 273x^2 - 31x - 52)$

$=(x-2)^2[71(x-1)(2-x)x^2 + 112(x-1)x^2$

$+19x(2-x) + 7(2-x) + 38] \geqslant 0$,

所以 $\sum\left(\frac{x}{1+x}\right)^3 \geqslant \left(\frac{x}{1+x}\right)^3 + \frac{2(x-3)^3}{(x-5)^3} \geqslant \frac{10}{27}$.

(2) 由引理 2, $\sum\left(\frac{x}{1+x}\right)^3 \leqslant \left(\frac{x}{1+x}\right)^3 + \left(\frac{T}{1+T}\right)^3$.

令 $v = 4 + xT \in \left[6, \frac{25}{4}\right]$, 则 $\left(\frac{x}{1+x}\right)^3 + \left(\frac{T}{1+T}\right)^3 \leqslant \frac{54}{125}$ 等价于 $(25-4v)(7v-25)^2 \geqslant 0$ 显然成立. 所以 $\sum\left(\frac{x}{1+x}\right)^3 \leqslant \frac{54}{125}$.

由(1)、(2) 及 $\sum\left(\frac{m_a}{M_a}\right)^3 = \frac{27}{8}\sum\left(\frac{x}{1+x}\right)^3$ 得证. □

(二)

设 E^n 中单形 $A_1A_2\cdots A_{n+1}$ 的中线长为 m_i, 中线延伸到外接球的长为 $M_i (i = 1, 2, \cdots, n+1)$; 并令

$$x_i = n^2 m_i^2 \Big/ \sum_{1 \leqslant i < j \leqslant n+1} a_{ij}^2,$$

其中 a_{ij} 为棱长, 则易知: $0 \leqslant x_i \leqslant n$, $x_1 + x_2 + \cdots + x_{n+1} = n + 1$,

$$\frac{m_i}{M_i}=\frac{n+1}{n}\cdot\frac{x_i}{1+x_i}. \tag{6}$$

现在，我们将王振的不等式(2)和(3)推广成：

定理 3 $\sum_{i=1}^{n+1}\frac{m_i^2}{M_i^2}\leqslant\frac{(n+1)^3}{4n^2}$； (7)

$$\sum_{i=1}^{n+1}\left(\frac{m_i}{M_i}\right)^{n+2}\geqslant\frac{(n+1)^{n+3}}{(2n)^{n+2}}. \tag{8}$$

证明 由(6)式，

$$\sum_{i=1}^{n+1}\frac{m_i^2}{M_i^2}=\left(\frac{n+1}{n}\right)^2\sum_{i=1}^{n+1}\left(\frac{x_i}{1+x_i}\right)^2\leqslant\left(\frac{n+1}{n}\right)^2\sum_{i=1}^{n+1}\frac{x_i}{4}$$

$$=\frac{(n+1)^3}{4n^2},$$

即(7)得证. 再由(6)式，我们只须证明

$$\sum_{i=1}^{n+1}\left(\frac{x_i}{1+x_i}\right)^{n+2}\geqslant\frac{n+1}{2^{n+2}}.$$

当 $n\geqslant 3$ 时，分两种情况进行论证.

(Ⅰ) $x_1,x_2,\cdots,x_{n+1}$ 均 $\leqslant\frac{n+1}{2}$，则 $f(x)=\left(\frac{x}{1+x}\right)^{n+2}$ 在 $x\in\left[0,\frac{n+1}{2}\right]$ 上是下凸函数.

所以 $\sum_{i=1}^{n+1}f(x_i)\geqslant(n+1)f\left(\frac{\sum_{i=1}^{n+1}x_i}{n+1}\right)=\frac{n+1}{2^{n+2}}$，

从而 $\sum_{i=1}^{n+1}\left(\frac{x_i}{1+x_i}\right)^{n+2}\geqslant\frac{n+1}{2^{n+2}}$.

(Ⅱ) $x_1,x_2,\cdots,x_{n+1}$ 中至少有一个大于 $\frac{n+1}{2}$，不妨设 $x_1>\frac{n+1}{2}$，则 $\sum_{i=1}^{n+1}\left(\frac{x_i}{1+x_i}\right)^{n+2}>\left(\frac{n+1}{n+3}\right)^{n+2}$.

以下证明 $\left(\frac{n+1}{n+3}\right)^{n+2}>\frac{n+1}{2^{n+2}}$.

$n=3$ 时，直接验证可得.

$n \geqslant 4$ 时，

$$\left(\frac{n+1}{n+3}\right)^{n+2} = \frac{n+1}{n+3}\left(1+\frac{2}{n+1}\right)^{-(n+1)} > \frac{n+1}{n+3}e^{-2}.$$

用数学归纳法易证$\frac{n+1}{n+3}e^{-2} > \frac{n+1}{2^{n+2}}$，所以

$$\sum_{i=1}^{n+1}\left(\frac{x_i}{1+x_i}\right)^{n+2} > \frac{n+1}{2^{n+2}}.$$

由(Ⅰ)，(Ⅱ)得$\sum_{i=1}^{n+1}\left(\frac{x_i}{1+x_i}\right)^{n+2} \geqslant \frac{n+1}{2^{n+2}}$，所以(8)得证. □

最后指出定理 3 的(8)式中 $n=3$ 时，可加强为

$$\sum_{i=1}^{4}\left(\frac{m_i}{M_i}\right)^4 \geqslant \frac{64}{81}. \tag{9}$$

证明 由(6)，$\sum_{i=1}^{4}\left(\frac{m_i}{M_i}\right)^4 = \frac{256}{81}\sum_{i=1}^{4}\left(\frac{x_i}{1+x_i}\right)^4$，

$$\sum_{i=1}^{4}x_i = 4, 0 \leqslant x_i \leqslant 3 (i=1,2,3,4).$$

运用文[2]提供的方法，对 $x \in [0,3]$，

$$16x^4 - (1+x)^4(2x-1)$$
$$= (x-1)^2(-2x^3+5x^2+4x+1) \geqslant 0,$$

所以$\sum_{i=1}^{4}\left(\frac{x_i}{1+x_i}\right)^4 \geqslant \sum_{i=1}^{4}\frac{2x_i-1}{16} = \frac{1}{4}$，

即得不等式(9). □

以上诸不等式等号成立的条件均为正 n 维单形 $A_1A_2\cdots A_{n+1}$，其论证请读者自行补上.

参考文献

[1] J. Garfunkel, S. Rabinowitz, W. J. Blundon, M. S. Klamkin, Problem 689, Crux Math., 7(1981), 276 and 8(1982), 307 − 309.

[2] 王振，黄军华，陈计，征解问题 87，《数学通讯》，1992 年第 3 期，40；1994 年第 4 期，37 − 38.

一个数列的单调性

宁波大学数学系　楼红卫

吴伟朝于1991年提出以下一个未决问题：

问题1　设 $a_1>0, a_{n+1}=a_1+\frac{n}{a_n}, n=1,2,\cdots$，当 $0<a_1<1$ 时，是否有正数 M(与 a_1 有关)，使得当 $n>M$ 时，总有 $a_{n+1}>a_n$？

陈计将此问题介绍给笔者，笔者给出了问题1肯定的解答，并指出使问题1成立的最小的 M 与 $(1+\ln^2 a_1)/a_1^2$ 同阶. 据此，陈计先生将问题1改编成[1]：

问题2　设 $a_1>0, a_{n+1}=a_1+\frac{n}{a_n}, n=1,2,\cdots$，证明或否定：当 $n>4/a_1^3$ 时，总有 $a_{n+1}>a_n$.

鉴于问题2至今未有解答，笔者特将以前得到的关于上述数列的一些结果整理出来，以期抛砖引玉.

(一) 主要结果

由于 $a_1\geqslant 1$ 时，数列 $\{a_n\}$ 的单调性是简单的，所以以下我们主要考虑 $0<a_1<1$ 的情形.

命题1　设 $0<a_1<1$，若对某个 $n, a_{n+2}\geqslant a_{n+1}\geqslant a_n$，则必有 $n>\frac{1}{a_1^2}$.

命题2　设 $0<a_1<1$，若对某一个 $n, a_{n+2}\geqslant a_{n+1}\geqslant a_n$，则必有 $a_{n+3}>a_{n+2}$.

命题 3　设 $0 < a_1 < 1$.

1) 存在绝对常数 $M > 0$，使得当 $n \geqslant M(1+\ln^2 a_1)/a_1^2$ 时，总有 $a_{n+1} > a_n$.

2) 存在绝对常数 $M > 0$，使得若对某个 n，$a_{n+2} > a_{n+1} > a_n$ 时，必有 $n \geqslant M(1+\ln^2 a_1)/a_1^2$.

命题 1 意味着至少到 $\frac{1}{a_1^2}$ 项以后，a_n 才有可能单调增加.

命题 2 意味着一旦 a_n 连续两次递增（不一定严格），则后面的数列将严格递增.

命题3意味着问题1的答案是肯定的. 进一步，当 $a_1 \to 0+$ 时，使 a_n 开始单调递增的项数 n 与 $(1+\ln^2 a_1)/a_1^2$ 同阶，从而与 $\ln^2 a_1/a_1^2$ 同阶.

为了证明上述命题，我们先给出以下几个简单的性质.

（二）几个简单的性质

为了方便叙述，以下记 $y_n = a_n/a_1$，$c = 1/a_1^2$，则 $y_1 = 1$，$y_{n+1} = 1 + \frac{nc}{y_n}$，$n = 1,2,\cdots$. 又记 $A(n) = \frac{1+\sqrt{1+4cn}}{2}$，

$$B(n) = \frac{n}{n+1} \cdot \frac{1+\sqrt{1+4c+4cn}}{2},$$

则通过一些简单的计算，我们可以得到：

性质 1　1) $A(n) > B(n)$.

2) $A(n) > B(n+1) \Leftrightarrow n > c-1$;

$A(n) < B(n+1) \Leftrightarrow n < c-1$.

性质 2　$y_{n+1} > y_n \Leftrightarrow y_n < A(n)$;

$y_{n+1} < y_n \Leftrightarrow y_n > A(n)$.

性质 3　$y_{n+2} > y_{n+1} \Leftrightarrow y_n > B(n)$;

$y_{n+2} < y_{n+1} \Leftrightarrow y_n < B(n)$.

性质 4 $y_{n+1} \leqslant y_n \Rightarrow y_{n+2} > y_{n+1}$.

这是因为 $y_{n+1} \leqslant y_n \Rightarrow y_n \geqslant A(n) \Rightarrow y_n > B(n) \Rightarrow y_{n+2} > y_{n+1}$.

性质 5 当 $c < 1$ 时，$y_1 < y_2 < y_3$；

当 $c = 1$ 时，$y_1 < y_2 = y_3$；

当 $c > 1$ 时，$y_1 < y_2, y_2 > y_3$.

性质 6 当 $n \leqslant c - 1$ 时，

$$y_{n+1} < y_n \Rightarrow y_{n+3} < y_{n+2}.$$

这是因为 $y_{n+1} < y_n \Rightarrow y_n > A(n)$

$$\Rightarrow y_{n+1} = 1 + \frac{nc}{y_n} < 1 + \frac{nc}{A(n)} = A(n)$$

$$\Rightarrow y_{n+1} < B(n+1) \Rightarrow y_{n+3} < y_{n+2}.$$

性质 7 当 $c > 1$ 时，对于 $2n \leqslant c + 1$ 有

$$y_{2n} > y_{2n-1}, y_{2n} > y_{2n+1}.$$

这可由 $c > 1$ 时，$y_1 < y_2, y_2 > y_3$，并反复利用性质 4 及性质 6 可得.

（三）命题 1 ～ 3 的证明

命题 1 的证明

易见对于 $a_1 < 1$，我们有 $c > 1$，如果对某个 n，成立 $y_{n+2} \geqslant y_{n+1} \geqslant y_n$，则当 n 为偶数时，$n = 2k$，由 $y_{2k} \leqslant y_{2k+1}$ 及性质 7 可知，$n = 2k > c + 1$，而当 n 为奇数时，$n = 2k + 1$，由 $y_{2k+2} \leqslant y_{2k+3}$ 及性质 7 可知 $2k + 2 > c + 1$，从而 $2k + 1 > c$，即 $n > c$. 总之，我们总有 $n > c = \frac{1}{a_1^2}$. □

命题 2 的证明

由命题 1 知，如果对某一个 n，有 $y_{n+2} \geqslant y_{n+1} \geqslant y_n$，则必有 $n > c > c - 1$. 由 $y_n \leqslant y_{n+1}$ 知 $y_n \leqslant A(n)$. 从而 $y_{n+1} = 1 + \frac{nc}{y_n} \geqslant 1 + \frac{nc}{A(n)} = A(n) > B(n+1)$.

从而 $y_{n+3} > y_{n+2}$. □

命题 2 意味着我们所考虑的数列在单调前，必定具有一升一降的特点.

推论 对任何 $n = 1,2,\cdots,y_{2n} > y_{2n-1}$，即 $a_{2n} > a_{2n-1}$.

证明 易见 $y_2 > y_1$，假设对于 $n = k$ 成立 $y_{2k} > y_{2k-1}$，则

如果 $y_{2k+1} \leqslant y_{2k}$，由性质 4，我们有 $y_{2k+2} > y_{2k+1}$；

如果 $y_{2k+1} > y_{2k}$，则由命题 2 知 $y_{2k+2} > y_{2k+1}$.

即无论怎样总有 $y_{2k+2} > y_{2k+1}$. 于是由归纳法可见对任何 $n = 1,2,\cdots,y_{2n} > y_{2n-1}$. □

为了证明命题 3，我们引入以下引理：

引理 1 设 $m \geqslant 2, n > m$，则对 $\alpha > 1$ 有：

$$\left(\frac{n+1}{m}\right)^{\frac{1}{2\alpha}} \leqslant \left(1+\frac{1}{\alpha m}\right)\left(1+\frac{1}{\alpha(m+1)}\right)\cdots\left(1+\frac{1}{\alpha n}\right) \leqslant \left(\frac{n}{m-1}\right)^{\frac{1}{\alpha}}. \tag{1}$$

$$e^{\frac{1}{\alpha}(\sqrt{n+1}-\sqrt{m})} \leqslant \left(1+\frac{1}{\alpha\sqrt{m}}\right)\left(1+\frac{1}{\alpha\sqrt{m+1}}\right)\cdots\left(1+\frac{1}{\alpha\sqrt{m}}\right) \leqslant e^{\frac{2}{\alpha}(\sqrt{n}-\sqrt{m-1})}. \tag{2}$$

证明 注意到 $0 < x < 1$ 时，

$$\frac{x}{2} \leqslant \ln(1+x) \leqslant x,$$

及
$$\int_k^{k+1}\frac{1}{x}dx \leqslant \frac{1}{k} \leqslant \int_{k-1}^{k}\frac{1}{x}dx,$$

$$\int_k^{k+1}\frac{1}{\sqrt{x}}dx \leqslant \frac{1}{\sqrt{k}} \leqslant \int_{k-1}^{k}\frac{1}{\sqrt{x}}dx.$$

对(1)、(2)式两边取对数后，本引理立即可得证明. □

引理 2 存在绝对常数 $M > 0$，当 $n \geqslant M(1+\ln^2 c)\cdot c$ 时，

$$36 \times 16n^2 c \leqslant e^{\frac{1}{4}\sqrt{\frac{n}{c}}}. \tag{3}$$

证明　易见存在绝对常数 $M_1>0$ 及 $M_2>0$，当 $h\geqslant M_1$ 时，$e^{\frac{1}{8}h}\geqslant 36\times 16h^2$；

而当 $h\geqslant M_2\ln c$ 时，$e^{\frac{1}{8}h}\geqslant c^3$.

从而当 $h\geqslant M_1+M_2\ln c$ 时，$e^{\frac{1}{4}h}\geqslant 36\times 16h^2c^3$.

于是当 $n=ch^2\geqslant c(M_1+M_2\ln c)^2$ 时，$e^{\frac{1}{4}\sqrt{\frac{n}{c}}}\geqslant 36\times 16n^2c$.

因为 $(M_1+M_2\ln c)^2\leqslant 2M_1^2+2M_2^2\ln^2c$，所以存在绝对常数 $M>0$，当 $n\geqslant Mc(1+\ln^2c)$ 时，不等式(3)成立.

命题 3 的证明

暂记 $y_{2n}-y_{2n+1}=\alpha, y_{2n+2}-y_{2n+1}=\beta$，则

$$\beta=\left(1+\frac{2n+1}{y_{2n+1}}c\right)-\left(1+\frac{2n}{y_{2n}}c\right)$$

$$=\frac{(2n+1)y_{2n}-2ny_{2n+1}}{y_{2n}y_{2n+1}}c=\frac{2n\alpha+y_{2n}}{2nc+y_{2n}}c,$$

从而

$$y_{2n+2}-y_{2n+3}=\frac{(2n+1)\dfrac{2n\alpha+y_{2n}}{2nc+y_{2n}}c-y_{2n+1}}{(2n+1)c+y_{2n+1}}c$$

$$=\frac{(2n+1)\cdot 2n\alpha c+(2n+1)c\cdot y_{2n}-2ncy_{2n+1}-y_{2n}y_{2n+1}}{[(2n+1)c+y_{2n+1}][2nc+y_{2n}]}c$$

$$=\frac{(2n+1)\cdot 2n\alpha c+2nc\alpha+y_{2n}c-y_{2n}-2nc}{[(2n+1)c+y_{2n+1}][2nc+y_{2n}]}c \tag{4}$$

$$=\frac{(2n+1)^2\cdot\alpha c+cy_{2n+1}-y_{2n}y_{2n+1}}{[(2n+1)c+y_{2n+1}][2nc+y_{2n}]}c. \tag{5}$$

1) 设 N 满足 $y_{2N+2}>y_{2N+3}$，不妨设 $N\geqslant 8c$(反之结论成立).

由命题 2 及推论可见对所有 $n\leqslant N+1$，$y_{2n}>y_{2n+1}$，从而当 $n\leqslant N$ 时，$y_{2n}>A(2n)$. 特别当 $2N\geqslant 2n\geqslant c$ 时，$y_{2n}>\dfrac{1+\sqrt{1+8cn}}{2}>\sqrt{2cn}\geqslant c$.

记 $l=[\frac{c}{2}]+2$，易见 $c+2\leqslant 2l\leqslant c+4\leqslant 5c\leqslant N$，则

$$y_{2l}-y_{2l+1}=\left(1+\frac{2l-1}{y_{2l-1}}c\right)-y_{2l+1}\leqslant(2l-1)c$$
$$\leqslant(c+3)c\leqslant 4c^2. \tag{6}$$

于是，由(5)式，

$$y_{2(l+1)}-y_{2(l+1)+1}\leqslant\frac{(2l+1)^2c^2}{[(2l+1)c+y_{2l+1}][2lc+y_{2l}]}(y_{2l}-y_{2l+1})$$
$$\leqslant\frac{\left(1+\frac{1}{2l}\right)}{\left(1+\frac{y_{2l}}{2lc}\right)}\cdot(y_{2l}-y_{2l+1})\leqslant\frac{1+\frac{1}{2l}}{1+\frac{1}{\sqrt{2lc}}}(y_{2l}-y_{2l+1}).$$

依次类推，有

$$y_{2N}-y_{2N+1}$$
$$\leqslant\frac{\left(1+\frac{1}{2l}\right)\left(1+\frac{1}{2(l+1)}\right)\cdots\left(1+\frac{1}{2(N-1)}\right)}{\left(1+\frac{1}{\sqrt{2lc}}\right)\left(1+\frac{1}{\sqrt{2(l+1)c}}\right)\cdots\left(1+\frac{1}{\sqrt{2(N-1)c}}\right)}(y_{2l}-y_{2l+1}).$$

由引理 1 及(6)式，

$$y_{2N}-y_{2N+1}\leqslant\left(\frac{N-1}{l-1}\right)^{\frac{1}{2}}\cdot 4c^2/e^{\frac{1}{2}\left(\sqrt{\frac{N}{2c}}-\sqrt{\frac{l+1}{2c}}\right)}$$
$$\leqslant 4Nc/e^{\left(\frac{1}{4}\sqrt{\frac{N}{c}}-2\right)}$$
$$\leqslant 36Nc/e^{\frac{1}{4}\sqrt{\frac{N}{c}}}.$$

另一方面，由 $y_{2N+2}>y_{2N+3}$ 知

$$y_{2N}-y_{2N+1}>A(2N)-B(2N+1)$$
$$=\frac{1+\sqrt{1+8Nc}}{2}-\frac{2N+1}{2(2N+2)}(1+\sqrt{1+8c+8Nc})$$
$$=\frac{1}{4(N+1)}[1+\sqrt{1+8Nc}+(2N+1)\sqrt{1+8Nc}$$
$$-(2N+1)\sqrt{1+8c+8Nc}]$$
$$\geqslant\frac{1}{8N}\left[1+\sqrt{8Nc}-(2N+1)\frac{8c}{\sqrt{1+8Nc}+\sqrt{1+8c+8Nc}}\right]$$

$$\geqslant \frac{1}{8N}\left[1+\sqrt{8Nc}-(2N+1)\frac{8c}{2\sqrt{8Nc}}\right]$$

$$=\frac{1}{8N}\left(1-\sqrt{\frac{2c}{N}}\right)\geqslant\frac{1}{16N}.$$

于是，由引理2即知 $N\leqslant M(1+\ln^2 c)c$. 从而有一个绝对常数 $M>0$，当 $n\geqslant M(1+\ln^2 c)c$ 时，总有 $y_{n+1}>y_n$.

2）由命题1，不妨设 $c=\frac{1}{a_1^2}>12\cdot e^8$，则当 $2n\leqslant c$ 时，$y_{2n}>y_{2n+1}$，从而 $y_{2n}>A(2n)$. 又 $y_{2n}=1+\frac{(2n-1)c}{y_{2n-1}}\leqslant 2nc$，从而由(5)式，

$$\begin{aligned}y_{2n+2}-y_{2n+3}&\geqslant\frac{(2n+1)^2c^2}{[(2n+1)c+y_{2n+1}](2nc+y_{2n})}(y_{2n}-y_{2n+1})\\&\geqslant\frac{(2n+1)^2c^2}{[(2n+1)c+y_{2n}](2nc+y_{2n})}(y_{2n}-y_{2n+1})\\&\geqslant\frac{1}{\left(1+\frac{A(2n)}{2nc}\right)^2}(y_{2n}-y_{2n+1})\\&\geqslant\frac{1}{\left(1+\frac{\sqrt{8nc}}{2nc}\right)^2}(y_{2n}-y_{2n+1})\geqslant\frac{1}{1+4\sqrt{\frac{1}{nc}}}(y_{2n}-y_{2n+1})\end{aligned}\tag{7}$$

注意到 $y_2-y_3=\frac{c-1}{c+1}c\geqslant\frac{1}{2}c$，反复利用(7)式知：当 $2n\leqslant c$ 时，

$$y_{2n+2}-y_{2n+3}\geqslant\frac{1}{1+4\sqrt{\frac{1}{c}}}\cdot\frac{1}{1+4\sqrt{\frac{1}{2c}}}\cdots\frac{1}{1+4\sqrt{\frac{1}{nc}}}\cdot\frac{1}{2}c$$

从而对于 $n_0=[\frac{c}{2}]+1$，由引理1及 $2(n_0-1)\leqslant c$ 知

$$y_{2n_0}-y_{2n_0+1}\geqslant\frac{1}{2}c\Big/e^{8\sqrt{\frac{n_0}{c}}}\geqslant\frac{c}{2e^8}>6.\tag{8}$$

下面就 $n\geqslant n_0$ 进行讨论：

如果对某个 $n\geqslant n_0$，$\alpha=y_{2n}-y_{2n+1}\geqslant 3$，则

$$(n-1)c\alpha - 2nc \geqslant 3(n-1)c - 2nc = (n-3)c \geqslant 0.$$

从而由(4)式，

$$y_{2n+2} - y_{2n+3} \geqslant \frac{(2n+1)2n\alpha c + (n+1)\alpha c}{[(2n+1)c + y_{2n+1}][2nc + y_{2n}]} c$$

$$\geqslant \left(1 + \frac{1}{4n}\right)\alpha \Big/ \left(1 + 4\frac{1}{\sqrt{nc}}\right), \qquad (9)$$

记 $N = \min\{n : n \geqslant n_0, y_{2n+2} - y_{2n+3} \leqslant 3\}$，则当 $n < N$ 时，$y_{2n} - y_{2n+1} > 3$. 于是反复利用(9)式知：

$$3 \geqslant y_{2N+2} - y_{2N+3}$$

$$\geqslant \frac{\left(1+\frac{1}{4n_0}\right)\left(1+\frac{1}{4(n_0+1)}\right)\cdots\left(1+\frac{1}{4N}\right)\cdot\frac{c}{2e^8}}{\left(1+\frac{4}{\sqrt{n_0c}}\right)\cdots\left(1+\frac{4}{\sqrt{Nc}}\right)}$$

$$\geqslant \frac{1}{2}\left(\frac{N+1}{n_0}\right)^{\frac{1}{8}} \cdot c \Big/ \left[e^8 \cdot e^{8\left(\sqrt{\frac{N}{c}} - \sqrt{\frac{n_0-1}{c}}\right)}\right]$$

$$\geqslant \frac{1}{2}\left(\frac{N}{c}\right)^{\frac{1}{8}} \cdot c \Big/ e^{8\sqrt{\frac{N}{c}}}.$$

由此易得存在绝对常数 $m > 0$，使 $N > mc\ln^2 c$.

至此，命题 3 的 2) 立即可得. □

参考文献

[1] 吴伟朝，陈计，征解问题 85*，《数学通讯》，1992 年第 2 期，40；1994 年第 4 期，36 — 37.

[2] 吴伟朝，数学奥林匹克问题 21，《中学数学》(武汉)，1992 年第 4 期，49；1992 年第 5 期，48.

两个几何题的推广

上海教育出版社　叶中豪

(一)

“如图1，以任意四边形 $ABCD$ 四边向形外作四个正方形，依次将这些正方形的中心记为 E、F、G、H，那么，成立 $EG \perp FH$，且 $EG = FH$.”

注记　这是一个常见的几何习题，在梁绍鸿《初等数学复习及研究(平面几何)》一书中，它被列为习题十三第9题. 北京大学出版社数学小丛书・智慧之花(第3辑)《乘电梯・翻硬币・游迷宫・下象棋》一书第109页所引的参考文献表明，该题的历史可上溯至1877年(法国).

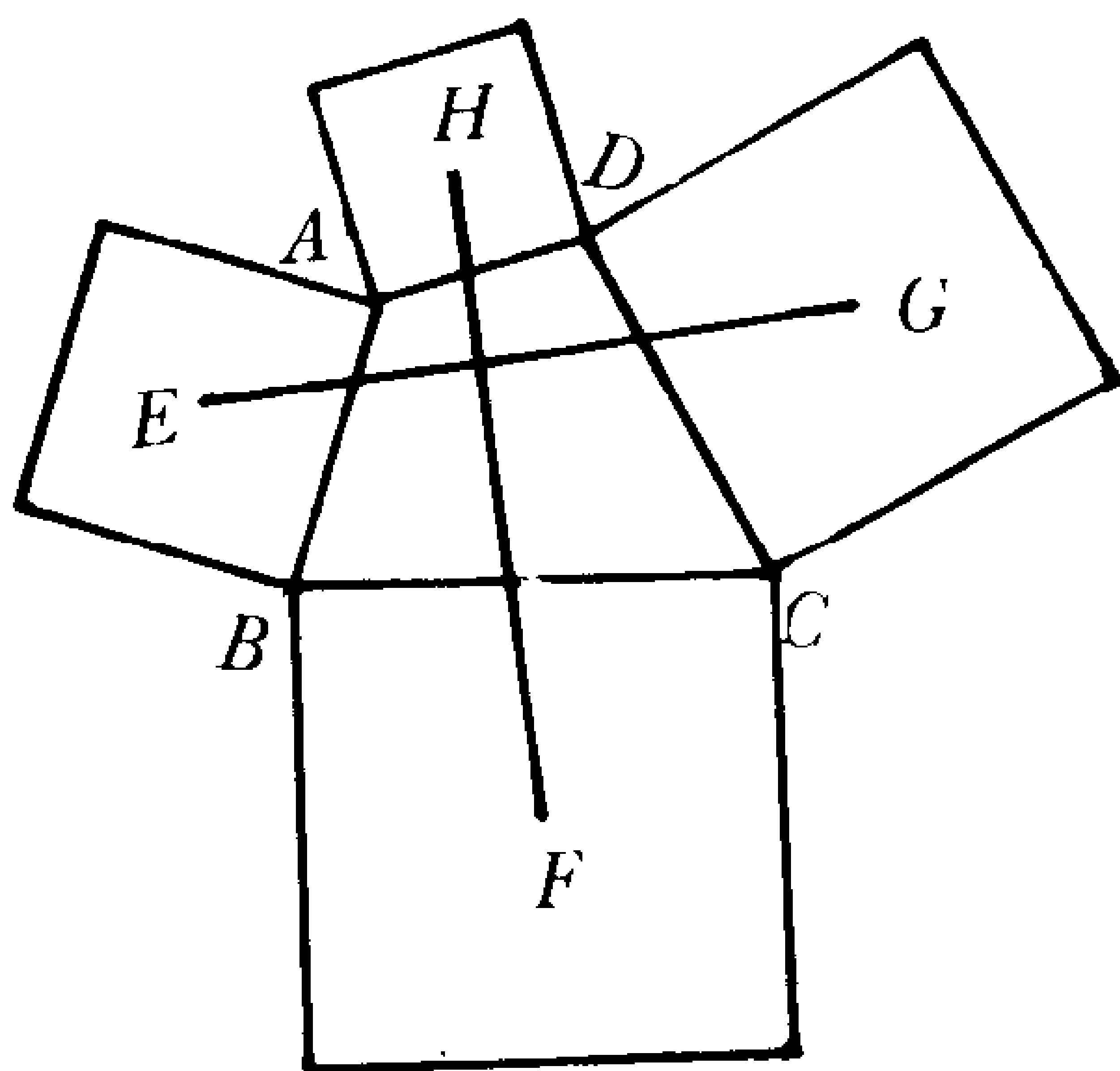


图　1

先对本题的结论作一些分析.

衡量一个几何命题优美与否，往往看它的题设要求是否简洁. 题设愈宽，结论愈强，好比说“它吃的是草，挤出的是奶”，其价值自然就高；相反，条件繁琐的命题一般说就不漂亮. 本题的精彩之处就在于它对四边形 $ABCD$ 没有限制条件，即我们可

以不断改变 $ABCD$ 的形状，尽管线段 EG 和 FH 的相对位置随之发生变化，但其夹角和比值却始终保持不变. 在这类“寓不变于运动之中”的奇妙现象背后，是不是还能探索到更奥妙、更普遍的规律呢？

带着这样一种动机，我们提出如下更一般的问题：

如图 2，在任意四边形 $ABCD$ 四周分别作四个固定形状的三角形，一般说 EG 和 FH 的夹角和比例是不能确定的(它还依赖于中间的四边形 $ABCD$ 的具体形状). 但如果周围四个三角形选择得巧合，它们互相之间具有某种约束，会不会使 EG 和 FH 的夹角和比例同 $ABCD$ 的形状脱离关系？(上面那题正属于这种情况)

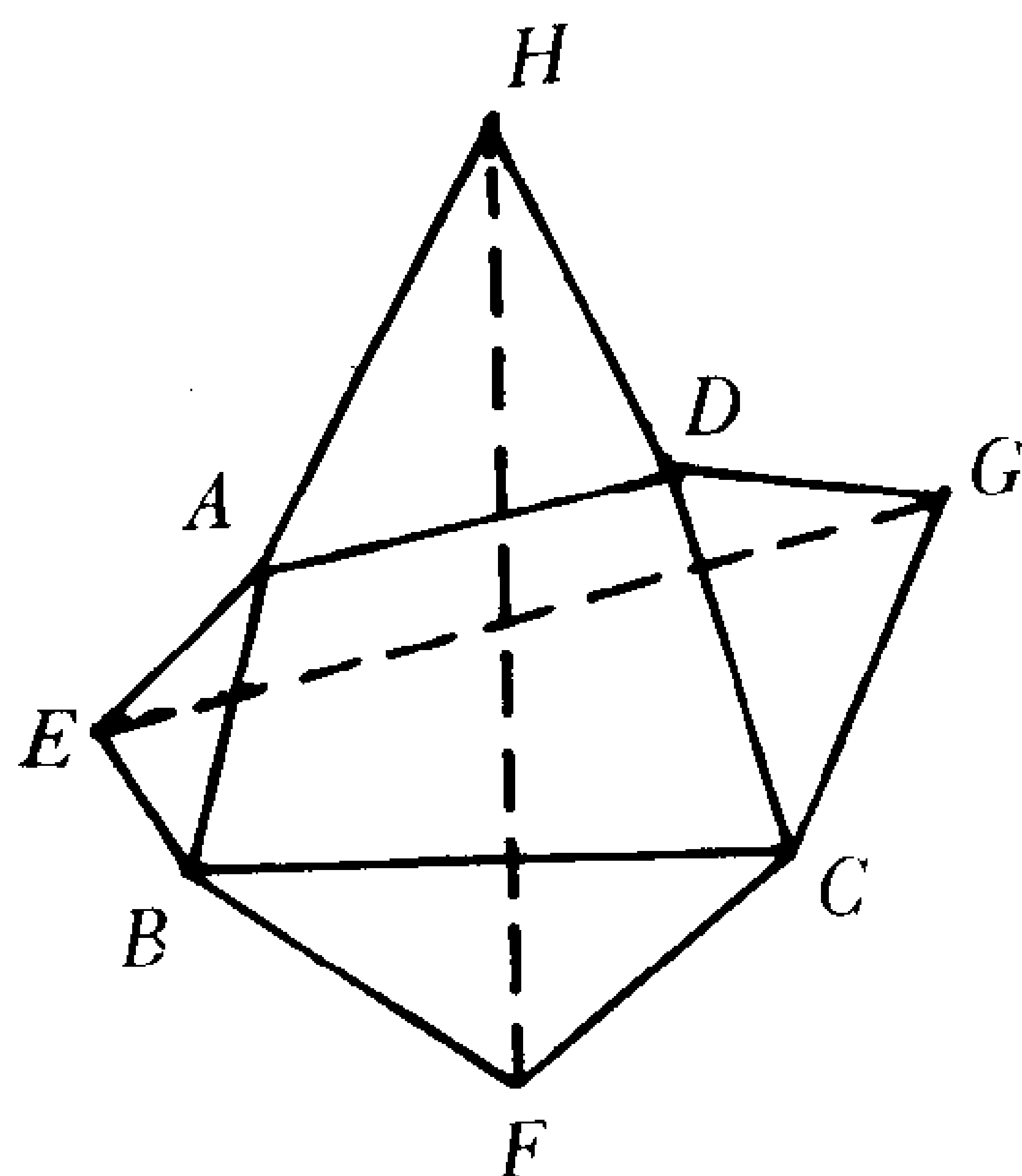


图　2

下面借助复数的方法寻求答案.

将图形置于复平面上考虑，点的字母兼用以表示这点对应的复数，那么便能在点与点之间建立起运算关系.

设 $z_1=\dfrac{E-B}{A-B}, z_2=\dfrac{D-C}{G-C}, z_3=\dfrac{D-H}{A-H}, z_4=\dfrac{B-F}{C-F}$(图 3)，则 z_1, z_2, z_3, z_4 这四个复数刻划了周围四个三角形的形状.

注记　事实上，向量 BA 乘以 z_1 后，变成了向量 BE，根据复数乘法的几何意义，$\triangle BAE$ 的形状与复平面上由 $0, 1, z_1$ 三点构成的三角形形状相似. 其余三个三角形也可照此解释.

经简单运算，得

$$E=z_1A+(1-z_1)B,$$

$$F=\frac{1}{1-z_4}B+\frac{z_4}{z_4-1}C,$$

$$G=\frac{z_2-1}{z_2}C+\frac{1}{z_2}D,$$

$$H=\frac{z_3}{z_3-1}A+\frac{1}{1-z_3}D.$$

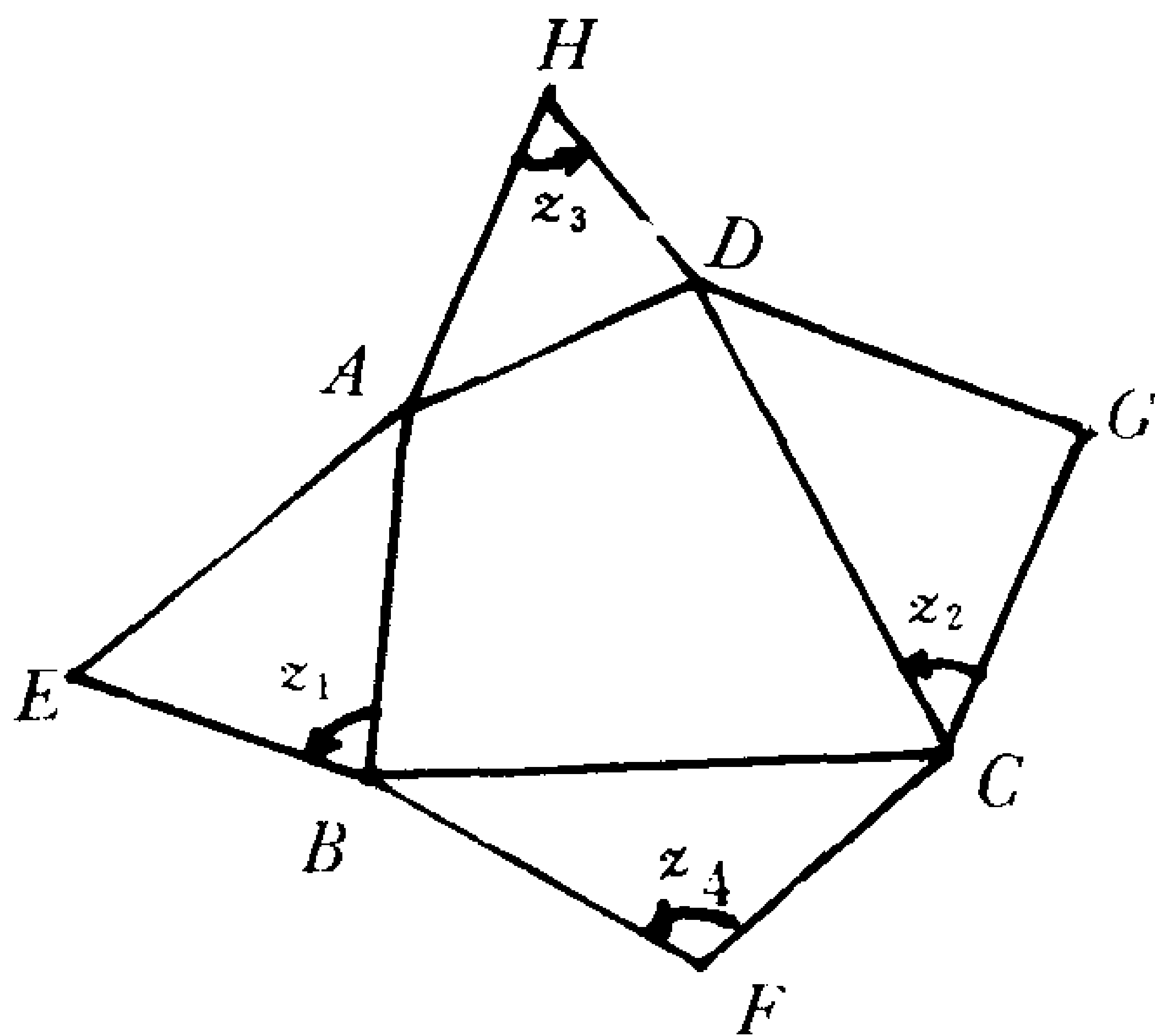


图 3

线段 EG 和 FH 的夹角和比值可由复数式 $\frac{H-F}{G-E}$ 来描述，该复数的辐角正是 EG 和 FH 的夹角，其模的大小则代表它们的比值.

我们来计算一下这个复数表达式：

$$\frac{H-F}{G-E}=\frac{\frac{z_3}{z_3-1}A+\frac{1}{z_4-1}B+\frac{z_4}{1-z_4}C+\frac{1}{1-z_3}D}{-z_1A+(z_1-1)B+\frac{z_2-1}{z_2}C+\frac{1}{z_2}D}.$$

为了使它由 z_1,z_2,z_3,z_4 这四个复数就能完全决定，而与点 A、B、C、D 的具体选择无关，必要也只需要使式中 A、B、C、D 前的相应系数成比例，即满足：

$$\frac{z_3}{z_1(1-z_3)}=\frac{1}{(z_4-1)(z_1-1)}=\frac{z_4z_2}{(1-z_4)(z_2-1)}=\frac{z_2}{1-z_3}.$$

注记 由于可以互推，在这个连等式中，有一个等号是多余的. 事实上，上式中恰有两个复数是独立的，另两个可由它们相应确定.

经推导，上述关系式等价于

$$\begin{cases}z_3=z_1z_2, & ①\\ z_4=\dfrac{z_2-1}{z_2(1-z_2)}. & ②\end{cases}$$

这正是我们所需要探寻的充要条件，至此前面提出的问题得到正面答复. 下面的工作是把这个充要条件翻译成几何语言.

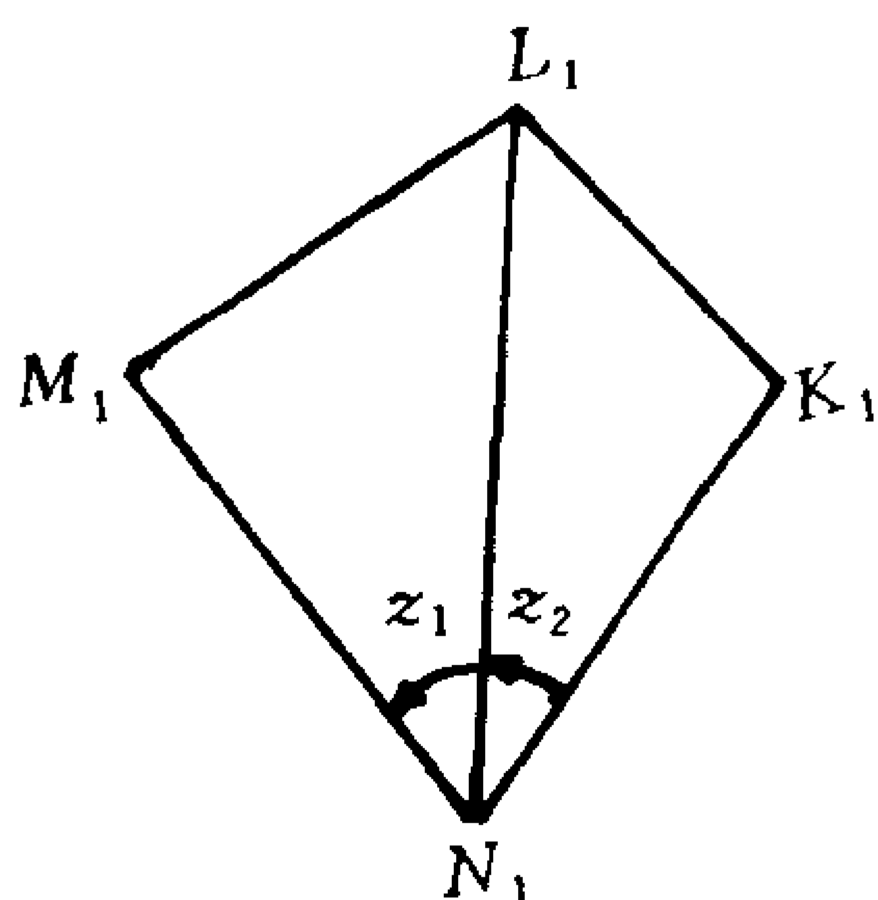


图 4

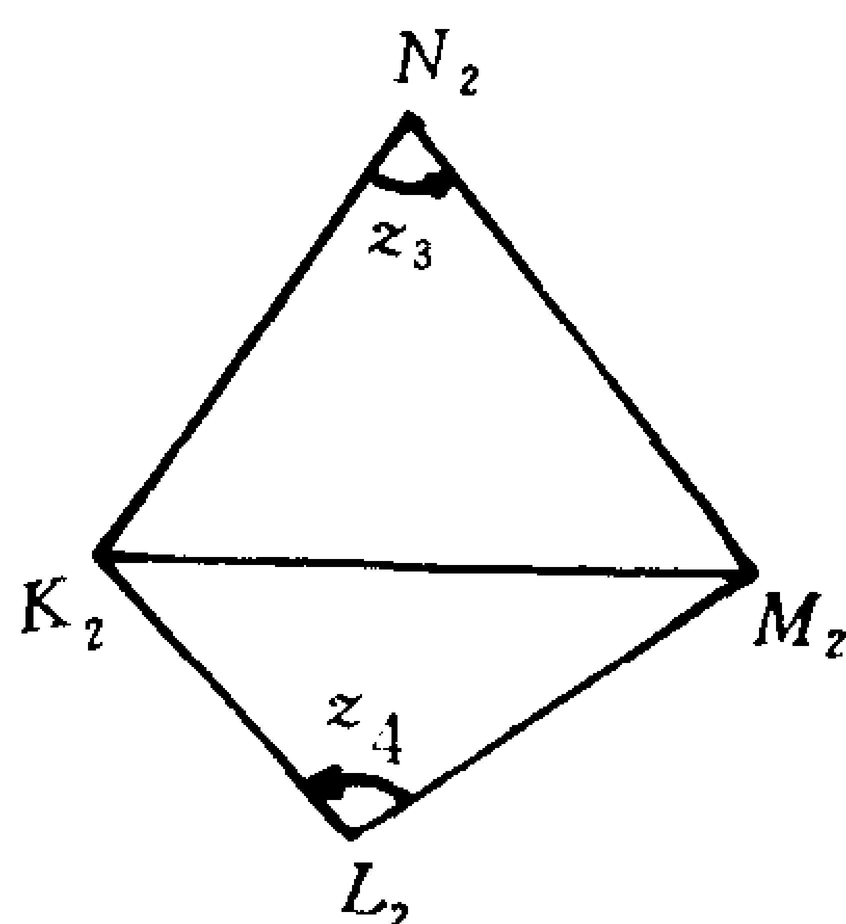


图 5

如图 4，将 $\triangle EBA$ 和 $\triangle GDC$ 经适当放缩拼合成一个四边形 $K_1L_1M_1N_1$（注：即通过相似变换，使 AB 和 CD 的长度变得相等，三角形形状不变，然后衔接起来，或者干脆说，作 $\triangle M_1N_1L_1 \backsim \triangle EBA$，$\triangle K_1L_1N_1 \backsim \triangle GDC$）. 同样，将 $\triangle FCB$ 和 $\triangle HAD$ 也如此拼合起来，获得四边形 $K_2L_2M_2N_2$（图 5）.

很明显，$z_3 = z_1z_2$ 意味着 $\triangle N_1K_1M_1 \backsim \triangle N_2K_2M_2$；同样可以验证②式的涵义是 $\triangle L_1M_1K_1 \backsim \triangle L_2M_2K_2$（读者不妨一试）. 由此说明上述 ①、② 条件合起来，相当于四边形 $K_1L_1M_1N_1 \backsim K_2L_2M_2N_2$.

从而，我们可以把前面的结果改述成如下命题：

命题 1 如图 6，给定四边形 $KLMN$，并设 KM 和 LN 的夹角为 θ，$KM : LN = k$. 将 $KLMN$ 以两种方式剖分成三角形，然后如图 7 所示在任意四边形 $ABCD$ 的四周作它们的相似形，具体地，使 $\triangle HAD \backsim \triangle NKM$，$\triangle FCB \backsim \triangle LMK$，$\triangle EBA \backsim \triangle MNL$，$\triangle GDC \backsim \triangle KLM$.（注意：图 7 中左、右两个三角形是颠倒放置的！）结论：EG 和 FH 的夹角一定为 θ，而且 $EG : FH = k$.

注记 1 取 $KLMN$ 为正方形，就得到本文开头部分的那个特例. 又如将 $KLMN$ 取成有一内角为 60° 的菱形，则可编造出如下题目："已知 $\triangle HAB$、

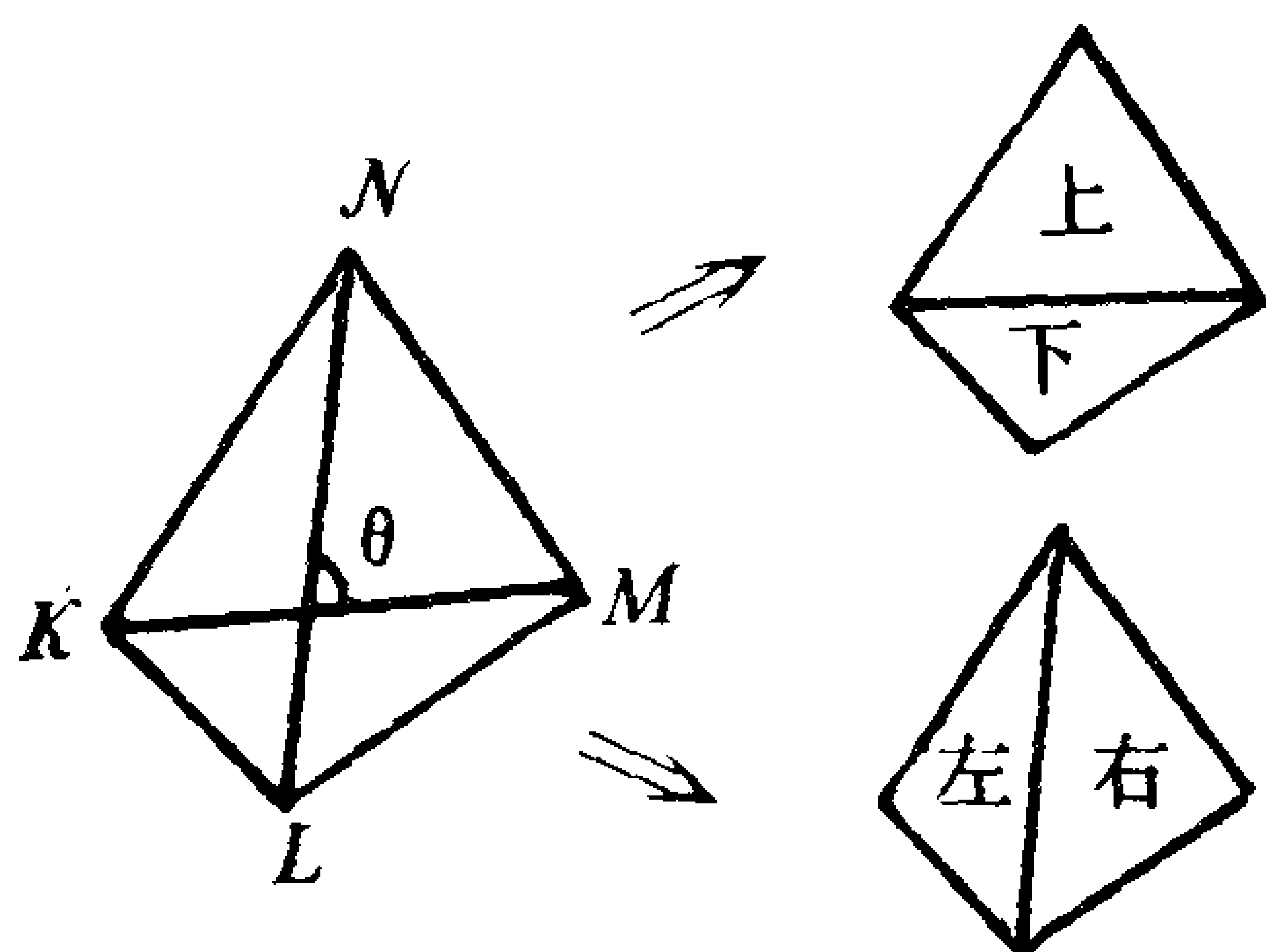


图 6

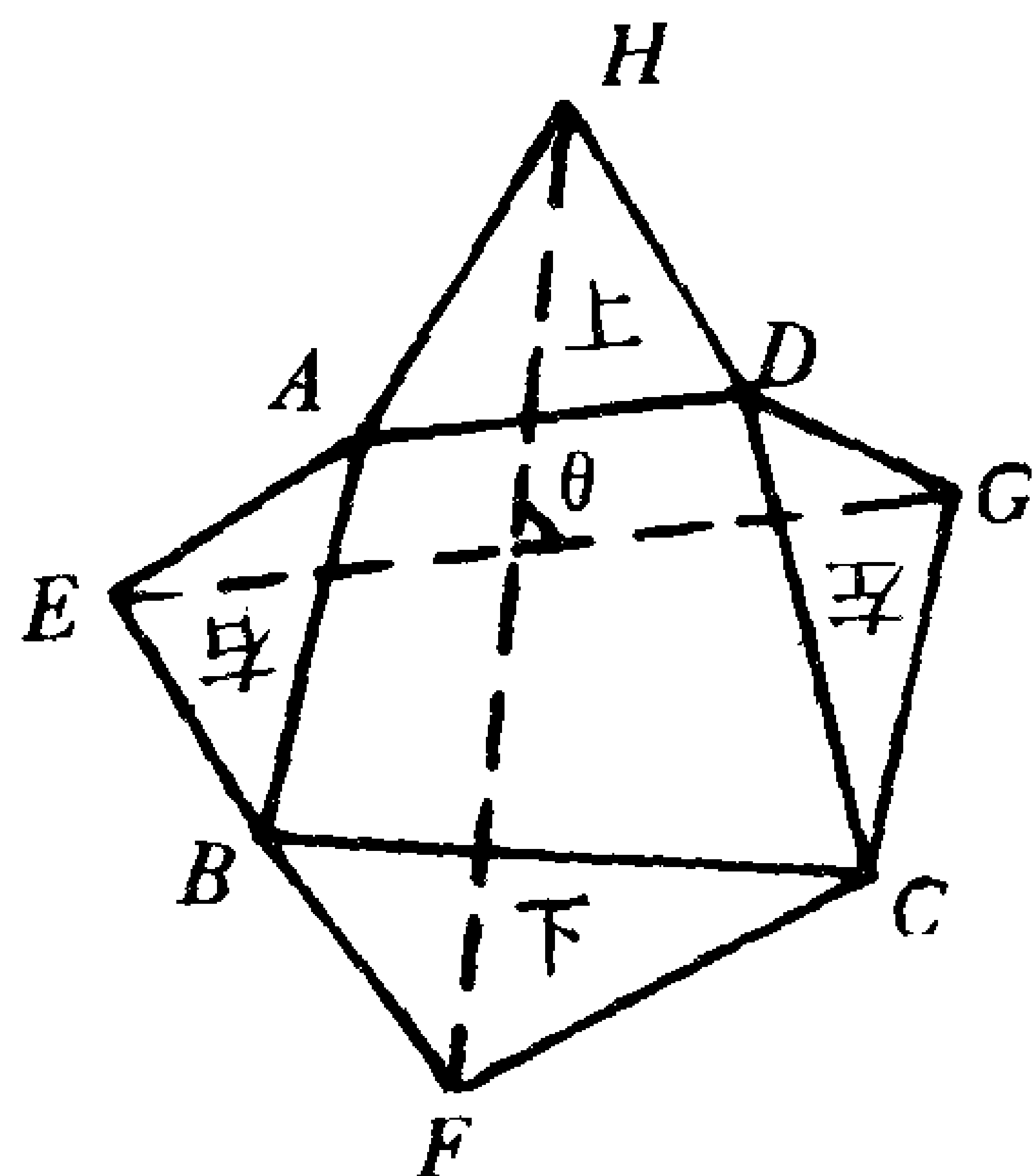


图 7

$\triangle FCB$ 是正三角形，而 $\triangle EBA$、$\triangle FCB$ 是 $120°$ 顶角的等腰三角形，则 $FH \perp EG$，且 $FH = \sqrt{3}\,EG$（图 8）.”读者还可试举出命题 1 的其它特例.

注记 2 可以给出命题 1 的纯几何证明，但叙述稍烦，此处不予介绍. 命题的结论是笔者 1991 年 4 月的时候提出的，曾在通信中告诉一些友人，先后收到了江苏溧水县石湫中学李同林和湖南岳阳师范专科学校肖振纲两位老师寄来的证明，在此予以感谢.

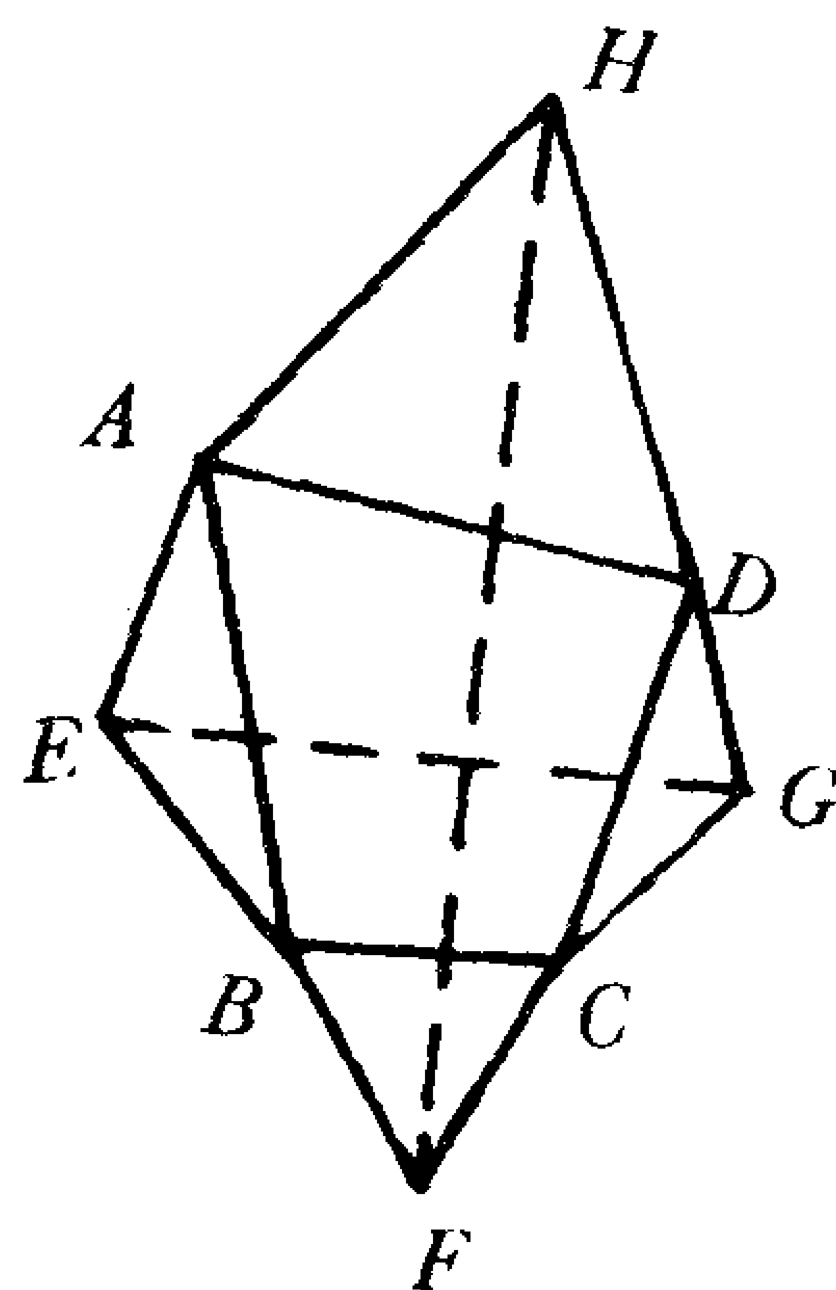


图 8

(二)

在《数学通讯》1994 年第 7 期的问题征解栏上,笔者提出了一组几何题目,它们属于如下类型:以 $\triangle ABC$ 的三边向形外作三个一定形状的三角形 $\triangle DBC$、$\triangle ECA$、$\triangle FAB$(图 9),要求从 D、E、F 三点出发,并根据周围三个三角形的形状,倒回去确定原 $\triangle ABC$ 的位置.

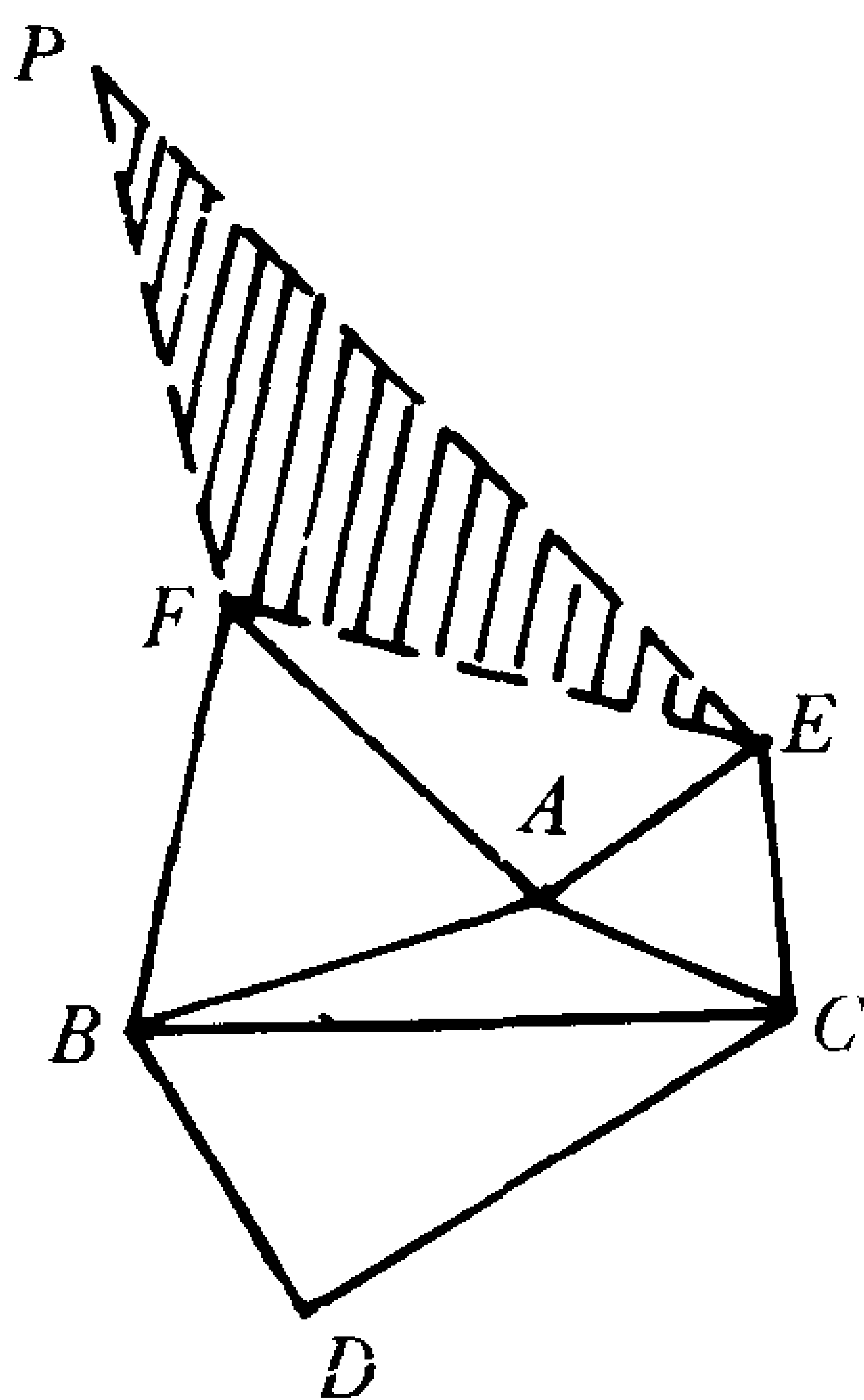


图 9

在杂志中,笔者采取的是如下办法:通过巧妙构造 $\triangle PEF$,使 A 点的位置仅依赖于 P、D 两点(换句话说,就是可说出 $\triangle PAD$ 的形状),从而先确定 A 点,尔后不难确定整个 $\triangle ABC$. 举一个例子说,设 $\triangle DBC$ 是 30° 锐角的直角三角形,其中 $\angle D$ 是直角,$\angle BCD$ 等于 30°;$\triangle ECA$、$\triangle FAB$ 是正三角形,那么可如下构造 $\triangle PEF$:使 $\angle PFE = 120°$,$\angle EPF = \angle FEP = 30°$,即作一个底角为 30° 的等腰三角形(请参见图 9). 这时可以确定 $\angle PAD = 120°$,且 $PA = 2AD$. 由此,不难由 P、D 两点的位置定出点 A 的位置,从而也就不难将 $\triangle ABC$ 复原.

这里,自然产生一个问题:$\triangle PEF$ 的构造方案必然取决于周围三个三角形,即 $\triangle DBC$、$\triangle ECA$、$\triangle FAB$ 的具体形状,那么,对于一般的这样三个三角形,是否都能成功地构造 $\triangle PEF$ 呢?构造的具体办法又是如何的呢?

下面就来解决这个问题，为此，我们先研究一个特定的图形.

设有四个三角形：$\triangle PKN$、$\triangle OKL$、$\triangle OMN$、$\triangle QML$，其形状都是事先给定的.将它们按图10的方式互相衔接起来（图中用阴影显示），假定这些三角形的相对大小并不给定，也就是说，整个图形的形状蕴含不确定因素.一般说来，以P、O、Q三点为顶点的三角形形状也是不能确定的（还需取决于图中白色三角形的形状）.

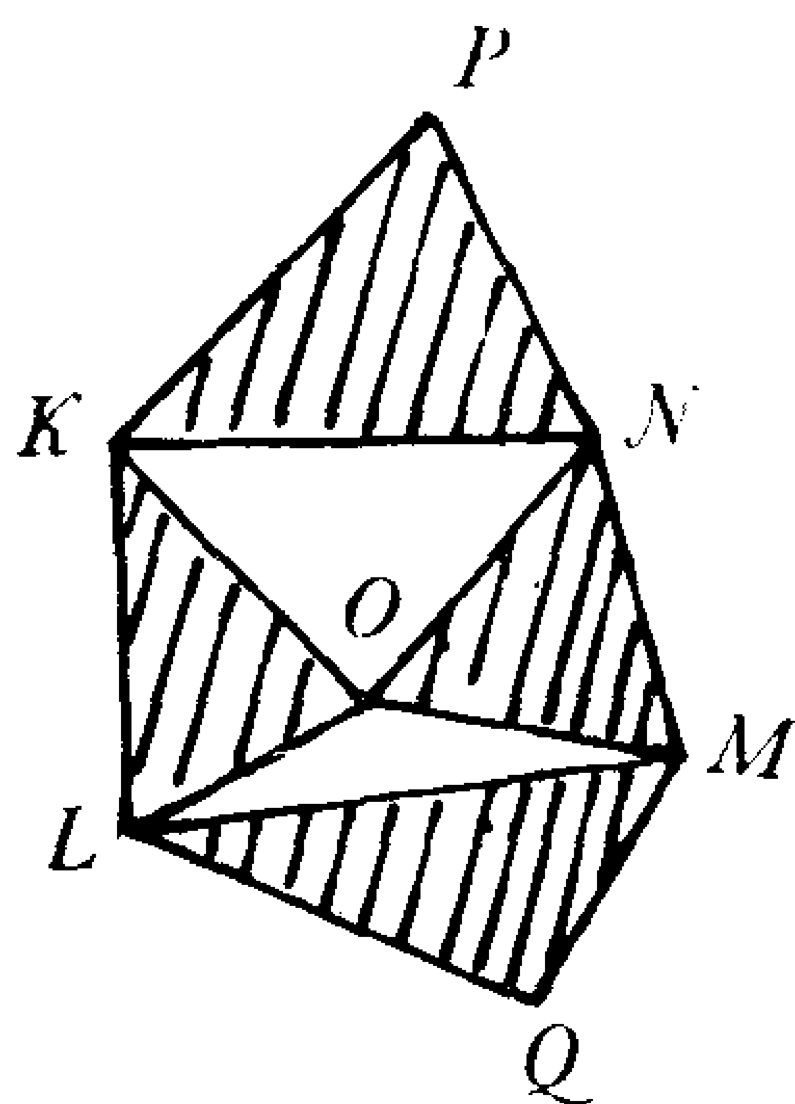


图 10

但是，同前面一节叙述的问题相类似，如果这四个阴影三角形的形状选择得巧合，那么就有可能使$\triangle POQ$的形状仅与四个阴影三角形的形状相关，而与图10中白色三角形（即$\triangle OLM$或$\triangle ONK$）的形状脱离关系.

为此，我们仍用复数的办法来探讨.将整个图形放置在复平面上，如图11，设

$$z_1=\frac{N-P}{K-P},\qquad z_2=\frac{L-O}{K-O},$$
$$z_3=\frac{N-O}{M-O},\qquad z_4=\frac{L-Q}{M-Q}.$$

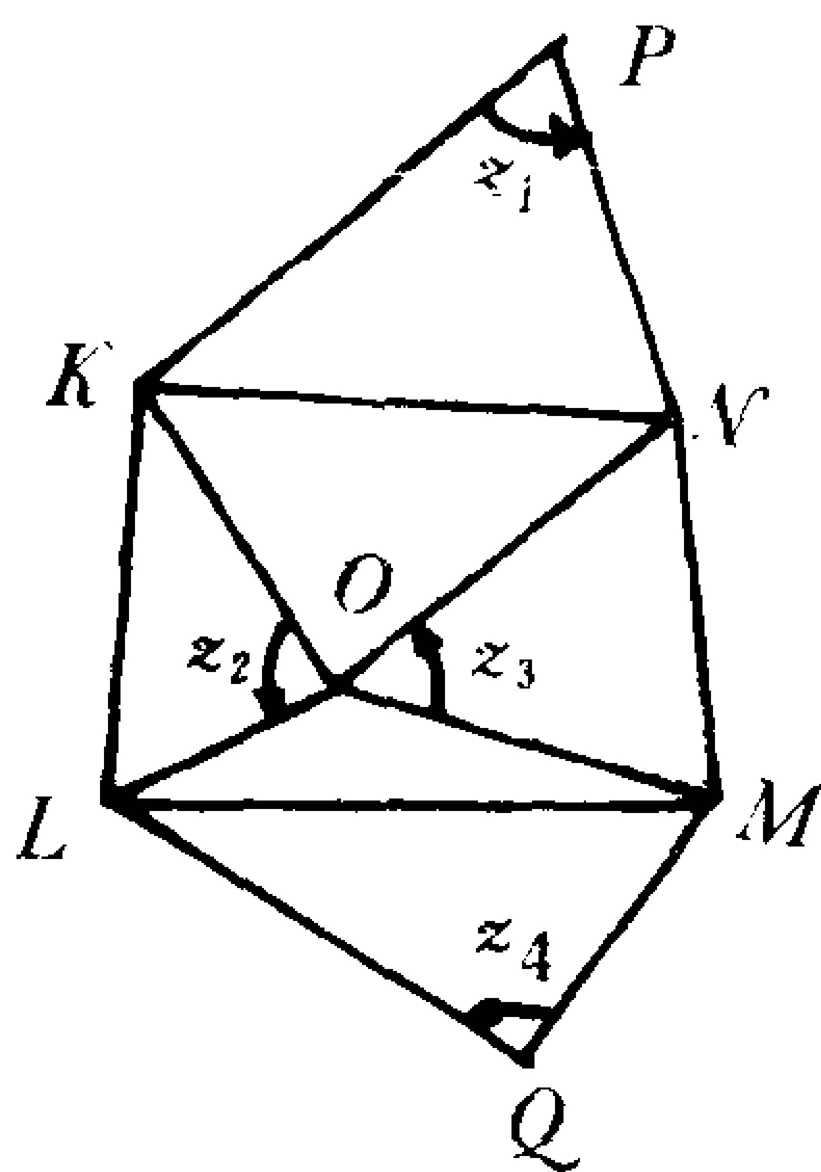


图 11

现分析$\triangle POQ$的形状，它可用复数

$$z=\frac{P-O}{Q-O}$$

来刻划，经计算表明（具体过程省略，读者可以试补）：为使z仅与z_1,z_2,z_3,z_4四个复数有关，而与整个图形的具体形状无关，其充要条件是

$$z_1z_4=z_2z_3. \qquad (*)$$

注记 为了计算简便起见，也可不妨将 O 点设为复平面原点，这样一来，

$$P=\frac{z_3M-z_1K}{1-z_1},\qquad Q=\frac{z_2K-z_4M}{1-z_4},$$

$$\therefore z=\frac{P}{Q}=\frac{1-z_4}{1-z_1}\cdot\frac{-z_1K+z_3M}{z_2K-z_4M}.$$

为使 z 只与 z_1,z_2,z_3,z_4 相关，必要也只要使字母 K、M 前的系数成比例，这样就较容易获得上述充要条件. 而且这时

$$z=-\frac{z_1(1-z_4)}{z_2(1-z_1)},$$

可见由此还能进一步回答 $\triangle POQ$ 的具体形状.

在此基础上，我们将它改述成如下命题：

命题 2 如图 10，如果四块阴影三角形满足如下附加条件：

$$\left.\begin{aligned}&\frac{PK}{KO}\cdot\frac{OL}{LQ}\cdot\frac{QM}{MO}\cdot\frac{ON}{NP}=1,\\ \text{且}\quad&\angle P+\angle Q=\angle KOL+\angle MON,\end{aligned}\right\}\qquad(**)$$

那么 $\triangle POQ$ 的形状由四块阴影三角形的形状就能确定，具体说：

(1) $\dfrac{PO}{OQ}=\dfrac{PK}{KN}\cdot\dfrac{NO}{OM}\cdot\dfrac{ML}{LQ}$（或 $=\dfrac{PN}{NK}\cdot\dfrac{KO}{OL}\cdot\dfrac{LM}{MQ}$），

(2) $\angle POQ$（若以右侧为内部）$=\angle PKN+\angle NOM+\angle MLQ$.

现将这一结果运用到前面的情形. 图 9 中，如下四个三角形：$\triangle PFE$、$\triangle AFB$、$\triangle ACE$、$\triangle DCB$，只要满足（* *）条件，就能使 $\triangle PAD$ 的形状得以确定. 这样，前面提出的问题便得到了正面回答：$\triangle PFE$ 的形状可以由 $\triangle ABC$ 周围的三个三角形，即 $\triangle DCB$、$\triangle ECA$、$\triangle FBA$ 的形状唯一确定（除非一些退化的例子，此处不详究），具体确定办法可参照关系式（* *）进行，即

$$\frac{PF}{PE}=\frac{FA}{AB}\cdot\frac{BD}{DC}\cdot\frac{CA}{AE},$$

$$\angle P=\angle FAB+\angle EAC-\angle D.$$

读者请不妨举一些特例试试.

以下，我们试图给出上述命题 2 的几何证法. 为此先回过头来，重新回顾分析一下命题 1. 如图 12，设四边形 $ABCD$ 周围四个

三角形满足命题 1 的要求,则不难验证如下两个关系成立：

(1) $\frac{HF}{EG}=\frac{HA}{AD}\cdot\frac{DC}{CG}$;

(2) $\angle\theta=\angle 1+\angle 2$.

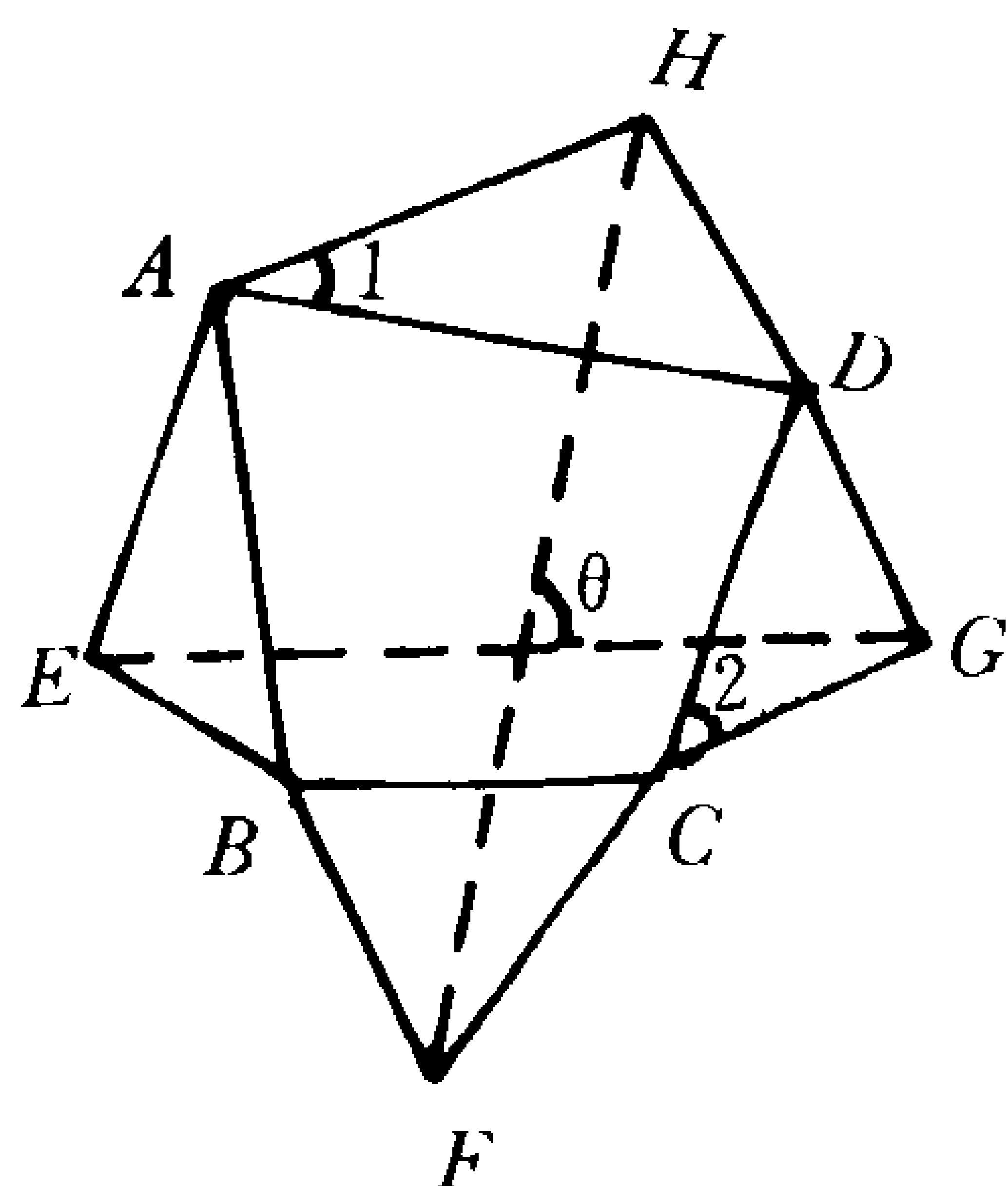


图 12

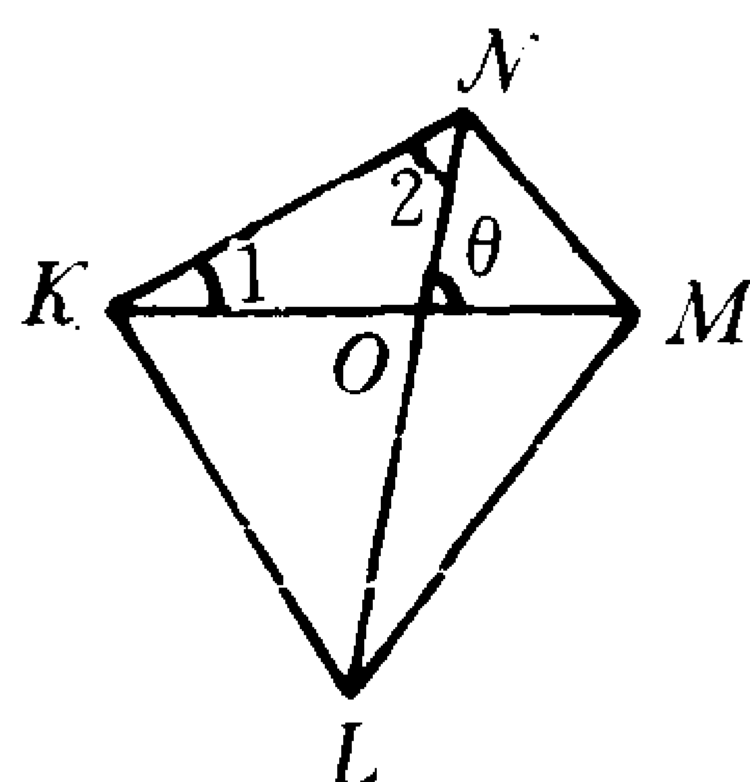


图 13

这是因为 $\triangle HAD\backsim\triangle NKM$, $\triangle GDC\backsim\triangle KLN$(图 13),于是根据命题 1,

$$\frac{HF}{EG}=\frac{NL}{KM}=\frac{NK}{KM}\cdot\frac{NL}{NK}=\frac{HA}{AD}\cdot\frac{DC}{CG};$$

$$\angle\theta=\angle NOM=\angle NKM+\angle KNL=\angle 1+\angle 2.$$

读者还可以仿此在图 12 中找出很多类似的关系来.

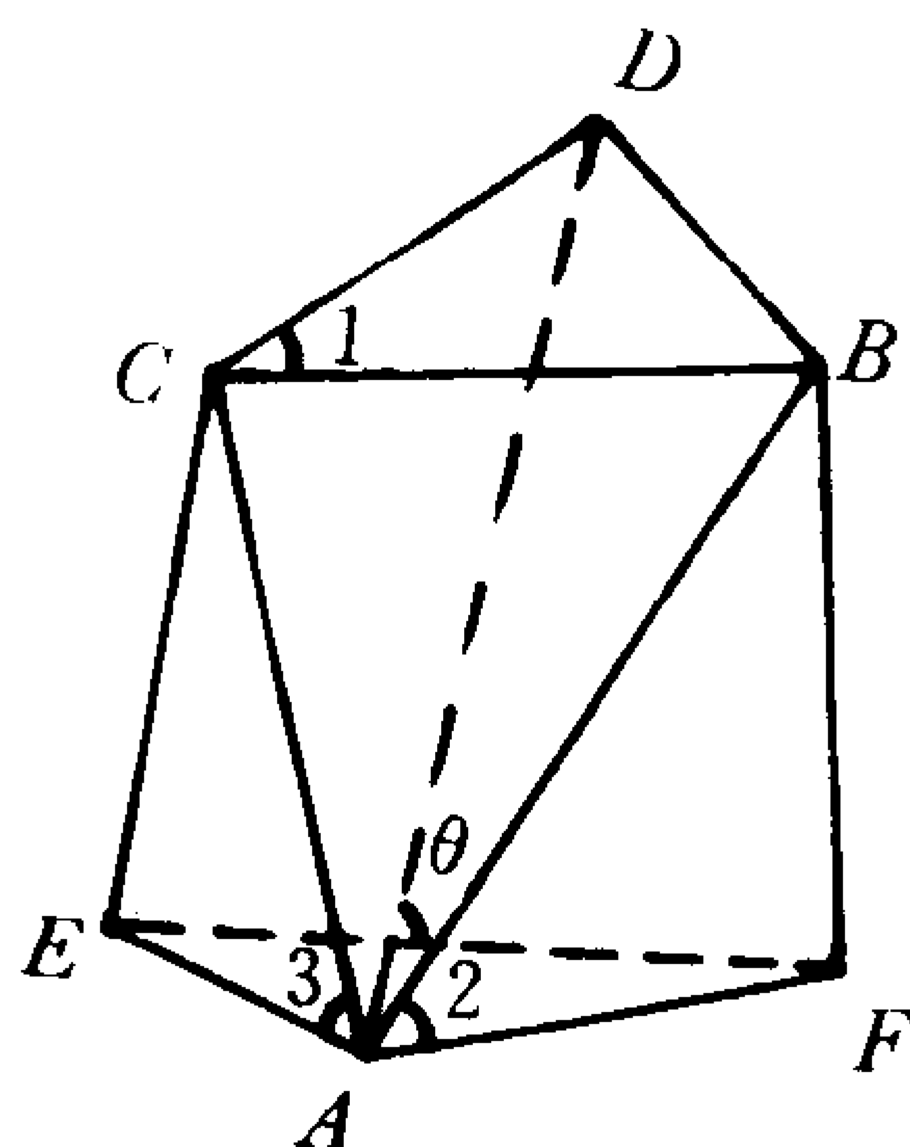


图 14

然后,观察图 12 的如下特例:当 B 和 C 两点恰好重合,这时 $\triangle FCB$ 退化成一点.针对这一特殊图形,我们特地提出如下引理(字母重

新作了调整)：

引理 1　在$\triangle ABC$周围作$\triangle DBC$、$\triangle ECA$、$\triangle FAB$，满足如下条件：

(i) $\dfrac{DC}{DB}=\dfrac{FA}{AB}\cdot\dfrac{CA}{AE}$;

(ii)$\angle D=\angle BAF+\angle CAE$(即$\angle 2+\angle 3$)，

设线段AD、EF的夹角为θ(图 14)，则成立：

(1) $\dfrac{AD}{EF}=\dfrac{DC}{CB}\cdot\dfrac{BA}{AF}$;

(2)$\angle\theta=\angle DCB+\angle BAF$(即$\angle 1+\angle 2$).

略证　作四边形$KLMN$，使$\triangle KLN\backsim\triangle FBA$，$\triangle MNL\backsim\triangle EAC$(图 15). 题设中(i)、(ii)两条件保证了$\triangle NKM\backsim\triangle DCB$，这样图 14 成了图 12 的特例，命题 1 对它适用，上面已经说过，(1)、(2)两条也就必然成立.

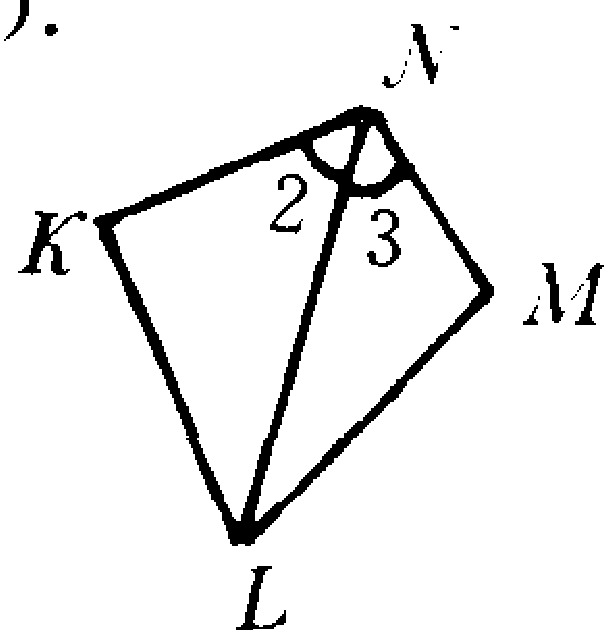


图　15

下面证明命题 2

证法一　如图 16，作线段OE、OF，使得如下两个条件同时成立：

(i) $\dfrac{OE}{OF}=\dfrac{PN\cdot OK}{PK\cdot ON}$;

(ii)$\angle 1+\angle 2=\angle P$.

易知$\triangle ONK$及其周围$\triangle PKN$、$\triangle EOK$、$\triangle FNO$满足引理 1 的条件.

根据命题 2 的题设，容易作如下推导：

$$\frac{QL}{QM}=\frac{PK}{KO}\cdot\frac{OL}{MO}\cdot\frac{ON}{NP}$$
$$=\frac{OL}{MO}\cdot\frac{OF}{OE};$$

$\angle Q=\angle KOL+\angle MON-\angle P=$

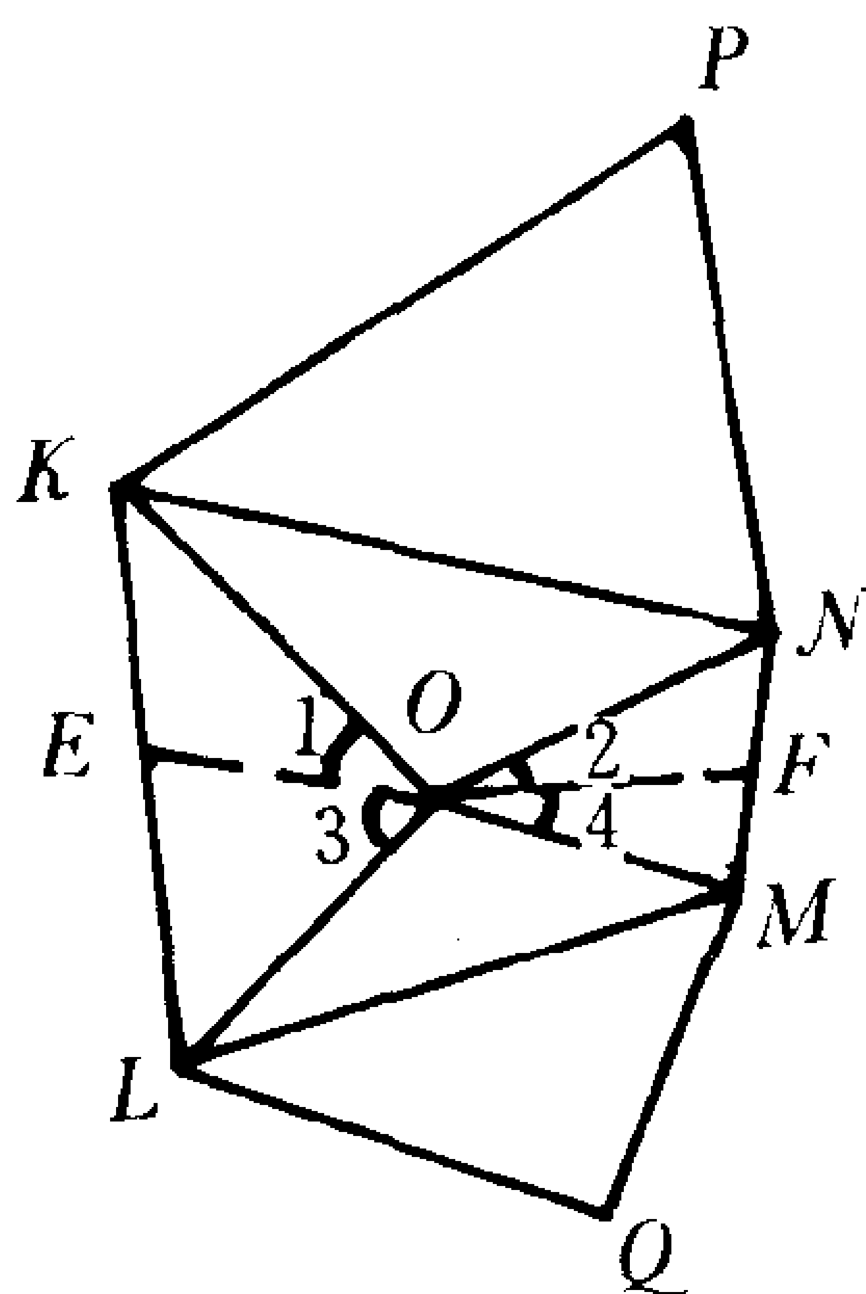


图　16

$\angle 1 + \angle 3 + \angle 2 + \angle 4 - \angle P = \angle 3 + \angle 4$，这表明 $\triangle OLM$ 及其周围三个三角形 $\triangle QML$、$\triangle FOM$、$\triangle ELO$ 也满足引理 1 的条件.

于是对上述两部分图形分别运用引理 1(图 17)，可得

(1) $\frac{PO}{OQ} = \frac{PO}{EF} \cdot \frac{EF}{OQ}$

$= \left(\frac{PK}{KN} \cdot \frac{NO}{OF}\right) \cdot \left(\frac{OF}{OM} \cdot \frac{ML}{LQ}\right)$

$= \frac{PK}{KN} \cdot \frac{NO}{OM} \cdot \frac{ML}{LQ}$；

(2) $\angle POQ$(以右侧为内部)

$= \angle\theta_1 + \angle\theta_2$

$= (\angle PKN + \angle NOF)$

$+ (\angle FOM + \angle MLQ)$

$= \angle PKN + \angle NOM$

$+ \angle MLQ$.

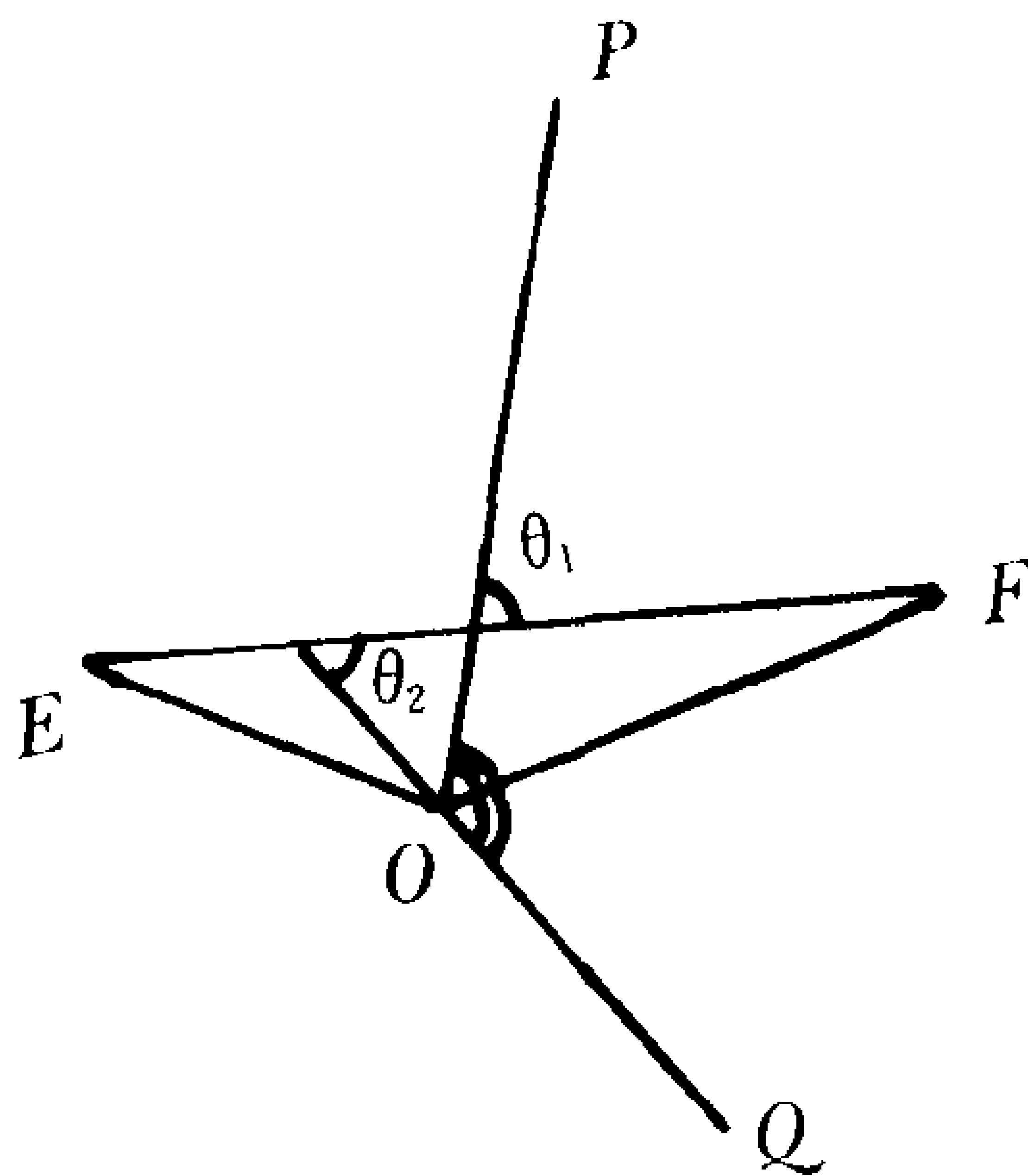


图 17

命题 2 证毕.

证法二

引理 2 设 O 是 $\triangle ABC$ 内一点，O 点关于 $\triangle ABC$ 的垂足三角形是 $\triangle DEF$(图 18)，则

$\angle EDF = \angle BOC - \angle A$，

$\angle FED = \angle COA - \angle B$，

$\angle DFE = \angle AOB - \angle C$.

证略.

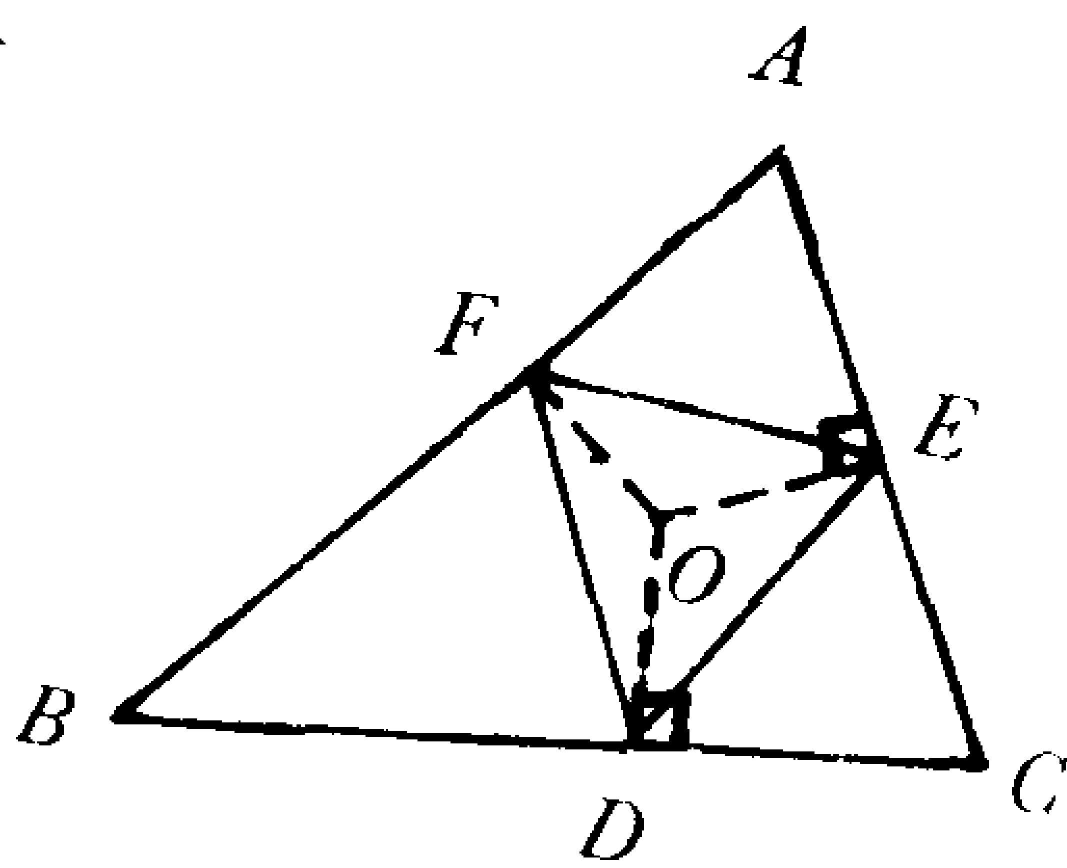


图 18

注记 1 引理 2 是关于垂足三角形的基本结论，通常称之为 Miquel 公式，见于《近世几何学》一书 § 186 (R. A. Johnson 著，邱丕荣译，商务印书馆 1937 年版).

注记 2 当 O 点位于 $\triangle ABC$ 外时，也有类似结论成立，但相应要作一些修正. 如针对图 19，结论为：

$\angle EDF = \angle BOC + \angle A$,

$\angle FED = \angle B - \angle COA$,

$\angle DFE = \angle C - \angle AOB$;

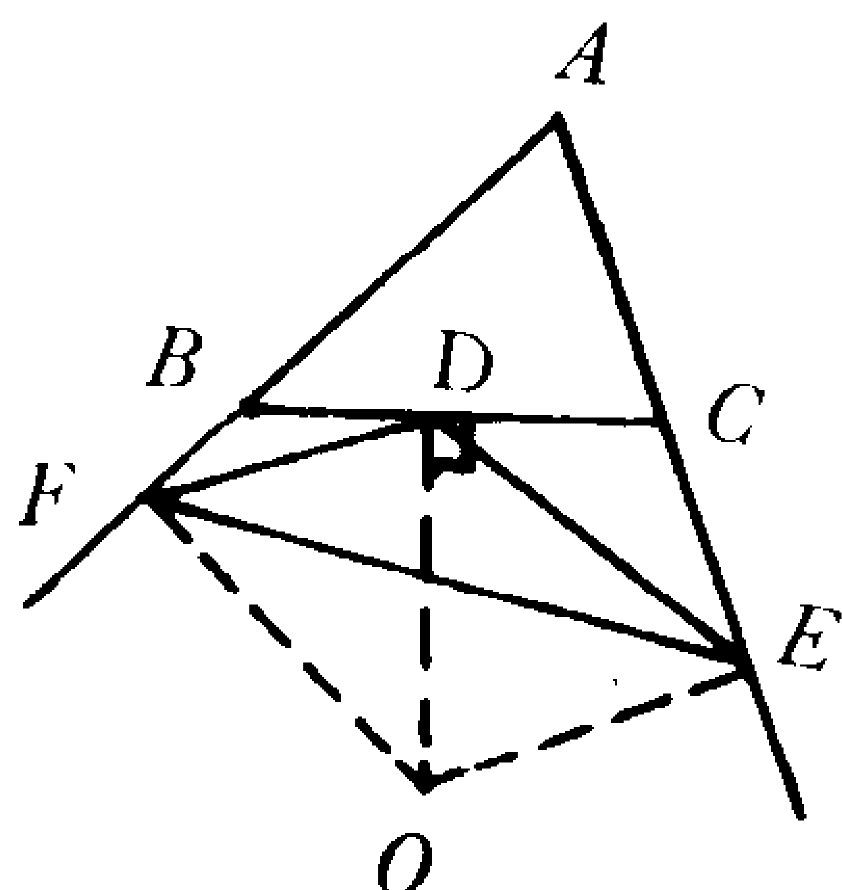


图 19

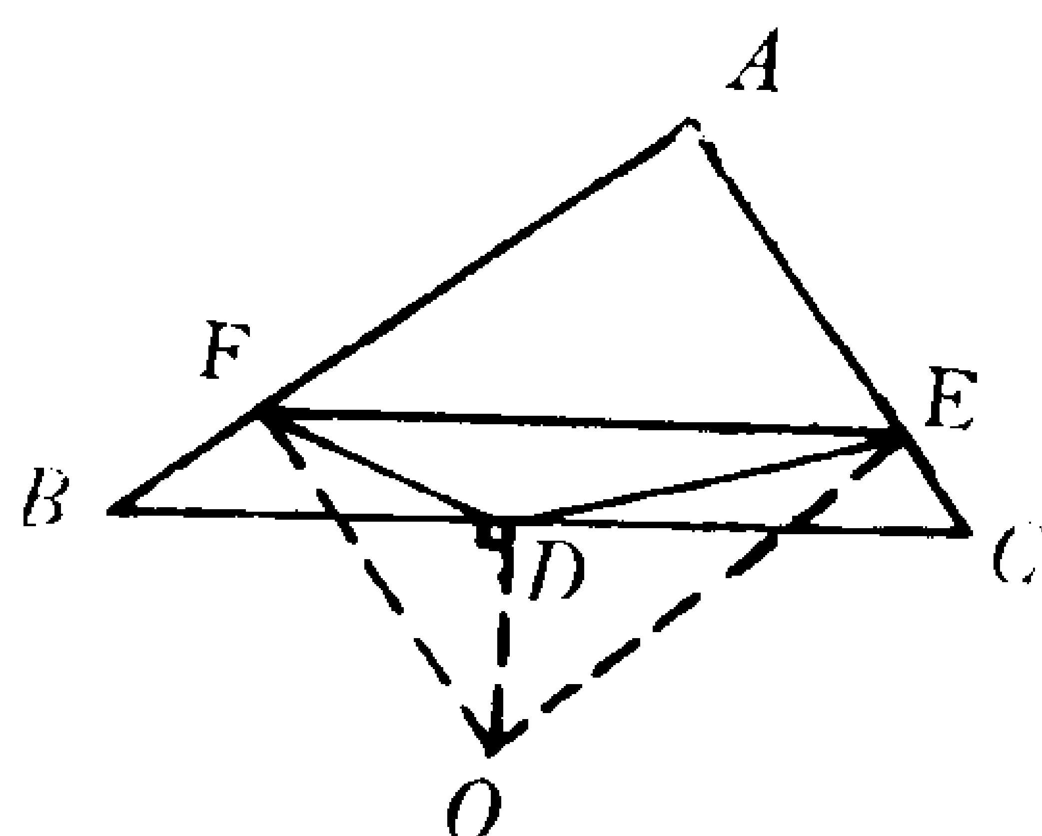


图 20

而针对图 20,结论为:

$\angle EDF = 2\pi - \angle BOC - \angle A$,

$\angle FED = \angle COA - \angle B$,

$\angle DFE = \angle AOB - \angle C$.

以下证明命题 2 中,O 点关于 $\triangle PKN$ 的垂足三角形(记为 $\triangle UVW$)相似于 O 点关于 $\triangle QLM$ 的垂足三角形(记为 $\triangle XYZ$).

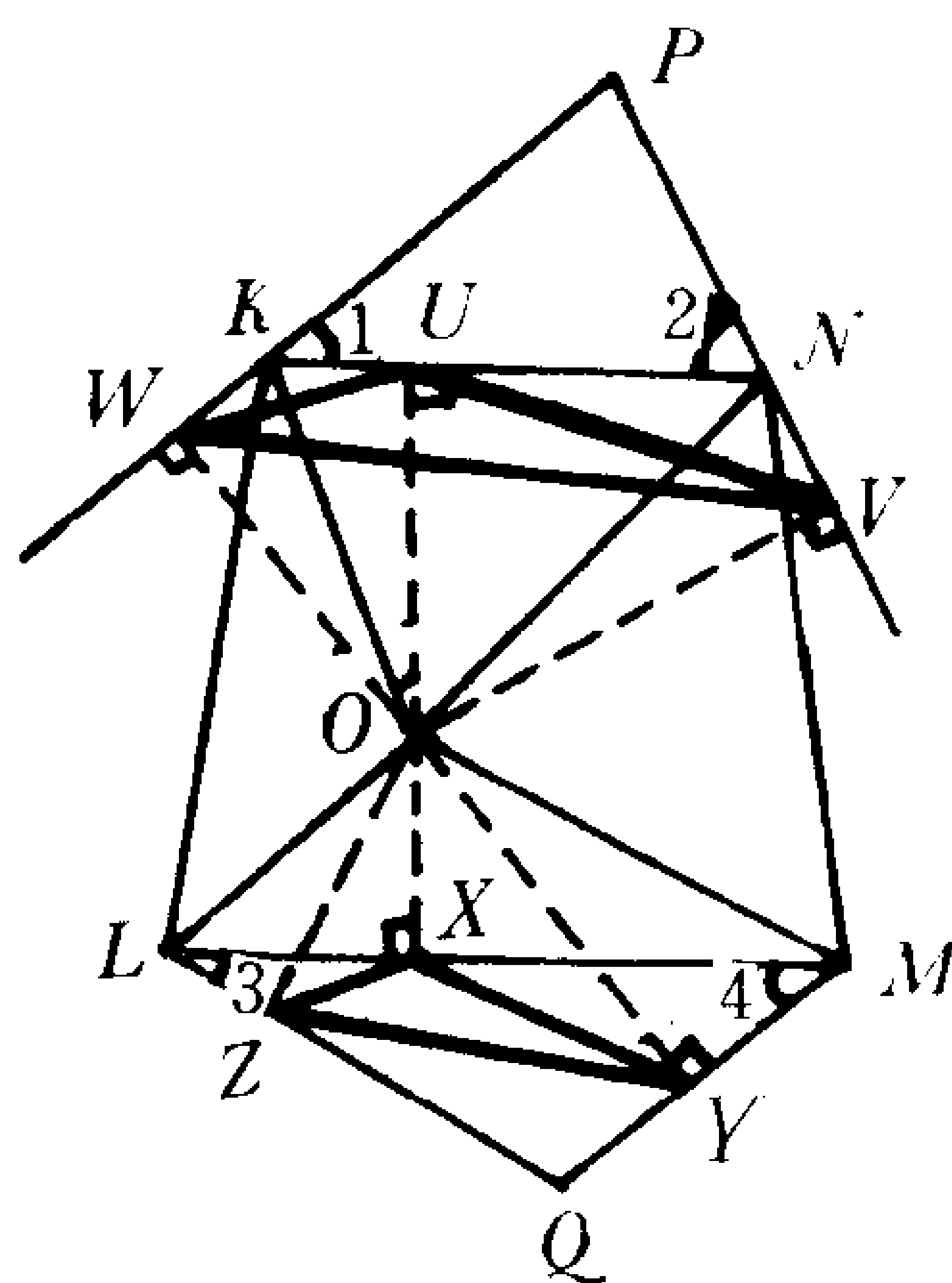


图 21

如图 21,由引理 2,

$\angle WUV = \angle KON + \angle P$,

$\angle ZXY = 2\pi - \angle LOM - \angle Q$,

而由命题 2 的题设,

$\angle P + \angle Q + \angle KON + \angle LOM = 2\pi$,

即得 $\qquad \angle WUV = \angle ZXY$. ③

对圆内接四边形 $OWKU$ 用正弦定理(注意 OK 是该圆的直径),得

$$UW = OK\sin\angle 1.$$

同理

$$UV = ON\sin\angle 2,$$

$$XZ = OL\sin\angle 3,$$

$$XY = OM\sin\angle 4.$$

于是

$$\frac{UW}{UV} = \frac{OK\sin\angle 1}{ON\sin\angle 2} = \frac{OK}{ON}\cdot\frac{PN}{PK},$$

$$\frac{XZ}{XY} = \frac{OL\sin\angle 3}{OM\sin\angle 4} = \frac{OL}{OM}\cdot\frac{QM}{QL},$$

由命题 2 的题设,

$$\frac{OK}{ON}\cdot\frac{PN}{PK} = \frac{OL}{OM}\cdot\frac{QM}{QL},$$

即得

$$\frac{UW}{UV} = \frac{XZ}{XY}. \quad ④$$

由 ③、④ 知 $\triangle UVW \backsim \triangle XYZ$ 成立.

(1) 分别对圆内接四边形 $PWOV$、$OZQY$ 用正弦定理,得

$$OP = \frac{WV}{\sin\angle P}, \qquad OQ = \frac{ZY}{\sin\angle Q}.$$

于是

$$\frac{OP}{OQ} = \frac{WV}{ZY}\cdot\frac{\sin\angle Q}{\sin\angle P},$$

而

$$\begin{aligned}&\frac{PK}{KN}\cdot\frac{NO}{OM}\cdot\frac{ML}{LQ}\\ =&\frac{\sin\angle 2}{\sin\angle P}\cdot\frac{ON}{OM}\cdot\frac{\sin\angle Q}{\sin\angle 4}\\ =&\frac{ON\sin\angle 2}{OM\sin\angle 4}\cdot\frac{\sin\angle Q}{\sin\angle P}\\ =&\frac{UV}{XY}\cdot\frac{\sin\angle Q}{\sin\angle P},\end{aligned}$$

即得

$$\frac{OP}{OQ} = \frac{PK}{KN}\cdot\frac{NO}{OM}\cdot\frac{ML}{LQ}.$$

(2) 根据引理 2,

$$\angle UVW = \angle PKN - \angle PON,$$

$$\angle XYZ = \angle MOQ - \angle MLQ.$$

$\because \triangle UVW \backsim \triangle XYZ,\quad \therefore \angle UVW = \angle XYZ,$

即 $\quad \angle PKN - \angle PON = \angle MOQ - \angle MLQ,$

由此即得 $\quad \angle POQ$(以右侧为内部)

$$= \angle PKN + \angle NOM + \angle MLQ. \quad \square$$

注记 上述证法是笔者受江苏昆山市亭林中学胡福林老师1994年8月26日来信的启发而找到的.

下面介绍命题2的第三种证法,是由浙江东阳市东阳中学高三(6)班郭军伟同学提供的(1994年9月8日来信).

证法三

引理3 (托勒密定理的推广)如图22,在四边形$ABCD$中,成立

$$AC^2 \cdot BD^2 = AB^2 \cdot CD^2 + AD^2 \cdot BC^2 - 2AB \cdot CD \cdot AD \cdot BC\cos(\angle A + \angle C).$$

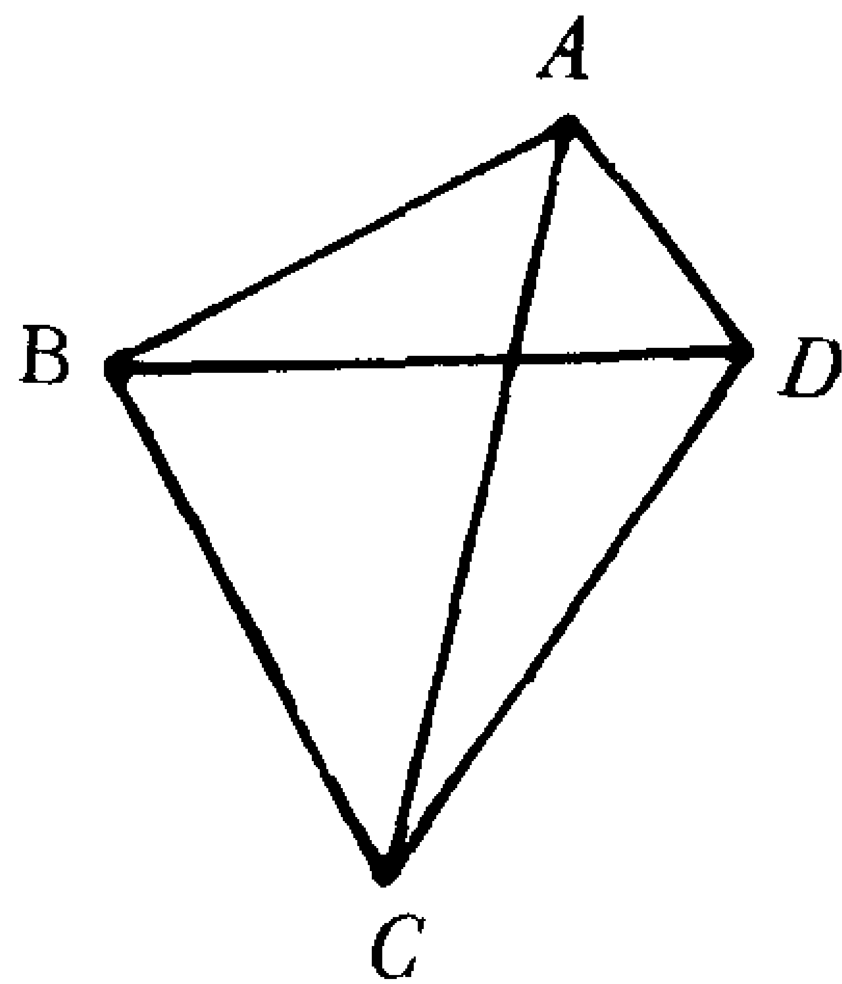


图 22

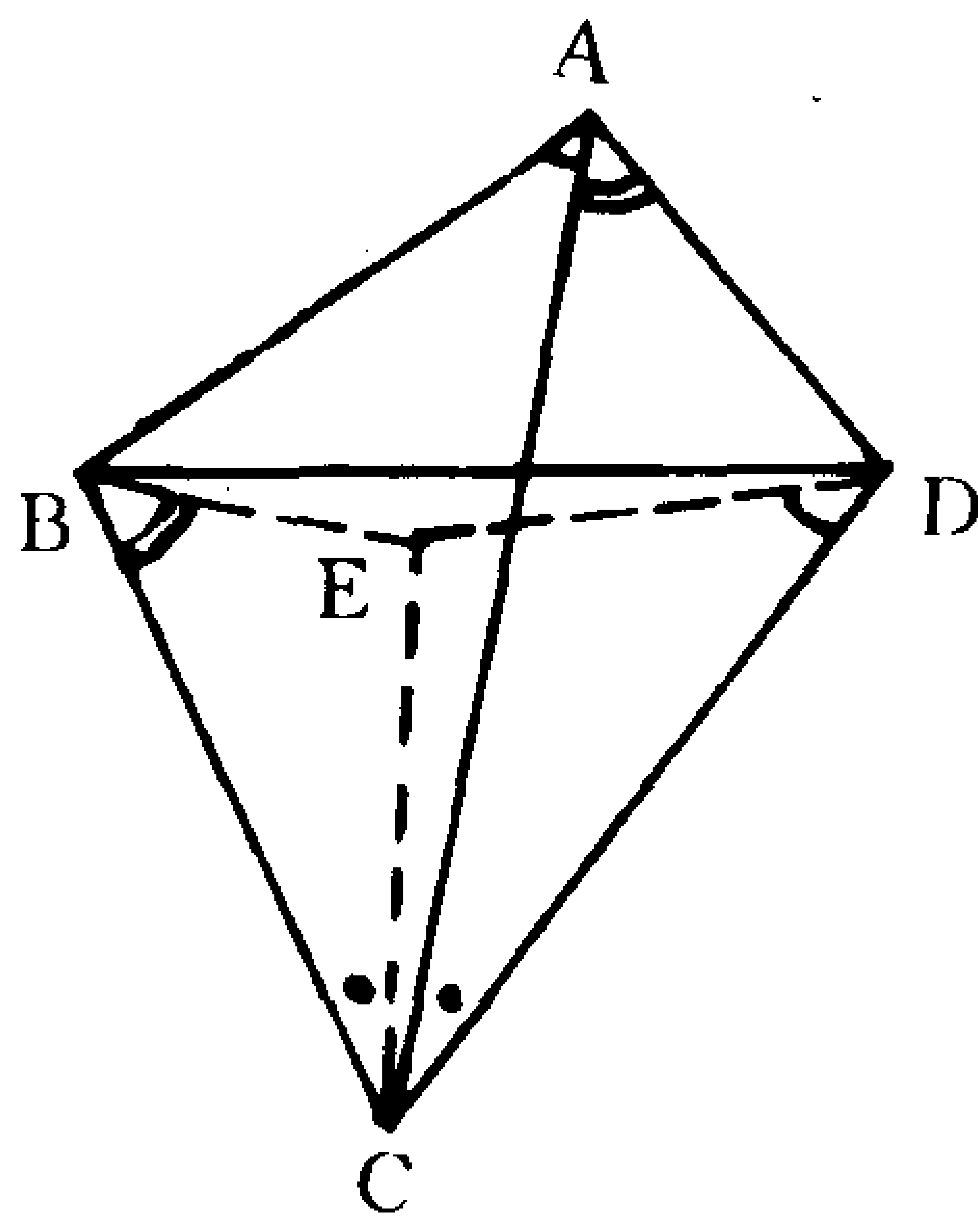


图 23

证明 如图23,作$\triangle EBC \backsim \triangle DAC$,

$$\therefore BE = \frac{AD \cdot BC}{AC}. \quad ⑤$$

由 $\triangle EBC \backsim \triangle DAC$ 易证 $\triangle EDC \backsim \triangle BAC$,

$$\therefore ED = \frac{AB \cdot CD}{AC}. \quad ⑥$$

对 $\triangle EBD$ 用余弦定理，得

$$BD^2 = BE^2 + ED^2 - 2BE \cdot ED\cos\angle BED,$$

将⑤、⑥两式代入，并注意到 $\angle BED = 2\pi - \angle BEC - \angle DEC = 2\pi - \angle D - \angle B = \angle A + \angle C$，引理得证.

(1) 由已知，令

$$\frac{PN \cdot OK}{PK \cdot ON} = \frac{QM \cdot OL}{QL \cdot OM} = k;$$

而 $\angle P + \angle KON + \angle LOM + \angle Q = 2\pi$,

令 $\cos(\angle P + \angle KON) = \cos(\angle LOM + \angle Q) = \cos\alpha$.

对四边形 $PKON$ 用引理 3,

$$PO^2 \cdot KN^2 = PK^2 \cdot ON^2 + PN^2 \cdot OK^2 - 2PK \cdot ON \cdot PN \cdot OK\cos(\angle P + \angle KON) = PK^2 \cdot ON^2(1 + k^2 - 2k\cos\alpha).$$

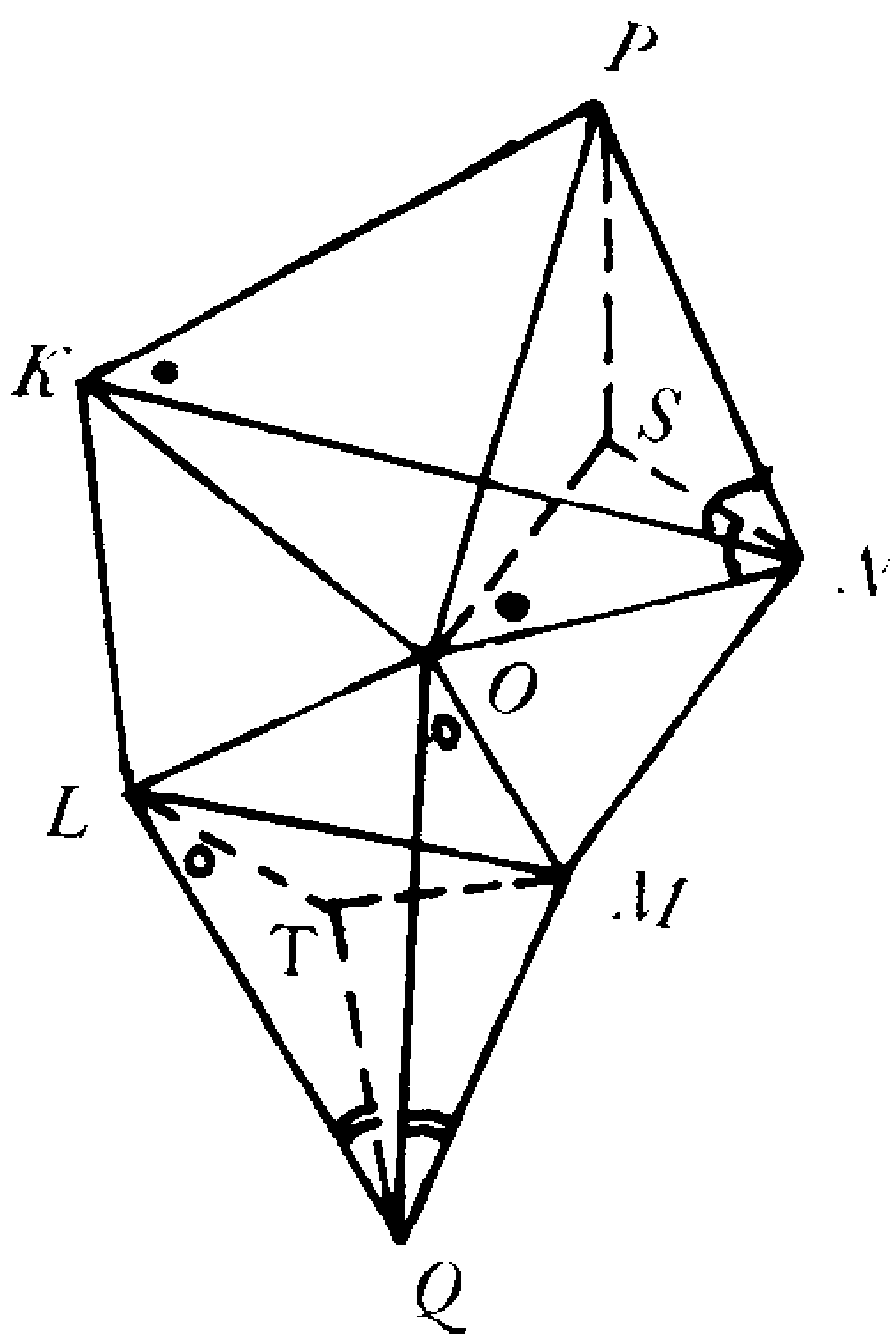


图 24

同理，$OQ^2 \cdot LM^2 = QL^2 \cdot OM^2(1 + k^2 - 2k\cos\alpha)$.

$$\therefore \frac{PO^2 \cdot KN^2}{OQ^2 \cdot LM^2} = \frac{PK^2 \cdot ON^2}{QL^2 \cdot OM^2},$$

即

$$\frac{PO}{OQ} = \frac{PK}{KN} \cdot \frac{NO}{OM} \cdot \frac{ML}{LQ}.$$

(2) 即证 $\angle PON + \angle QOM = \angle PKN + \angle QLM$,

或 $\angle PON - \angle PKN = \angle QLM - \angle QOM$.

在四边形 $PKON$ 内作 $\triangle SON \backsim \triangle PKN$，易证 $\triangle SPN \backsim \triangle OKN$. 同样，在四边形 $OLQN$ 内作 $\triangle TLQ \backsim \triangle MOQ$，易证 $\triangle TMQ \backsim \triangle LOQ$.

$$\begin{aligned}\because\ &\angle PSO\\ &= 2\pi - \angle PSN - \angle OSN = 2\pi - \angle KON - \angle P\\ &= 2\pi - \angle OLQ - \angle OMQ = 2\pi - \angle MTQ - \angle LTQ\\ &= \angle MTL,\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}&\frac{PS}{SO} = \frac{PS}{SN} \cdot \frac{SN}{SO} = \frac{OK}{ON} \cdot \frac{PN}{PK}\\ &= \frac{OL}{QL} \cdot \frac{QM}{OM} = \frac{MT}{TQ} \cdot \frac{TQ}{TL} = \frac{MT}{TL},\end{aligned}$$

$\therefore \triangle PSO \backsim \triangle MTL$,

$\therefore \angle POS = \angle MLT$,

即 $\angle PON - \angle PKN = \angle QLM - \angle QOM$. □

以上三种证法，思路不同，却都体现了平面几何的优雅，可谓各有千秋.

双心四边形中十点不共线及其它

湖南绥宁县第一中学　黄汉生　刘素莲

既有内切圆又有外接圆的四边形称为双心四边形，如图，$ABCD$ 是双心四边形，其内切圆与外接圆分别是 $\odot I$，$\odot O_1$，$OGFE$，$I_AI_BI_CI_D$ 分别是它的切点四边形，旁心四边形. 结合图形容易证明四边形 $I_AI_BI_CI_D$ 内接于圆，记作 $\odot O_2$，半径为 R_2. 四个旁切圆半径分别是 r_a、r_b、r_c、r_d.

又记 $AC \cap BD = Q$，$OF \cap EG = Q_1$，$I_BI_D \cap I_AI_C = Q_2$，AC 与 BD 的中点连线段的中点为 E_1，OF 与 EG 的中点连线段的中点为 E_2，I_AI_C 与 I_BI_D 的中点连线段的中点为 E_3. 可以证明 OI_A，FI_C，GI_B，EI_D 相交于一点 P（证明见后文）.

文[1]提出猜想：证明或否定 $I,O_1,O_2,Q,Q_1,Q_2,E_1,E_2,E_3,P$ 十个点共一直线. 本文证明这十个点不在一直线上及其它结论.

双心四边形 $ABCD$ 的内角，边长，面积，内切圆半径，半周长，外接圆半径分别记为：A,B,C,D，$|AB| = a$，$|BC| = b$，$|CD| = c$，$|DA| = d$，S,r,p,R. 规定：$x = \operatorname{ctg}\frac{A}{2}$，$y = \operatorname{ctg}\frac{B}{2}$，$z = \operatorname{ctg}\frac{C}{2}$，$t = \operatorname{ctg}\frac{D}{2}$，则

$$xz = 1, ty = 1,$$

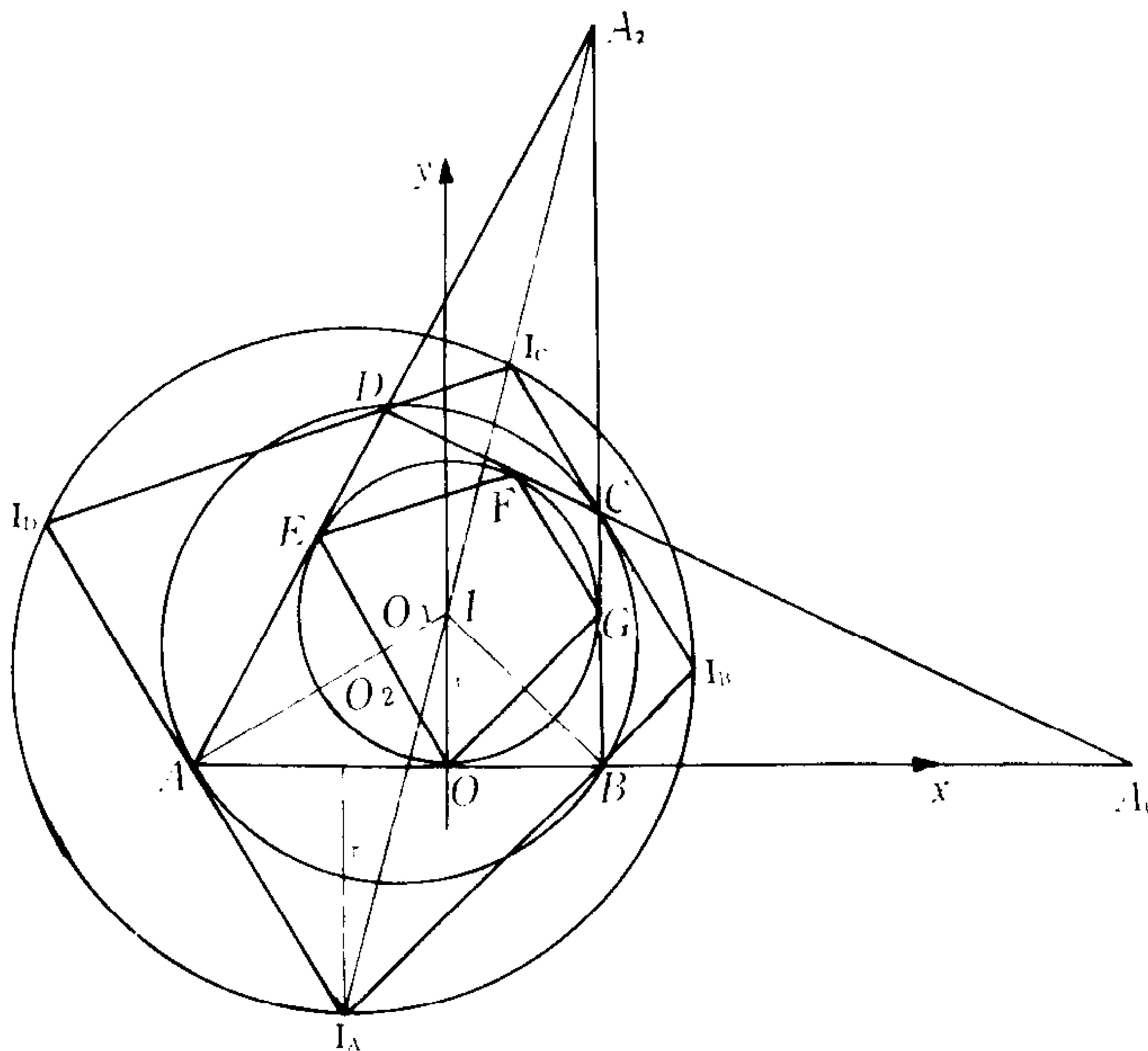
$$(x+y)(y+z)(z+t)(t+x) = (x+y+z+t)^2.$$

结合图形我们容易证明

$$\frac{a}{x+y} = \frac{b}{y+z} = \frac{c}{z+t} = \frac{d}{t+x} = r^{[1]},$$

$$\frac{r_a}{xy}=\frac{r_b}{yz}=\frac{r_c}{zt}=\frac{r_d}{tx}=r.$$

在双心四边形 $ABCD$ 中，不妨设最长边是 AB，边 AB 与 $\odot I$ 相切于点 O，以 O 点作原点，$\overrightarrow{OI}$ 所在直线作纵轴 y 建立平面直角坐标系 xOy，这种坐标系称为特定平面直角坐标系，那么 $I(O,r)$.



定理 在特定平面直角坐标系中，双心四边形 $ABCD$ 四个顶点的坐标：

$$A(-rx,O),C\left(\frac{2+zt-yz}{y+t}r,\frac{2(y+z)}{y+t}r\right),$$

$$B(ry,O),D\left(\frac{xt-zt-2}{x+z}r,\frac{2(x+t)}{x+z}r\right).$$

证明 如图，在特定平面直角坐标系中，点 C 的纵坐标：

$$y_c=b\sin B=r(y+z)\cdot\frac{2y}{1+y^2}=\frac{2y(y+z)}{y^2+1}r=\frac{2(y+z)}{y+t}r$$

点 C 的横坐标 $\quad x_C = ry - b\cos B = ry - r(y+z)\dfrac{y^2-1}{y^2+1}$

$$= \frac{-y^2z+2y+z}{y^2+1}r = \frac{2-yz+zt}{y+t}r.$$

所以 $\quad C\left(\dfrac{2+zt-yz}{y+t}r, \dfrac{2(y+z)}{y+t}r\right)$.

同理 $\quad D\left(\dfrac{xt-zt-2}{x+z}r, \dfrac{2(x+t)}{x+z}r\right)$.

显然 $\quad A(-rx,0), B(ry,0)$.

推论 1 在特定平面直角坐标系中，双心四边形 $ABCD$ 的外心 O_1 的坐标：

$$O_1\left(\frac{y-x}{2}r, \frac{2-xy+yz+zt+tx}{4}r\right).$$

证明 由定理，对角线 AC 的中点 M 的坐标

$$x_M = \frac{2-xy-yz-zt-tx}{y+t}r, y_M = \frac{y+z}{y+t}r,$$

$$k_{AC} = \frac{2(y+z)}{2+xy-yz+zt+tx}.$$

AC 的中垂线方程：

$$Y - \frac{y+z}{y+t}r$$

$$= -\frac{2+xy-yz+zt+tx}{2(y+z)}\left(X + \frac{xy+yz-zt+tx-2}{y+t}r\right)$$

又点 O_1 在 AB 的中垂线上，可设 $O_1(\frac{y-x}{2}r, m)$，并且 O_1 也在 AC 的中垂线上，因此

$$m = \frac{y+z}{y+t}r - \frac{xy-yz+zt+tx+2}{2(y+z)}$$

$$\cdot\left(\frac{y-x}{2}r + \frac{xy+yz-zt+tx-2}{2(y+t)}r\right)$$

$$= \frac{1}{4}(2-xy+yz+zt+tx)r.$$

□

推论 2 在特定平面直角坐标系中，切点四边形 $OGEF$ 四顶点的坐标为

$$O(0,0),F\left(\frac{2(xy+1)(t-z)}{(x+z)(y+t)}r,\frac{2(xy+1)(zt+1)}{(x+z)(y+t)}r\right),$$

$$E\left(-\frac{2}{x+z}r,\frac{2x}{x+z}r\right),G\left(\frac{2}{y+t}r,\frac{2y}{y+t}r\right).$$

证明 $\frac{CF}{FD}=\frac{z}{t}$,记 $F(X,Y)$,则

$$X=\frac{\frac{2-yz-zt}{y+t}r+\frac{z}{t}\frac{xt-zt-2}{x+z}}{1+\frac{z}{t}}$$

$$=\frac{2(xy+1)(t-z)}{(x+z)(y+t)}r,$$

$$Y=\frac{\frac{2(y+z)}{y+t}r+\frac{z}{t}\frac{2(x+t)}{x+z}r}{1+\frac{z}{t}}$$

$$=\frac{2(xy+1)(zt+1)}{(x+z)(y+t)}r.$$

其余三点的坐标请读者证明.

推论 3 在特定平面直角坐标系中,旁心四边形 $I_AI_BI_CI_D$ 四顶点的坐标:

$$I_A((-x+y)r,-rxy),I_B((y+z)r,ryz),$$

$$I_C((t-z)r,(2+zt)r),I_D(-(x+t)r,rtx).$$

证明 如图,$AD\cap BC=A_2\left(\frac{xt-1}{x-t}r,\frac{2x}{x-t}r\right)$.

又 A_2,I_C,I,I_A 四点在一直线上,

并且$\frac{A_2I_C}{I_CI}=\frac{r_C}{r-r_C}=\frac{zt}{1-zt}$. 记 $I_C(X,Y)$,则

$$X=\frac{\frac{xt-1}{x-t}r}{1+\frac{zt}{1-zt}}=\frac{(xt-1)(1-zt)}{x-t}r=(t-z)r,$$

$$Y=\frac{\frac{2x}{x-t}r+\frac{zt}{1-zt}r}{1+\frac{zt}{1-zt}}=\frac{(2x+t)(1-zt)}{z-t}r=(2+zt)r,$$

所以 $I_C((t-z)r,(2-zt)r)$.

又 $AB\cap DC=A\left(\frac{xy+1}{x-y}r,0\right)$,

同理 $I_B((y+z)r,ryz)$.

其次 $\frac{A_2I}{II_A}=\frac{1}{xy-1}$,

同理 $I_A((-x+y)r,-rxy),I_D(-(x+t)r,rtx)$. □

我们应用直线的两点式方程,解二元一次方程组求两条直线的交点,通过计算有:

1° 旁心四边形 $I_AI_BI_CI_D$ 的外心 $O_2((-x+y)r,\frac{1}{2}(-xy+yz+zt+tx)r)$.

2° 对角线交点的坐标:若点 Z 与点 Z_1 重合,记作 $Z(Z_1)$.

$$Q(Q_1)\left(\frac{2(x-y)}{(x+z)(y+t)}r,\frac{2(xy+1)}{(x+z)(y+t)}r\right),$$

$Q_2(I)(0,r)$.

3° 旁心四边形,切点四边形对应顶点的连线的交点,记 $OI_A\cap FI_C=P,GI_B\cap=EI_D=P_1$,

$$P(P_1)\left(\frac{2(x-y)r}{(x+z)(y+t)-2},\frac{2xyr}{(x+z)(y+t)-2}\right).$$

我们应用线段中点坐标计算公式,容易求出对角线中点的连线段的中点的坐标:

$$E_1\left(\frac{xy^2-x^2y+xt^2-x^2t+z^2t-zt^2+zy^2-z^2y+4x-4y+2z-2t}{4(y+t)(x+z)}r,\right.$$

$$\left.\frac{2xy+yz+tx+z^2+t^2+2}{2(x+z)(y+t)}r\right),$$

$$E_2\left(\frac{t^3-t^2z+t^2x+x-y+z-2t}{2(x+z)(y+t)}r,\frac{(x+t)^2+2x^2y^2+x^2+y^2}{2(x+z)(y+t)}r\right),$$

$E_3(O_1)\left(\frac{1}{2}(-x+y)r, \frac{1}{4}(-xy+yz+zt+tx+2)r\right)$.

例 1[2] 双心四边形两个圆心与其对角线的交点共一直线.

证明

$$k_{IQ}=\frac{\frac{2(xy+1)}{(x+z)(y+t)}-1}{\frac{2(x-y)}{(x+z)(y+t)}}=\frac{xy-yz-zt-tx+2}{2(x-y)},$$

$$k_{IQ}=\frac{\frac{2-xy+yz+zt+tx}{4}-1}{\frac{y-x}{2}}$$

$$=\frac{xy-yz-zt-tx+2}{2(x-y)}.$$

又 $IQ\cap IO_1=I$,三点 I,O_1,Q 共一直线——$(xy-yz-zt-tx+2)X-2(x-y)Y+2(x-y)r=0$.

评注 $k_{IP}=k_{IQ_2}=\frac{xy-yz-zt-tx+2}{2(x-y)}$. 八点 $I(Q_2)$, $O_1(E_3)$, O_2, $Q(Q_1)$, P 都在直线:$(xy-yz-zt-tx+2)X-2(x-y)Y+2(x-y)r=0$ 上. 但是十点 $I(Q_2)$, $O_1(E_3)$, O_2, $Q(Q_1)$, P, E_1, E_2 不在同一直线上.

其它结论

应用平面上两点间的距离公式有:

$$R^2=\frac{1}{16}[(xy+yz+zt+tx)^2+4(xy+yz+zt+tx)]r^2.$$

$$\frac{\sqrt{r^2+4R^2}-r}{r}=\frac{xy+yz+zt+tx}{2}=\frac{R_2}{r}.$$

两心距离:$O_1I^2=\frac{1}{16}[(xy+yz+zt+tx)^2-4(xy+yz+zt+tx)]r^2$.

四条切线长的积:$OA\cdot ED\cdot CG\cdot BO=r^4$.

对角线的长：

$$AC=\frac{4}{y+t}R,\quad BD=\frac{4}{x+z}R,$$

$$OF=\frac{2(xy+1)}{(x+z)(y+t)}\sqrt{z^2t^2+z^2+t^2+1}r,$$

$$EG=\frac{2}{(y+t)(x+z)}\sqrt{(x+y+z+t)^2+(xt+1)^2}r,$$

$$I_BI_D=\sqrt{(x+y+z+t)^2+(yz-xt)^2}r,$$

$$I_AI_C=\sqrt{(x-y+z-t)^2+(2+xy+tz)^2}r.$$

旁心四边形，切点四边形的面积分别为 S_2，S_1，应用列表法求四边形的面积[3]有

$$\frac{S}{S_1}=\frac{xy+yz+zt+tx}{2}=\frac{S_2}{S}.$$

例 2[1]　双心四边形 $ABCD$ 的边心距 d_{AB}，d_{BC}，d_{CD}，d_{DA} 适合等式

$$d_{AB}+d_{BC}+d_{CD}+d_{DA}=\sqrt{r^2+4R^2}+r.$$

证明　$d_{AB}=\sqrt{R^2-\frac{1}{4}a^2}$

$$=\left\{\frac{1}{16}[(xy+yz+zt+tx)^2+4(xy+yz+zt+tx)]r^2-\frac{1}{4}(x+y)^2r^2\right\}^{\frac{1}{2}}$$

$$=\frac{1}{4}(-xy+yz+zt+tx+2)r.$$

同理：$d_{BC}=\frac{1}{4}(xy-yz+zt+tx+2)r$，

$$d_{CD}=\frac{1}{4}(xy+yz-zt+tx+2)r,$$

$$d_{DA}=\frac{1}{4}(xy+yz+zt-tx+2)r.$$

$$\therefore d_{AB}+d_{BC}+d_{CD}+d_{DA}=\frac{1}{2}(xy+yz+zt+tx)r+2r$$

$$=\frac{1}{2}\cdot\frac{2(\sqrt{r^2+4R^2}-r)}{r}r+2r$$

$$= \sqrt{r^2 + 4R^2} + r.$$

例 3[1] 双心四边形的旁心四边形的对角线长的和不小于 $2(\sqrt{r^2+4R^2}+r)$，也不小于双心四边形的周长.

证明 $I_BI_D = [(x+y+z+t)^2 + (yz-tx)^2]^{\frac{1}{2}}r$

$= (x^2+y^2+z^2+t^2+2xy+2+2xt+2yz+2+2zt+y^2z^2+t^2x^2-2)^{\frac{1}{2}}r$

$= [(y^2z^2+t^2x^2+(x^2+t^2)+2xt+(y^2+z^2)+2yz+2(xy+zt)+2)]^{\frac{1}{2}}r$

$\geqslant (y^2z^2+t^2x^2+4xt+4yz+6)^{\frac{1}{2}}r$

$= (yz+tx+2)r$.（注意 $xz=1, yt=1, xyzt=1$）

同理 $I_AI_C = (zt+xy+2)r$，

所以 $I_AI_C + I_BI_D \geqslant (xy+yz+zt+tx+4)r$

$$= \left(\frac{2\sqrt{r^2+4R^2}-2r}{r}\right)r + 4 = 2(\sqrt{r^2+4R^2}+r).$$

当且仅当双心四边形为正方形时式中等号成立.

又显然有 $I_BI_D \geqslant (x+y+z+t)r$，

$I_AI_C = [(t-z+x-y)^2 + (2+zt+xy)^2]^{\frac{1}{2}}r$

$= [t^2+z^2+x^2+y^2+2zt+2xt+2yz+2xy+z^2t^2+x^2y^2+2]^{\frac{1}{2}}r$

$\geqslant (t^2+z^2+x^2+y^2+2zt+2xt+2yz+2xy+2+2)^{\frac{1}{2}}r$

$= (t+z+x+y)r$.

所以 $I_BI_D + I_AI_C \geqslant 2(x+y+z+t)r = a+b+c+d$，

当且仅当双心四边形为正方形时式中等号成立.

例 4 p 为双心四边形的半周长. 求证:

$$8r(\sqrt{r^2+4R^2}-r) \leqslant p^2 \leqslant (\sqrt{r^2+4R^2}+r)^2$$

（参见[4]中 40）.

证明 $p^2 = r^2(x+y+z+t)^2$

$$= r^2(x+y)(y+z)(z+t)(t+x)$$
$$= r^2(yz+tx+2)(xy+zt+2)$$
$$\leqslant \frac{1}{4}r^2(xy+yz+zt+tx+4)^2$$
$$= \frac{1}{4}r^2 \cdot \left(\frac{2\sqrt{r^2+4R^2}+2r}{r}\right)^2 = \left(\sqrt{r^2+4R^2}+r\right)^2.$$

又 $(x-y+z-t)^2 \geqslant 0$,

即 $x^2+y^2+z^2+t^2-2xy+2-2tx-2yz+2-2zt \geqslant 0$.

所以 $x^2+y^2+z^2+t^2+4 \geqslant 2xy+2yz+2zt+2tx$.

故 $(x+y+z+t)^2 \geqslant 4(xy+yz+zt+tx)$.

$$p^2 \geqslant 4r^2 \cdot \frac{2\sqrt{r^2+4R^2}-2r}{r} = 8r(\sqrt{r^2+4R^2}-r).$$

$$8r(\sqrt{r^2+4R^2}-r) \leqslant p^2 \leqslant (\sqrt{r^2+4R^2}+r)^2,$$

当且仅当双心四边形为正方形时式中等号成立.

参考文献

[1] 管宇翔,双心四边形的性质,《中国初等数学研究文集》,河南教育出版社,1992年,695－696.

[2] 单墫,葛军,刘亚强,《数学奥林匹克(1989)—— 第30届国际数学竞赛预选题》,北京大学出版社,1990年,51.

[3] 数理化自学丛书编委会数学编写小组编,《平面解析几何》,上海科技出版社,1965年,58.

[4] D. S. Mitrinović, J. E. Pečarić, V. Volenec, Ji Chen(陈计), Addenda to the monograph "Recent Advances in Geometric Inequalities", I,《宁波大学学报》(理工版),1991年第2期,79－145.

两类星形及其自交数

湖北武汉市第二十三中学　王方汉

有这样一道题目：一条由203条线段组成的封闭折线，且任两线段都不在一直线上(即这种折线的任3个顶点不共线)，对于这种折线自身相交的交点最多能有多少个[1]？

回答这类问题的，有 n 边封闭折线自交数最大值公式[2][3]：

$$K_n=\begin{cases}\dfrac{n(n-3)}{2} & (n\text{ 为奇数})\\[2ex] \dfrac{n(n-4)}{2}+1 & (n\text{ 为偶数}).\end{cases}$$

但是，[2][3] 文未能令人满意地给出自交数达到最大值的几何模型.

本文介绍的两类星形 —— 单向极位星形和双向对称星形，平凡而美妙，是自交数达到最大值的几何模型.

(一) 单向极位星形

关于素星形(一笔画成) 的生成，有如下基本定理[4]：

对于排成一圈的 n 个点，从某一点开始，顺次连结相隔 $r(1\leqslant r+1<\frac{n}{2})$ 个点的两个点成为边，能生成 n 边素星形的充要条件是 $(n,r+1)=1$(即 n 与 $r+1$ 互素)，其中 r 叫生成数，并把这样的素星形(简称为星形) 记为 $P_r(n)$.

由此容易得到(证明从略)

引理 1 对于一个任意的确定的$n(n\geqslant 3,n\in N)$，n边素星形$P_r(n)$的生成数r都有最大值，这个最大值就是

$$r=\begin{cases}\dfrac{n-3}{2} & (n=4m\pm 1)\\ \dfrac{n-4}{2} & (n=4m) \qquad\qquad (m\in N)\\ \dfrac{n-6}{2} & (n=4m+2).\end{cases}$$

定义 1 在所有的n边素星形$P_r(n)$中，生成数最大的那个星形叫做n边**单向极位星形**.

例如，当$n=15$时，所有的素星形有$P_0(15)$、$P_1(15)$、$P_3(15)$、$P_6(15)$共4种，其中$P_6(15)$就是15边单向极位星形.（如图1）

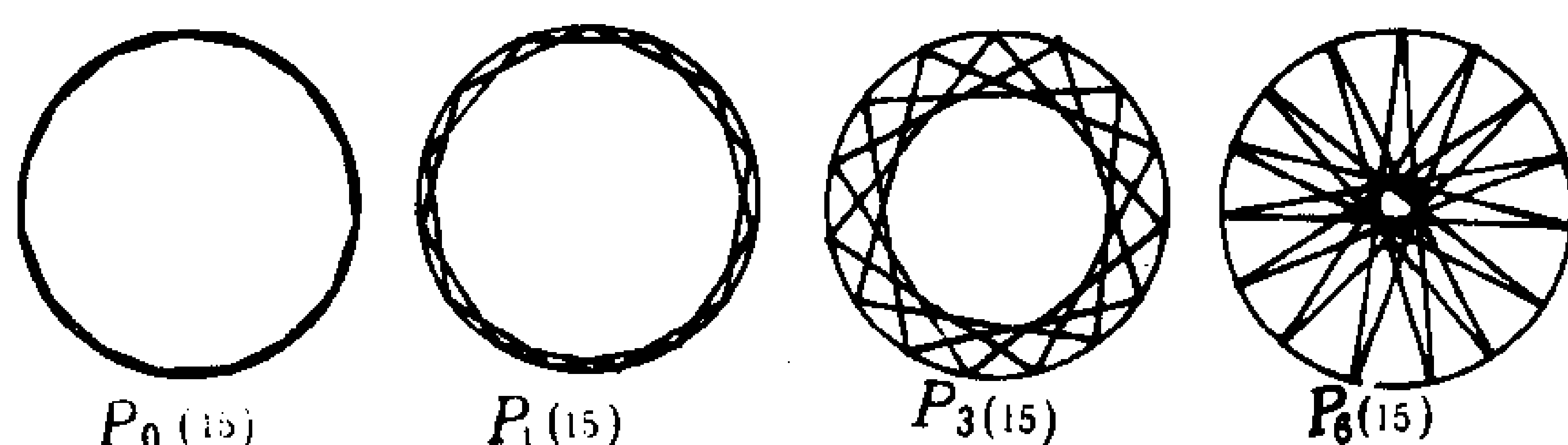


图 1

引理 2 生成数为r的n边星形$P_r(n)$自交数最多为nr.

证明 考察星形$P_r(n)$的任一边$A_iA_{i+1}(i=1,2,\cdots,n)$，约定$A_{n+1}$就是$A_1$）. 由于点$A_i$与$A_{i+1}$之间相隔$r$个点（在圈上的劣弧上），而这$r$个点的序号数与$A_i$的序号数不相邻，且互不相邻（否则与生成数为$r$矛盾）. 其中每一点均引出两边与该边$A_iA_{i+1}$交于两点，最多可共得$2nr$个交点（这只须避免三边交于一点就可以了）. 但每个交点被重复计算了一次，所以n边星形$P_r(n)$自交数最多为nr. □

定理 1 n边单向极位星形自交数最多为

$$K_n=\begin{cases}\dfrac{n(n-3)}{2} & (n=4m\pm 1)\\ \dfrac{n(n-4)}{2} & (n=4m) \qquad (m\in N)\\ \dfrac{n(n-6)}{2} & (n=4m+2).\end{cases}$$

证明 由引理 1、引理 2 立刻可得. □

因此,n 为奇数时的封闭折线自交数达到最大值的几何模型,可以看作是 n 边单向极位星形.

(二)双向对称星形

先给出对称点的概念.

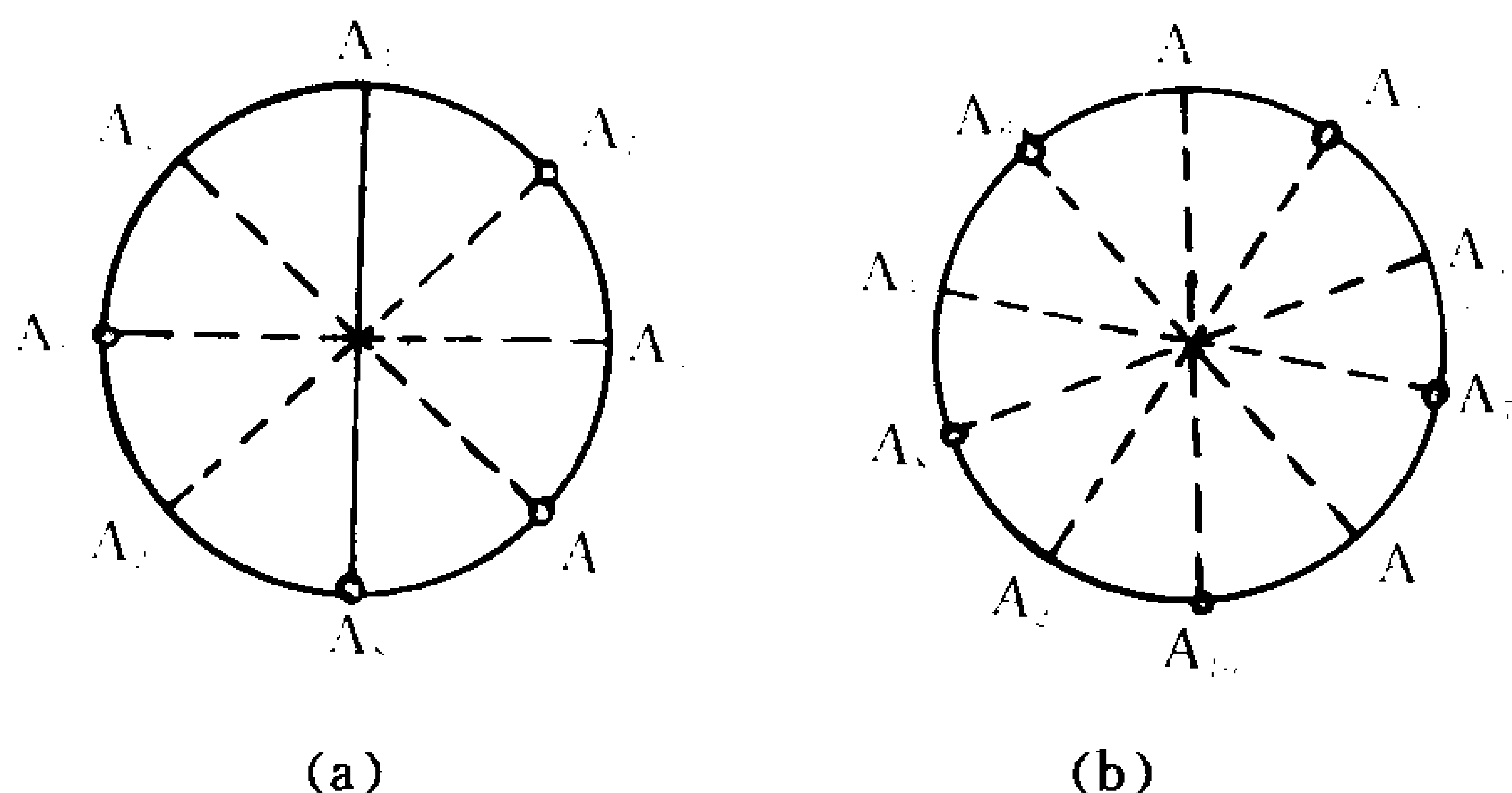
定义 2 对于能排成一圈的 $n=2k(k\in N)$ 个点 $A_1,A_2,\cdots,A_n$,若线段 $A_iA_j(i、j\in\{1,2,\cdots,n\})$ 两侧的点数相同(均有 $\frac{n}{2}-1=k-1$ 个),则称点 A_i 与 A_j 是一组对称点,线段 A_iA_j 称为这个圈的一条直径.

显然,上述 $2k$ 个点共有 k 组对称点.

引理 3 对于能排成一圈的 $n=2k(k=2,3,\cdots)$ 个点,把其中某一个点标号为 A_1,从 A_1 开始,按一定的方向(顺时针或逆时针)每隔 $\frac{n-4}{2}=k-2$ 个点依次标号为 $A_2,A_3,\cdots,A_k$(显然这 k 个点中任意两点的连线一定不是直径),再将 $A_k,A_{k-1},\cdots,A_1$ 的对称点分别标号为 $A_{k+1},A_{k+2},\cdots,A_n$. 这种环状排列方式叫做 n 个点的双向对称排列,且这种排列是唯一存在的.

例如,图 2(a)(b) 分别是 $n=8(n=2k=4m$ 型$)$ 和 $n=10(n=2k=4m+2$ 型$)$ 的双向对称排列.

证明 思路是先构造一种排列,再证明这种排列就是双向对称排列. 至于唯一性,由构造的过程即可得证.



(a) (b)

图 2

分两种情形(为方便计,以下把圈画成一个圆):

情形(一):当$n=2k=4m(m\in N)$时,构造排列有三个步骤:

第一步,在圆上取$2m-1$个点,从其中某一点开始,沿一定的方向按生成数$r=\frac{(2m-1)-3}{2}=m-2$(这个生成数就是$2m-1$边单向极位星形的生成数),依次将这些点标号为$A_1,A_2,\cdots,A_{2m-2},A_{2m-1}$,连结$A_1A_2,A_2A_3,\cdots,A_{2m-2}A_{2m-1}$.(注意:这时由单向极位星形的结构特征可知点$A_1$与$A_{2m-2}$是"相邻"的两点,即圆上没有别的点把它们隔开),如图3(a).

第二步,在劣弧$\overset{\frown}{A_1A_{2m-2}}$上取一点,标号为$A_{2m}$.这时点$A_i(i=1,2,\cdots,2m)$把圆分成$2m$条弧段,如图3(b),其中点$A_i$画成实心的点.

第三步,按如下规则插入新的$2m$个点A_j,并对它们标号:

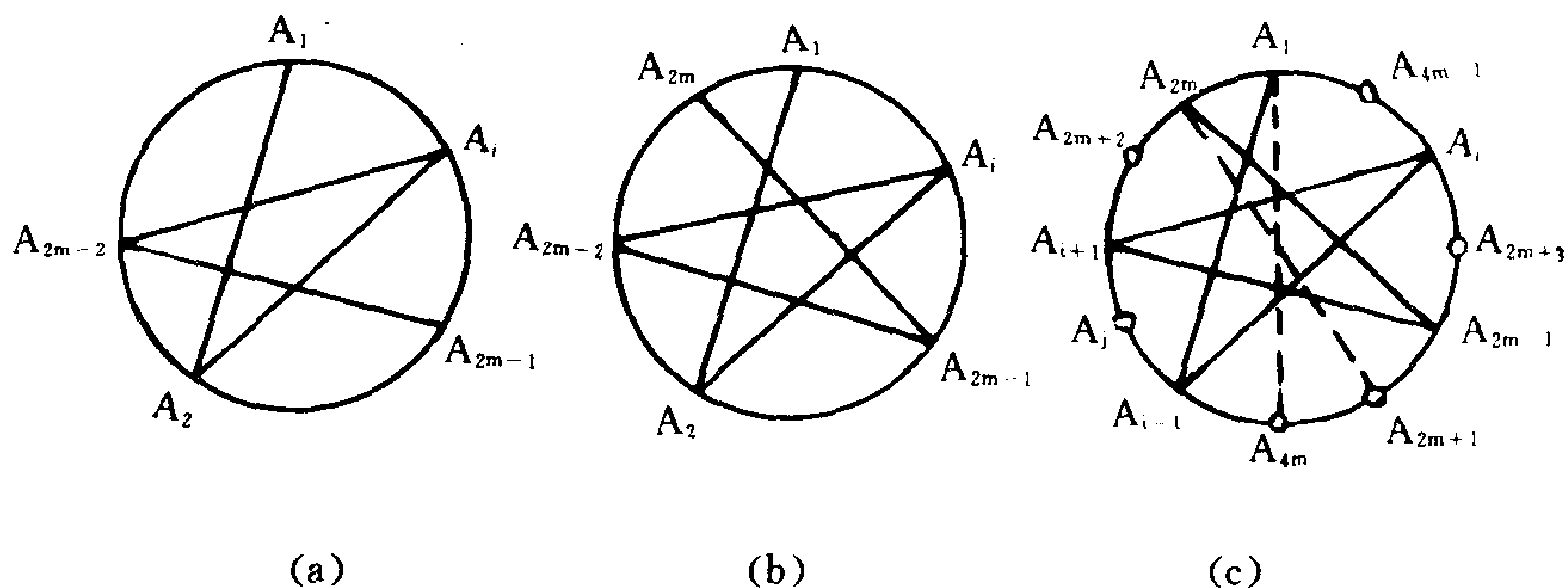
(i) 在劣弧$\overset{\frown}{A_1A_{2m}}$上不取点;

(ii) 在劣弧$\overset{\frown}{A_2A_{2m-1}}$上插入两个点,标号为$A_{2m+1}$、$A_{4m}$,且使线段$A_1A_{4m}$与$A_2A_{2m+1}$在圆内相交(用虚线表示);

(iii) 在其余的$2m-2$条劣弧上各插入一个点,将圆周角$\angle A_{i-1}A_iA_{i+1}(i=2,3,\cdots,2m-1)$所对弧上插入的那个点标号为

A_j，且使得 $i+j=4m+1$. 如图 3(c)，其中点 $A_j(j=2m+1,2m+2,\cdots,4m)$ 画成空心点.

这样就构造出了 $n=4m$ 个点的一种环状排列.



(a) (b) (c)

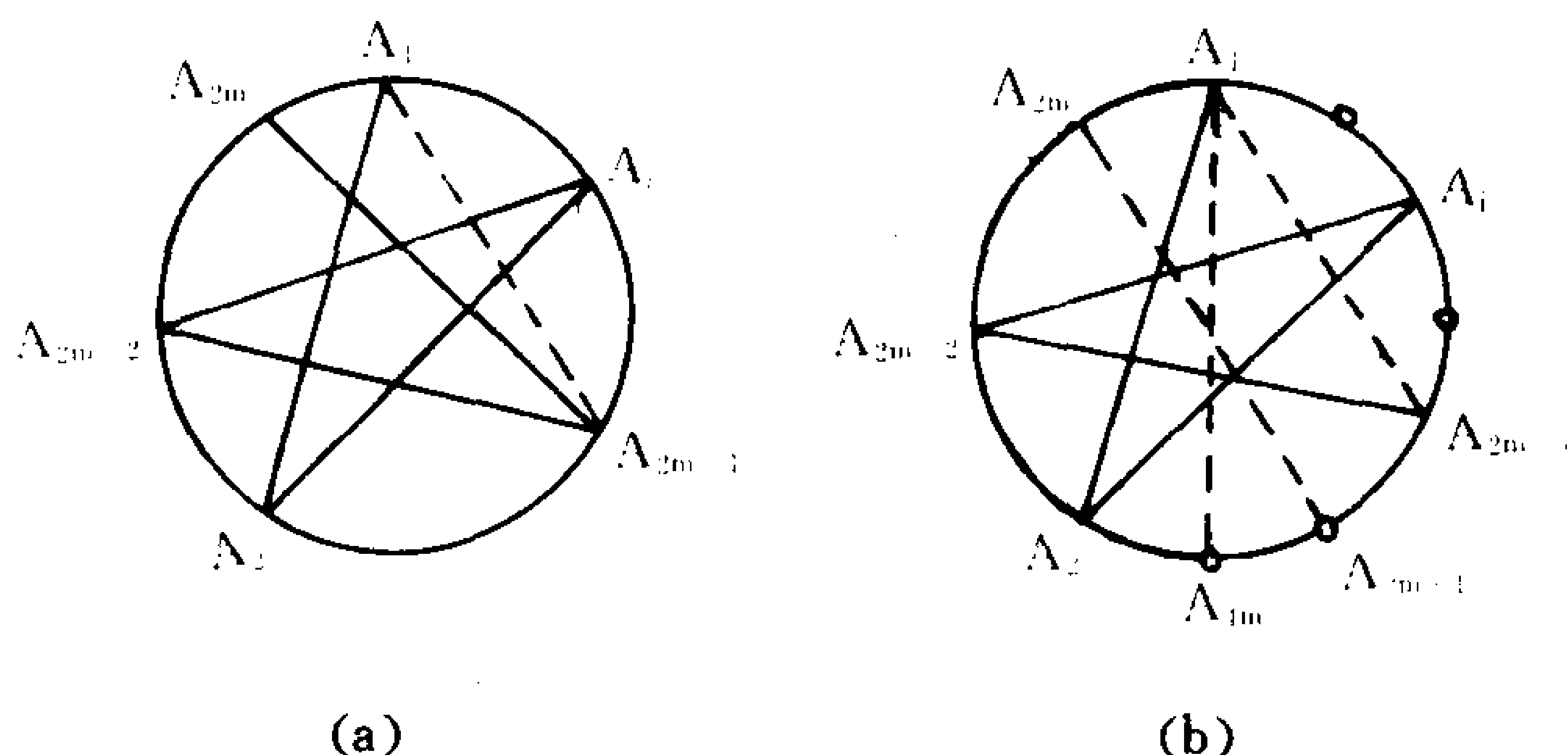
图 3

下面的任务是证明上述这种排列就是双向对称排列，即证明这种排列符合两个条件：① 点 A_i 与 $A_j(i=1,2,\cdots,2m,j=2m+1,2m+2,\cdots,4m,i+j=4m+1)$ 是对称点；② 点 A_i 与 $A_{i+1}(i=1,2,\cdots,2m-1)$ 之间相隔 $\frac{n-4}{2}=\frac{4m-4}{2}=2m-2$ 个点.

① 证明点 A_i 与 $A_j(i+j=4m+1)$ 是一组对称点，分三种情况：

(i) 先看点 A_1 与 A_{4m} 的对称性，因为在新的点 A_j 插入之前，在封闭的 $2m-1$ 边极位星形(生成数为 $m-2$) 中，点 A_{2m-1} 与 A_1 是邻接点，所以点 A_{2m-1} 与 A_1 之间相隔 $m-2$ 个点(如图 4(a))，而这 $m-2$ 个点把圆弧分成的 $m-1$ 条弧段上分别插入了一个点，共插入 $m-1$ 个点；另外，由规则可知，点 A_{2m}、A_{2m+1} 必在线段 A_1A_{4m} 的异侧(因为连线段 A_1A_{4m} 与 $A_{2m}A_{2m+1}$ 在圆内相交)，即 A_{4m} 与 A_{2m-1} 之间相隔 1 个点(如图 4(b)). 这样，连同点 A_{2m+1}、A_{2m-1} 算在内，点 A_{4m} 与 A_1 之间共计相隔 $(m-2)+(m-1)+1+1=2m-1$

$=\frac{n}{2}-1$ 个点. 这说明点 A_1 与 A_{4m} 是一组对称点(如图 4(b)).



(a)　　　　　　　　(b)

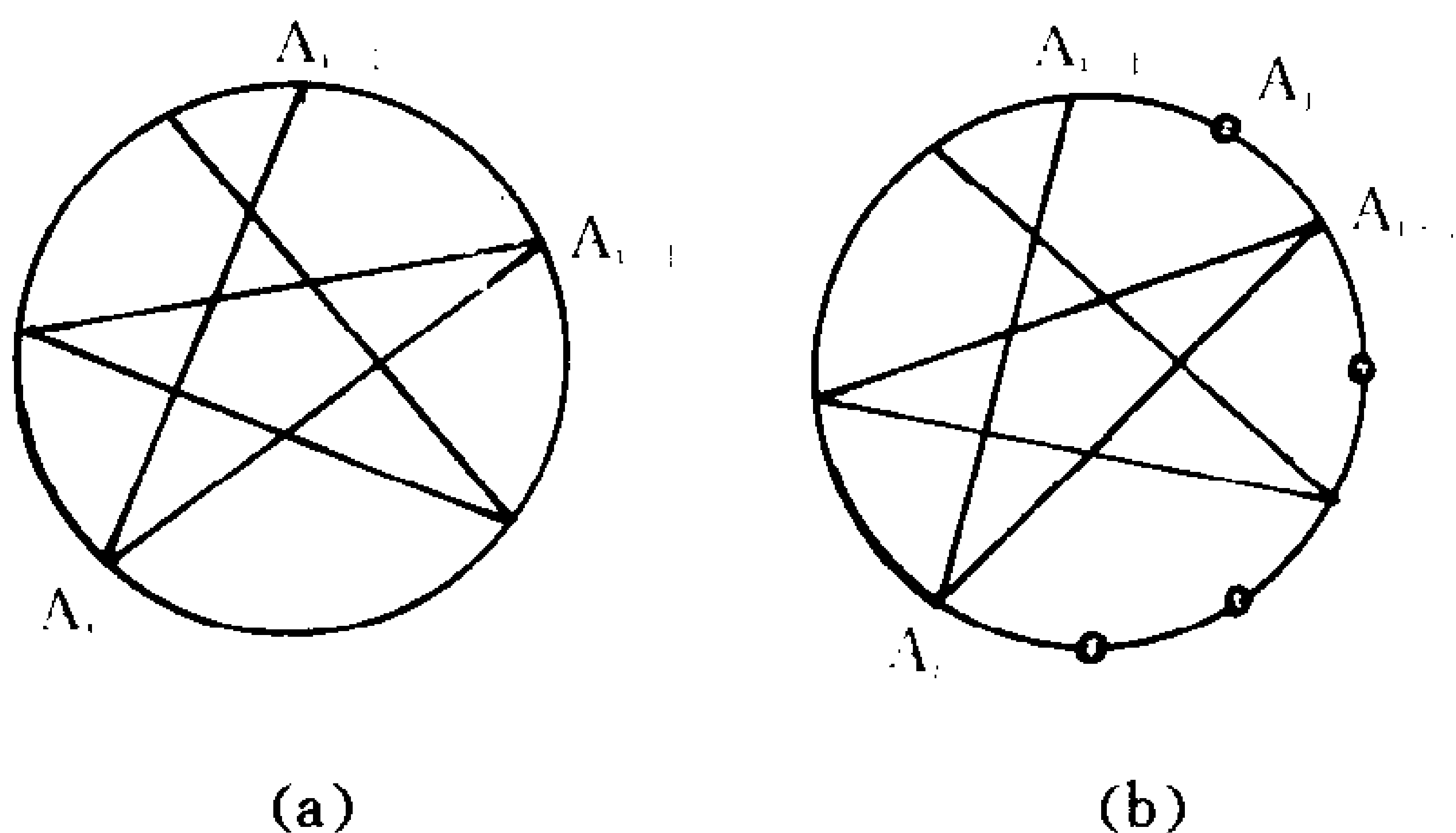
图　4

(ii) 再看点 A_{2m} 与 A_{2m+1} 的对称性. 由于线段 A_1A_{4m} 是圆的一条直径，而线段 $A_{2m}A_{2m+1}$ 与它相交于圆内，且点 A_1 与 A_{2m}、A_{2m+1} 与 A_{4m} 在圆上分别相隔 0 个点，故线段 $A_{2m}A_{2m+1}$ 也是圆的一条直径，即 A_{2m} 与 A_{2m+1} 也是一组对称点(如图 4(b)).

(iii) 最后看点 A_i 与 $A_j(i=2,3,\cdots,2m-1,j=2m+2,2m+3,\cdots,4m-1,i+j=4m+1)$ 的对称性. 因为在新的点 A_j 插入之前，A_i 与 A_{i+1} 之间相隔 $m-2$ 个点，把劣弧 $\overset{\frown}{A_iA_{i+1}}$ 分成 $m-1$ 个弧段(如图 5(a))，依规则，在这 $m-1$ 段弧上共插入了 $(m-1)+1=m$ 个点 A_j(注意：这是因为劣弧 $\overset{\frown}{A_2A_{2m-1}}$ 上插入了两个点，而其余弧段上各插入一个点)，连同点 A_{i+1} 算在内，点 A_i 与 A_j 共计相隔 $(m-2)+m+1=2m-1=\frac{n}{2}-1$ 个点. 这说明 A_i 与 A_j 是一组对称点(如图 5(b)).

② 证明点 A_i 与 A_{i+1} 在圆上相隔 $\frac{n-4}{2}=2m-2$ 个点(指圆的劣弧上)，这一点事实上由上述的证明中已得到确认.

综上所述，情形(一) 的三个步骤所得到的环状排列，就是双



(a) (b)

图 5

向对称排列，至于其唯一性，由存在性的证明过程便知.

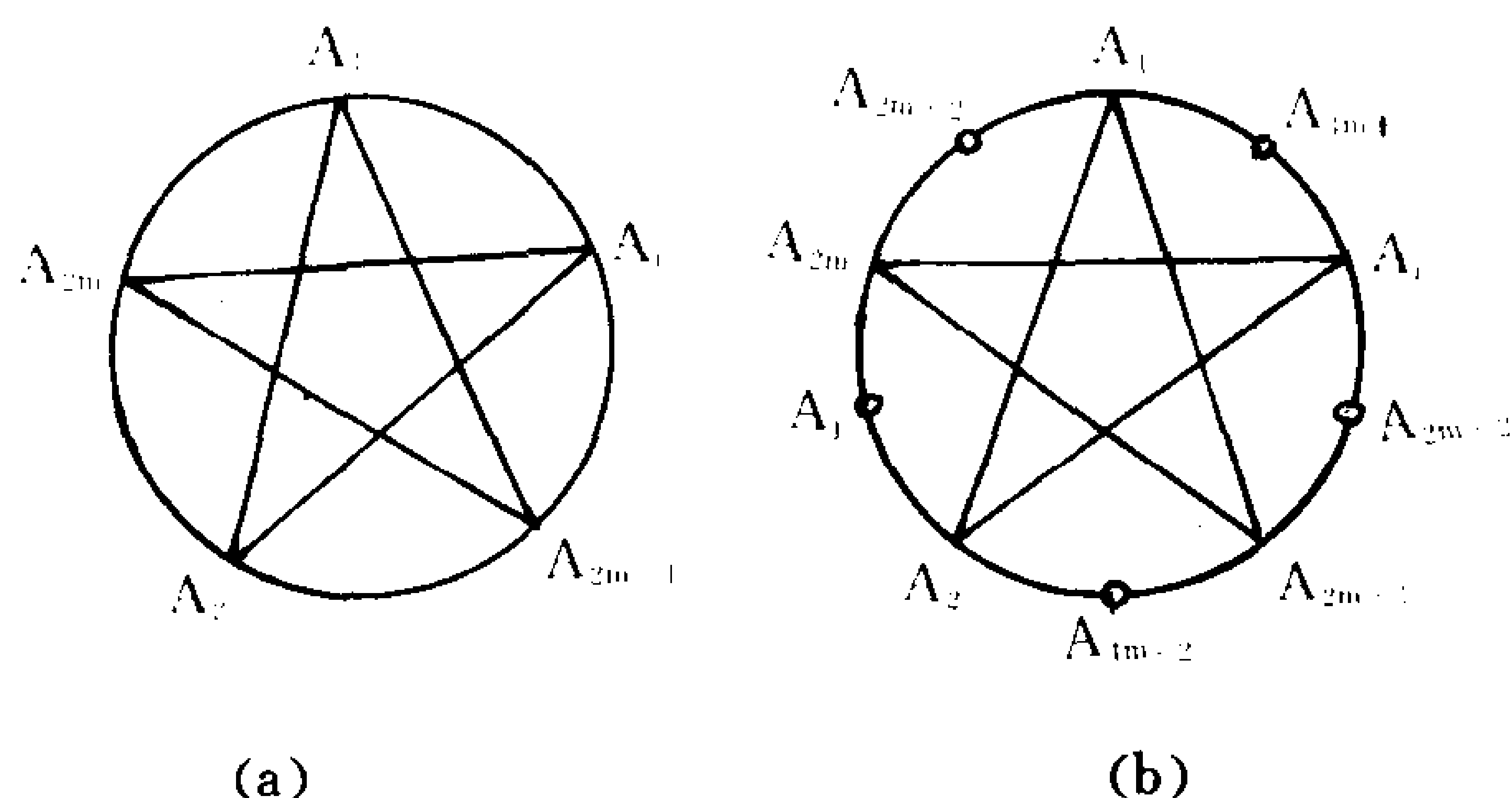
情形(二)：当 $n=2k=4m+2(m\in N)$ 时，构造排列有两个步骤：

第一步，在圆周上取 $2m+1$ 个点，从其中某一点开始，沿一定的方向，按生成数 $r=\frac{(2m+1)-3}{2}=m-1$(这个生成数就是 $2m+1$ 边单向极位星形的生成数) 依次将这些点标号为 $A_1,A_2,\cdots,A_{2m},A_{2m+1}$，连结 $A_1A_2,A_2A_3,\cdots,A_{2m}A_{2m+1},A_{2m+1}A_1$. 这时点 $A_i(i=1,2,\cdots,2m,2m+1)$ 把圆分成了 $2m+1$ 条弧段(如图 6(a)，其中点 A_i 画成实心点).

第二步，在圆周角 $\angle A_{i-1}A_iA_{i+1}(i=1,2,\cdots,2m+1$，约定 A_0 就是 A_{2m+1}，A_{2m+2} 就是 A_1) 所对弧上分别插入新的 $2m+1$ 个点，记为 $A_j(j=2m+2,2m+3,\cdots,4m+2)$，且使得 $i+j=4m+3$(如图 6(b)，其中点 A_j 画成空心点).

这就构造出了当 $n=4m+2$ 时的双向对称排列，其证明类似于情形(一)，这里从略. □

定义 3 $n=2k$ 个点 $A_1,A_2,\cdots,A_{2k}(k>1,k\in N)$ 成双向对称排列，按序号次序依次连结 $A_1\to A_2\to A_3\to\cdots\to A_k\to A_{k+1}\to\cdots\to A_{2k}\to A_1$. 这样生成的封闭折线称为**双向对称星形**. 记为



(a)　　　　(b)

图　6

$P_r(n=2k)$. 其中 $r=k-2=\dfrac{n-4}{2}$ 叫做双向对称星形的半生成数.

图 7(a) 是 $n=20$ 的双向对称星形 $P_8(20=2\times10)$,(b) 是 $n=18$ 的双向对称星形 $P_7(18=2\times9)$.

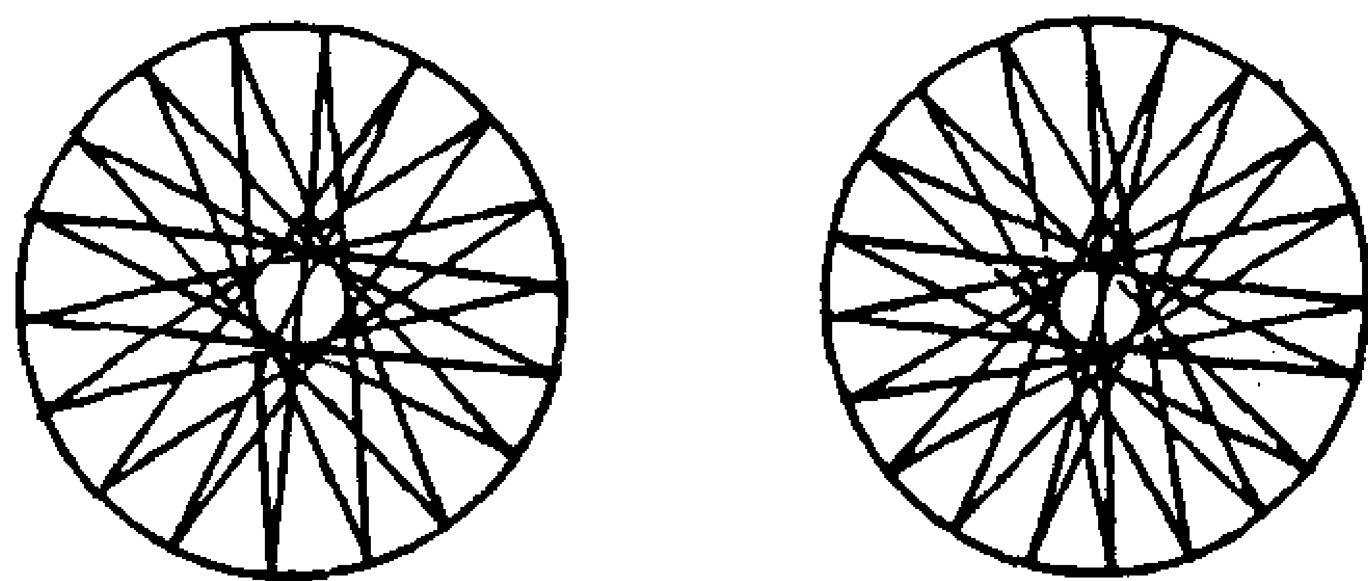


图　7

定理 2　$n=2k$ 边双向对称星形 $P_r(n=2k)$ 的自交数最多为 $k_n=\dfrac{n(n-4)}{2}+1$.

证明　在半生成数为 $r=k-2$ 的 $n=2k$ 边双向对称星形 $P_r(n=2k)$ 中,将所有的边分成三类,分别考察边上的交点个数.

(i) 考察边 $A_iA_{i+1}(i=1,2,\cdots,k-1)$,由于点 A_i 与 A_{i+1} 相隔 $k-2$ 个点,而这 $k-2$ 个点的序号数与 A_i 的序号数不相邻且互不相邻(否则与半生成数 $r=k-2$ 矛盾),其中每一点均引出两边与

该边 A_iA_{i+1} 交于两点，最多可共得 $2(k-2)=n-4$ 个交点.

(ii) 考察边 $A_jA_{j+1}(j=k+1,k+2,\cdots,n-1)$. 由于点 A_{k+1}，A_{k+2}，$\cdots$，A_n 分别是点 A_k，A_{k-1}，$\cdots$，A_1 的对称点，所以连结 $A_1\to A_2\to\cdots\to A_{k-1}\to A_k$ 时的绕圆心的转动方向与连结 $A_{k+1}\to A_{k+2}\to\cdots\to A_{n-1}\to A_n$ 的转动方向正好相反，且两种转动时的生成数相等，均为半生成数(这就是命名为"双向对称星形"的缘由). 由对称性，边 A_jA_{j+1} 上至多共有 $n-4$ 个交点.

(iii) 考察 A_kA_{k+1}、A_nA_1 这两条边，先看边 A_kA_{k+1}，它是一条直径，两侧均有 $\frac{n}{2}-1=k-1$ 个顶点，由于对称性，只考虑某一侧即可. 这一侧的 $k-1$ 个点共引出 $2(k-1)$ 条边，但有且只有一条边 $A_{k-1}A_k$(或 A_kA_{k+1}) 与 A_kA_{k+1} 邻接(理由同于(i)，考虑生成数即可)，所以边 A_kA_{k+1} 上至多可有 $2(k-1)-1=n-3$ 个交点，同理边 A_1A_n 上至多也可有 $n-3$ 个交点.

综上所述，非直径的边(共有 $n-2$ 条) 上至多共有 $(n-2)(n-4)$ 个交点，是直径的边(共有两条) 至多共有 $2(n-3)$ 个交点，但每个交点被重复计算了一次，所以 n 边双向对称星形的自交数至多为 $\frac{(n-2)(n-4)+2(n-3)}{2}=\frac{n(n-4)}{2}+1$. □

因此，n 为偶数时的封闭折线自交数达到最大值的几何模型，可以看作是 n 边双向对称星形.

(三) 结　　语

通过上面的讨论，我们有如下结论：

1° 对于任意的 $n(n\geqslant 3,n\in N)$ 都有唯一的确定的单向极位星形 $P_r(n)$，其生成数

$$r=\begin{cases}\dfrac{n-3}{2} & (n=4m\pm 1)\\ \dfrac{n-4}{2} & (n=4m)\\ \dfrac{n-6}{2} & (n=4m+2),\end{cases}\qquad (m\in N).$$

它的自交数至多为 nr，边数最少的单向极位星形是三角形.

2° 对于任意的 $n=2k(k>1,k\in N)$ 都有唯一的确定的双向对称星形 $P_r(n=2k)$，其半生成数 $r=\dfrac{n-4}{2}$，它的自交数至多为 $nr+1$，边数最少的双向对称星形是纽四边形.

3° 任意的 n 边封闭折线，当 n 为奇数时自交数至多为 $\dfrac{n(n-3)}{2}$，其几何模型是单向极位星形；当 n 为偶数时，自交数至多为 $\dfrac{n(n-4)}{2}+1$，其几何模型是双向对称星形.

下表就是 $n=3,4,5,6,7,8$ 的两类星形及其自交数.

单向极位星形	n 为奇数						
	自交数 k_n	$k_3=0$	$k_4=0$	$k_5=5$	$k_6=0$	$k_7=14$	$k_8=16$
双向对称星形	n 为偶数						
	自交数 k_n		$k_4=1$		$k_6=7$		$k_8=17$

参考文献

[1] A.Б.瓦西列夫斯基著，李光宇，王力新译，《数学解题教学法》，湖南教育出版社，1982 年.

[2] 杨林,也谈一个非标准图形的计数问题,《数学通报》,1992年第7期,6－8.
[3] 薛胜保,一个非标准图形计数问题,《数学通报》,1990年第6期,32.
[4] 王方汉,星形的生成及其性质,《中学数学》(湖北),1992年第7期,30－32.

凸五边形内一点问题

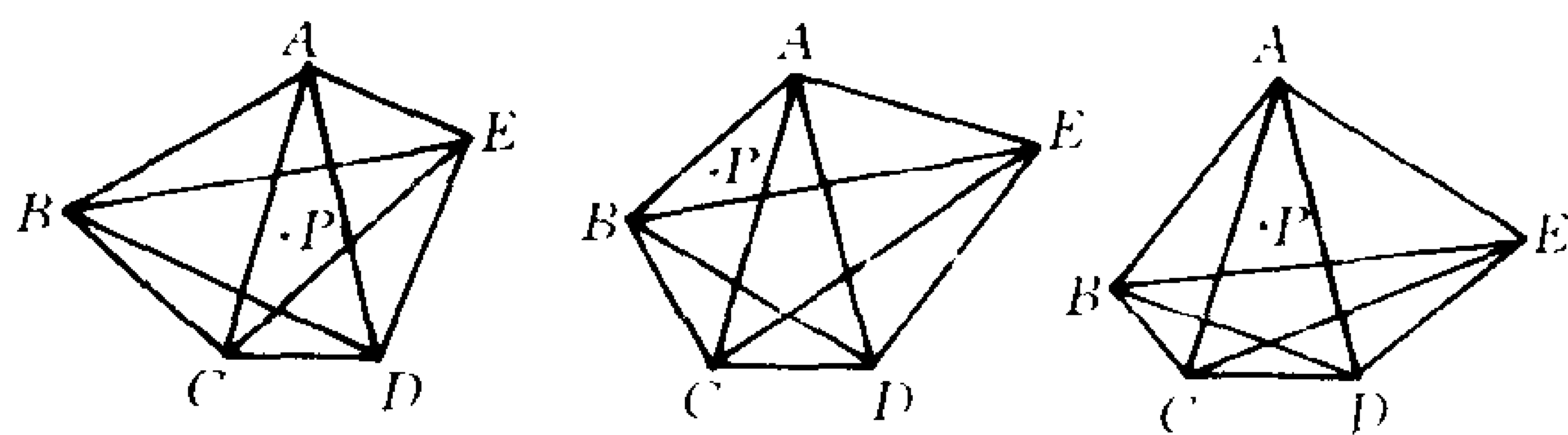
汕头大学数学所　王　振

1988 年，王振[1] 证明了：单位面积凸四边形内任意一点及四顶点组成的十个三角形中，至少有一个三角形的面积不超过$(2+2\sqrt{2})^{-1}$，并且这个界是不可改进的.

对五边形，何明秋与陈计[2] 的命题表明：相应的常数小于 1/6；王振和刘启铭[3] 实际上证明了：这个常数不大于 $2/(9+\sqrt{13})\approx 1/6.30$. 本文中，我们将它改进到最佳值 $\approx 1/6.73$，即

定理　单位面积凸五边形内任意一点及五个顶点组成的 20 个三角形中，至少有一个三角形的面积不超过 $x_0=0.1486\cdots$[是方程 $11x^3+10x^2+5x-1=0$ 的根]，并且 x_0 是可以达到的.

证明　如图 1 所示，点 P 在凸五边形 $ABCDE$ 内部的位置可以分布在三种不同的区域.



a. 星心区　　b. 星外区　　c. 星角区

图　1

(a) 如图 2 所示，为方便，记 $ABCDE$ 为 A_1、A_2、A_3、A_4、A_5，A_iP 交 $A_{i+1}A_{i-1}$ 于 B_i，则 $P \in B_1B_2B_3B_4B_5$，又记 20 个三角形中最小面积为 Δ.

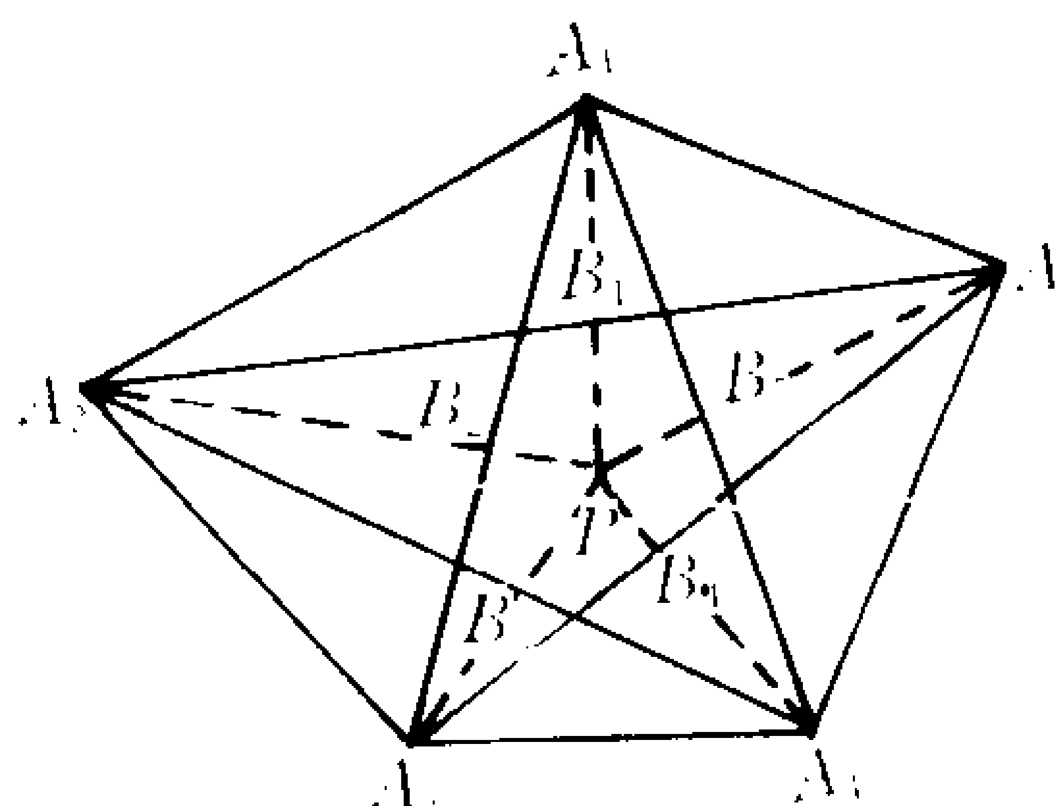


图 2

当 A_iP/B_iP 中有一个，例如 $A_1P/B_1P > 3.8$ 时，

$$S_{A_1A_2A_5} > 2.8S_{A_2PA_5} \geqslant 2.8\Delta;$$

由[1]

$$S_{A_2A_3A_4A_5} \geqslant (2+2\sqrt{2})\Delta,$$

因此

$$\Delta < (2+2\sqrt{2}+2.8)^{-1} \approx 0.1310\cdots.$$

所以不妨设 $A_iP/B_iP \leqslant 3.8, i=1,2,3,4,5.$ 因为

$$S_{A_4B_2P} = \frac{B_2P}{A_2B_2}S_{A_2A_4P}, S_{A_1B_2P} = \frac{A_1B_2}{A_1A_3}S_{A_1A_3P},$$

所以

$$\begin{aligned} S_{A_1A_3A_4} &= \left(1+\frac{A_3B_2}{A_1B_2}\right)S_{A_1B_2A_4} \\ &= \left(1+\frac{A_3B_2}{A_1B_2}\right)(S_{A_4B_2P}+S_{A_1B_2P}+S_{A_1PA_4}) \\ &= S_{A_1A_3P}+\left(1+\frac{A_3B_2}{A_1B_2}\right)S_{A_1PA_4} \\ &\quad +\left(1+\frac{A_3B_2}{A_1B_2}\right)\frac{B_2P}{A_2B_2}S_{A_2A_4P}, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} S_{PA_3A_4} &= \frac{A_3B_2}{A_1B_2}S_{A_1PA_4}+\left(1+\frac{A_3B_2}{A_2B_2}\right)\frac{B_2P}{A_2B_2}S_{A_2A_4P} \\ &\geqslant \left(\frac{1}{3.8}+\frac{4.8}{3.8}\cdot\frac{A_3B_2}{A_1B_2}\right)\Delta; \end{aligned}$$

同理也有

$$S_{PA_3A_4} \geqslant \left(\frac{1}{3.8}+\frac{4.8}{3.8}\cdot\frac{A_4B_5}{A_1B_5}\right)\Delta.$$

关于$S_{PA_iA_{i+1}}$这样的不等式共有5对，将它们两边分别相加，并用算术平均——几何平均不等式，得

$$2\geqslant 10\Delta\left(\frac{1}{3.8}+\frac{4.8}{3.8}\right),$$

所以

$$\Delta\leqslant\frac{3.8}{5\times 5.8}=0.1310\cdots\approx\frac{1}{7.63}.$$

(b) 在仿射不变的意义下，不妨设各点的坐标为$A_1(0,a)$，$A_2(-1,0)$，$A_3(-c,-d)$，$A_4(0,-1)$，$A_5(b,0)$，$P(x,y)$，如图 3.

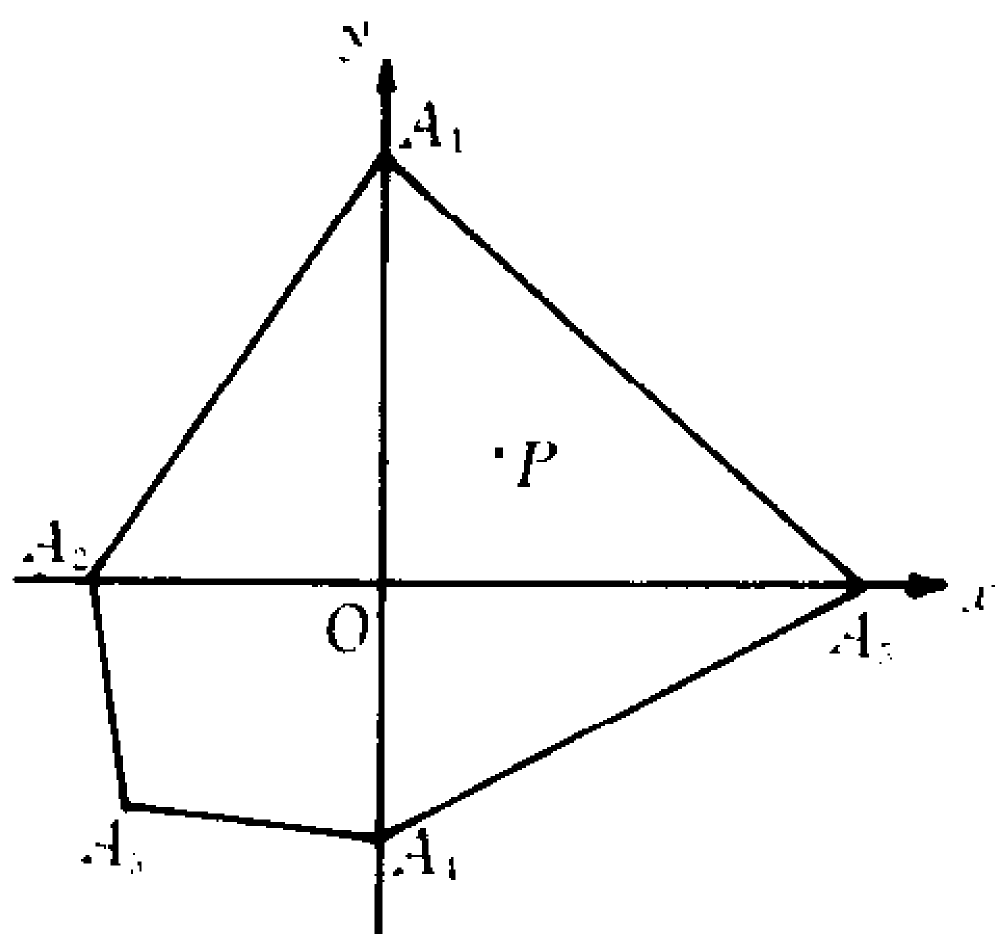


图 3

作五边形$A_1A_2A_3A_4A_5$到$A_1'A_2'A_3'A_4'A_5'$的变换：$A_2'\equiv A_2$，$A_4'\equiv A_4$，

$$A_1(0,a)\rightarrow A_1'(0,t),$$

$$A_5(b,0)\rightarrow A_5'(t,0),P(x,y)\rightarrow P'(s,s),$$

$$A_3(-c,-d)\rightarrow\begin{cases}\left(-\dfrac{c+d}{2},-\dfrac{c+d}{2}\right), & c+d<2,\\(-1,-1), & c+d\geqslant 2,\end{cases}$$

其中$t=\sqrt{(1+a)(1+b)}-1\left(\geqslant\sqrt{ab}\right)$，$s=t^2/(3t+1)$.

容易验证，在该变换下，五边形的面积不会增加；下面，我们来证明：三角形的最小面积Δ不会减少.

当$c+d<2$时，

$$S_{A_1'A_2'A_3'}=S_{A_3'A_4'A_5'}>S_{A_2'A_3'A_4'}=S_{A_2A_3A_4}\geqslant\Delta,$$

$$S_{A_1'P'A_5'}=S_{A'_1P'A_4'}=S_{A_2'P'A_5'}$$

$$=\frac{1}{2}\cdot\frac{t^2(t+1)}{3t+1}=\frac{1}{2}\cdot\frac{(t+1)t^2}{t^2-1+2(t+1)^2}$$

$$\geqslant\frac{1}{2}\cdot\frac{(t+1)^2ab}{ab-1+2(t+1)^2}$$

$$= \frac{ab}{2} \Big/ \left(\frac{a}{1+a} + \frac{b}{1+b} + 1 \right)$$

$$\geqslant \frac{1}{2} \min\{(1+a)x, (1+b)y, ab - ax - by\}$$

$$= \min\{S_{A_1PA_2}, S_{A_1PA_4}, S_{A_1PA_5}\} \geqslant \Delta;$$

$$S_{P'A_4'A_5'} \geqslant S_{P'A_2'A_5'} \geqslant \Delta;$$

$$S_{P'A_3'A_4'} \geqslant S_{A_2'A_3'A_4'} \geqslant \Delta.$$

当$c+d \geqslant 2$时，我们只须再验证与A_3'有关的$\triangle A_2'A_3'A_4'$与$\triangle A_3'A_4'A_5'$. 由于$S_{A_2'A_3'A_4'} = S_{A_3'A_4'A_5'} = \frac{1}{2}$，因此只需证明$\Delta \leqslant \frac{1}{2}$. 这时，不妨设$ab > 1$. 由$S_{A_1A_2A_3} = \frac{1}{2}(a + d - ac)$，$S_{A_3A_4A_5} = \frac{1}{2}(b + c - bd)$，得

$$(a + b + 2)\Delta \leqslant (b+1)S_{A_1A_2A_3} + (a+1)S_{A_3A_4A_5}$$

$$= \frac{1}{2}[(a + b + 2) + (1 - ab)(c + d - 2)]$$

$$\leqslant \frac{1}{2}(a + b + 2),$$

即$\Delta \leqslant \frac{1}{2}$.

现在，我们只须讨论变换后的情况，这时

$$S_{A_1A_2A_4A_5} = \frac{1}{2}(1+t)^2,$$

$$\Delta \leqslant \min\left(\frac{1}{2}, \frac{1}{2} \cdot \frac{t^2(t+1)}{3t+1} \right),$$

所以

$$S_{A_1A_2A_3A_4A_5}/\Delta \geqslant 1 + S_{A_1A_2A_4A_5}/\Delta$$

$$\geqslant 1 + \max\left((1+t)^2, \frac{(1+t)(3t+1)}{t^2} \right)$$

$$\geqslant 1 + (1 + t_0)^2 = 7.156\cdots,$$

其中$t_0 = 1.481\cdots$是方程$t^3 + t^2 - 3t - 1 = 0$的根.

所以

$$\frac{\Delta}{S_{A_1A_2A_3A_4A_5}} \leqslant 0.139\cdots \approx \frac{1}{7.16}.$$

(c) 设 $k \approx 1.32$ 是方程 $y^3 - y - 1 = 0$ 的根，我们在[3]中已经证明了

$$\frac{\Delta}{S_{ABCDE}} \leqslant \frac{k^2}{2k^3 + 2k^2 + 2k + 1} = x_0 = 0.148\cdots,$$

易知 x_0 是 $11x^3 + 10x^2 + 5x - 1 = 0$ 的根.

最后，如图 4 的实例表明，本文所给的常数是可以达到的：其中

$$\begin{aligned} AM/MC &= AN/ND \\ &= BM/MP \\ &= EN/NP \approx 1.32. \end{aligned}$$ □

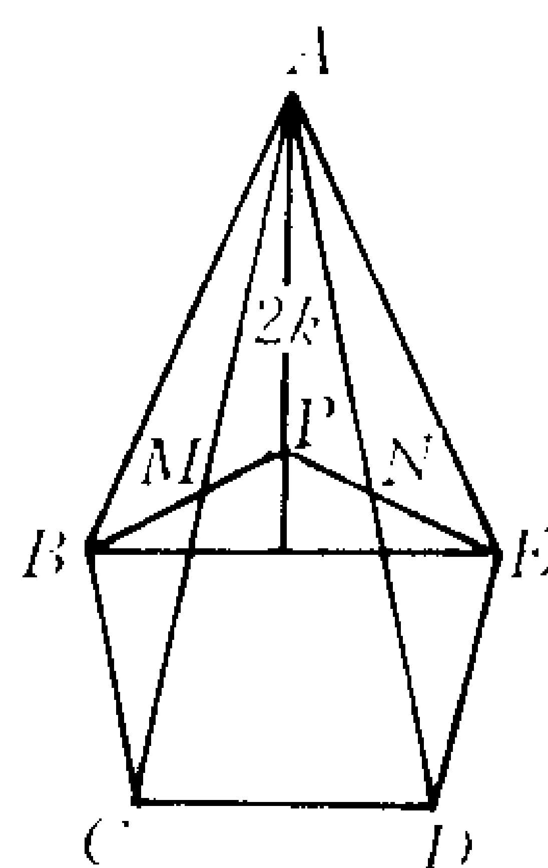


图 4

猜想 单位面积凸 m 边形内一点及 m 个顶点组成的诸三角形中，必有一个的面积小于 $4\pi^2/m^3$.

说明 本文的工作完成于 1989 年，见[4]；后知 A. W. M. Dress，杨路与曾振柄[5] 也得到了本文的结论.

参考文献

[1] 王振，有奖征解问题 1，《数学通讯》，1988 年第 6 期，7；1988 年第 12 期，36.

[2] 何明秋，陈计，有奖征解问题 1，《数学通讯》，1989 年第 6 期，41.

[3] 王振，刘启铭，有奖征解问题 1[1989，6]的解答，《数学通讯》，1991 年第 5 期，41—42，23.

[4] 王振，凸五边形内一点问题，《蛙鸣数学杂志》，第 38—39 期，中国科学技术大学数学系，1989 年 5 月，32—39.

[5] A. W. M. Dress, L. Yang, Z. B. Zeng, Heilbronn problem of six points in a planar convx body, kolloquim uber Kombinatorik, Nov. 17 — 18, 1991, Techenische Universita Braunschweig, Germany.

圆盘上七点的 Heilbronn 分布

中国科学院成都分院　曾振柄　周大军

(一)

1950 年,Heilbronn 提出如下问题:设 K 是一平面上给定的凸区域,面积为 $|K|$. n 个点在 K 中如何分布时候,才能使所形成的最小三角形面积达到最大值?对于较大的 n,该最大值 $H_n(K)$:

$$H_n(K) = \max_{P_1 \cdots P_n \in K} \min_{1 \leqslant i < j < k \leqslant n} \{|P_i P_j P_k|\} / |K|$$

的渐近估计已有一系列的讨论,例如 Komlos 等人的文[1],[2]:

$$c_1 (\log n)/n^2 \leqslant H_n(K) \leqslant e^{c_2 \sqrt{\log n}} / n^{8/7},$$

这里 c_1, c_2 是绝对常数;对于较小的 n,值 $H_n(K)$ 的计算有很大的困难. 1972 年 Goldberg 在文[3] 中对于 K 是正方形和圆的情形,未加证明地提出了 $H_n(K)$ 的一些猜测值. 现有的结果[4-8] 主要是 $n = 5, 6$ 和 K 为正方形,三角形,梯形和圆盘的情形. 这篇短文的目的是处理 $n = 7$, K 是圆盘的问题,解这类问题的一般方法可参考[4-6].

(二)

以下设 K 为半径为 1 的圆盘.

定理　$H_7(K) = [\sin(2\pi/7) - \sin(4\pi/7)/2]/\pi.$

我们首先给出以下引理.

引理 1 设 $P_1,P_2,\cdots,P_7$ 为凸七边形,则有

$$\min_{1\leqslant i<j<k\leqslant 7}|P_iP_jP_k|\leqslant[\sin(2\pi/7)-\sin(4\pi/7)/2]\cdot|P_1P_2\cdots P_7|/[7\sin(2\pi/7)/2].$$

证明 易知,$|P_iP_jP_k|$ 要取到最小值,必需 P_i,P_j,P_k 是凸七边形 $P_1P_2\cdots P_7$ 的三个相邻顶点(我们称这种三角形为外围三角形).先证(a):$\min\limits_{1\leqslant i<j<k\leqslant 7}|P_iP_jP_k|/|P_1P_2\cdots P_7|$ 要达到最大值,必然各个外围三角形的面积相等.如果 $|P_{i-1}P_iP_{i+1}|>\min|P_iP_jP_k|$,将 P_i 向角 $P_{i+3}P_iP_{i-3}$ 内作小扰动至 P_i',可使 $|P_{i-2}P_{i-1}P_i'|>\min|P_i'P_{i+1}P_{i+2}|>\min|P_{i-1}P_i'P_{i+1}|>\min$,所得新的七边形 $P_1P_2\cdots P_{i-1}P_i'P_{i+1}\cdots P_7$ 的面积比 $P_1P_2\cdots P_7$ 的面积减小,但最小三角形面积不减小,这说明 $P_1P_2\cdots P_7$ 取不到 max. min.(参见图 1).再证(b):若 $P_1P_2\cdots P_7$ 各外围三角形面积相等,则它是仿射正七边形,不妨设经过某一仿射变换之后,P_1,P_3,P_4,P_5,P_6 在某一圆周上,要证 P_2,P_7 亦在该圆周上,设 P_4P_7 沿 P_3P_1 方向与圆周交于 P_7',P_6P_7 沿 P_5P_1 方向于圆周交于 P_7''.由于 $\overset{\frown}{P_3P_4}=\overset{\frown}{P_5P_6}$,$\overset{\frown}{P_1p_7''}=\overset{\frown}{P_5P_6}$;$\overset{\frown}{P_1P_7'}=\overset{\frown}{P_3P_4}$,得 $\overset{\frown}{P_1P_7'}=\overset{\frown}{P_1P_7''}$,$P_7'=P_7''=P_7$.从而 P_7 在圆周上.P_2 同样(见图 2).以上证明了引理 1. □

实际上,这一引理对于一般 n 成立:(a) 的方法可用于一般 $n\geqslant 7$,而(b) 的方法可用于一般奇数 $n\geqslant 7$.

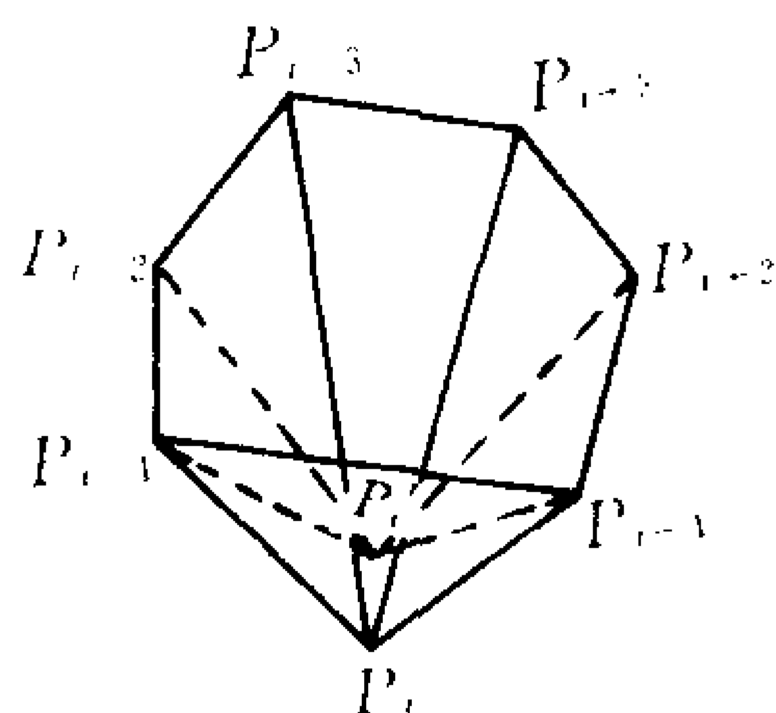


图 1

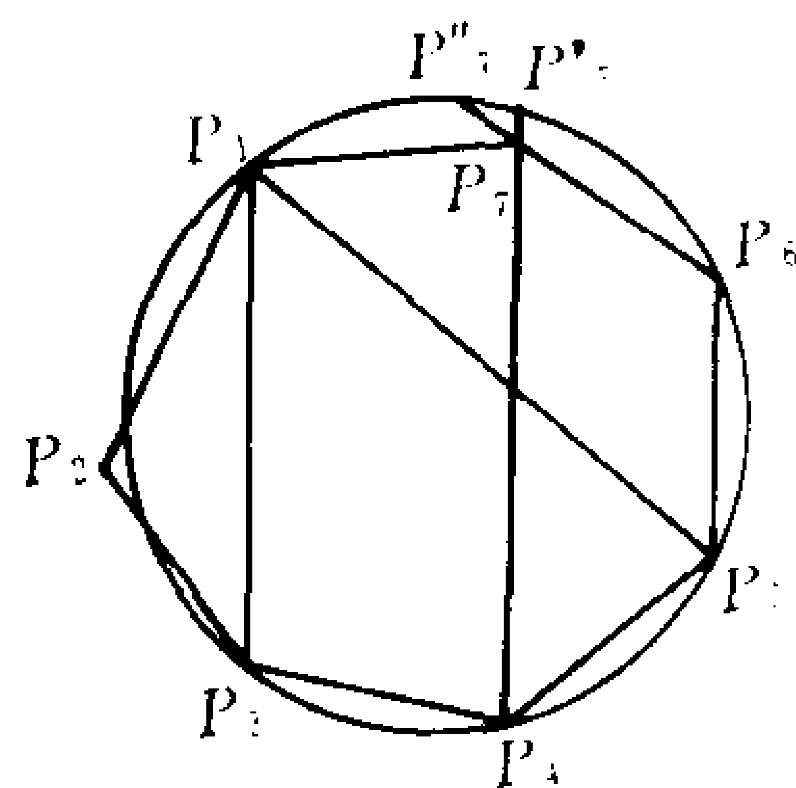


图 2

引理 2　设 $Q_1,Q_2,Q_3,Q_4 \in$ 弓形，弧度为 x，则

(a) $|Q_1Q_2Q_3Q_4| \leqslant 3\sin(x/3)/2$,

(b) $\min\limits_{1\leqslant i,j,k\leqslant 4} |Q_iQ_jQ_k| \leqslant \sin(x/3) - \sin(2x/3)/2$.

证明　不难证明，若 $|Q_1Q_2Q_3Q_4|$ 取到最大值，则 Q_1,Q_2,Q_3,Q_4 诸点均在圆弧上，而且有两点是该弧的端点，另外两点是该弧的三等分点．同样 $\min|Q_iQ_jQ_k|$ 要取到最大值，也要满足上述条件，然后计算即可. 如图 3.

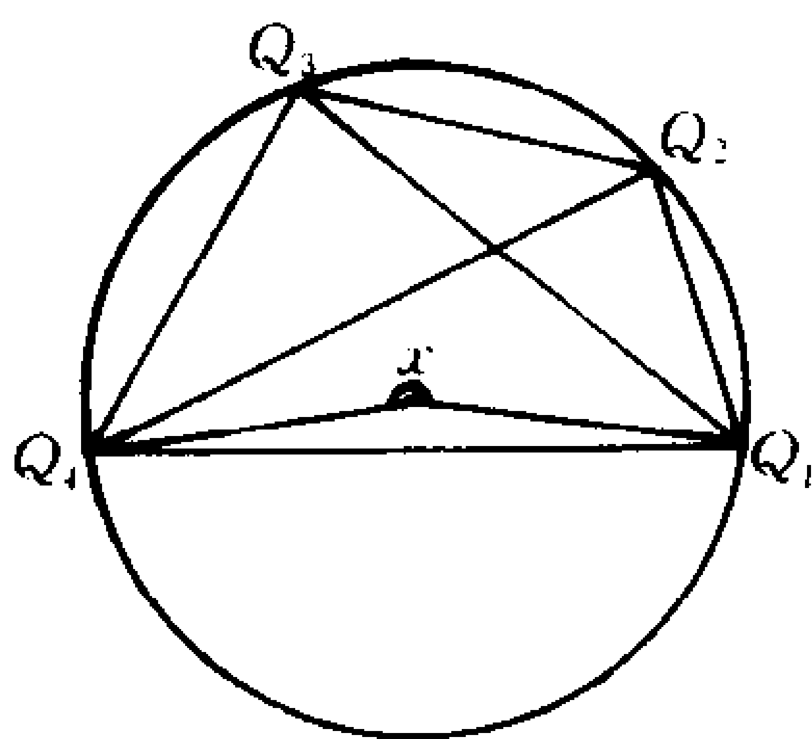


图　3

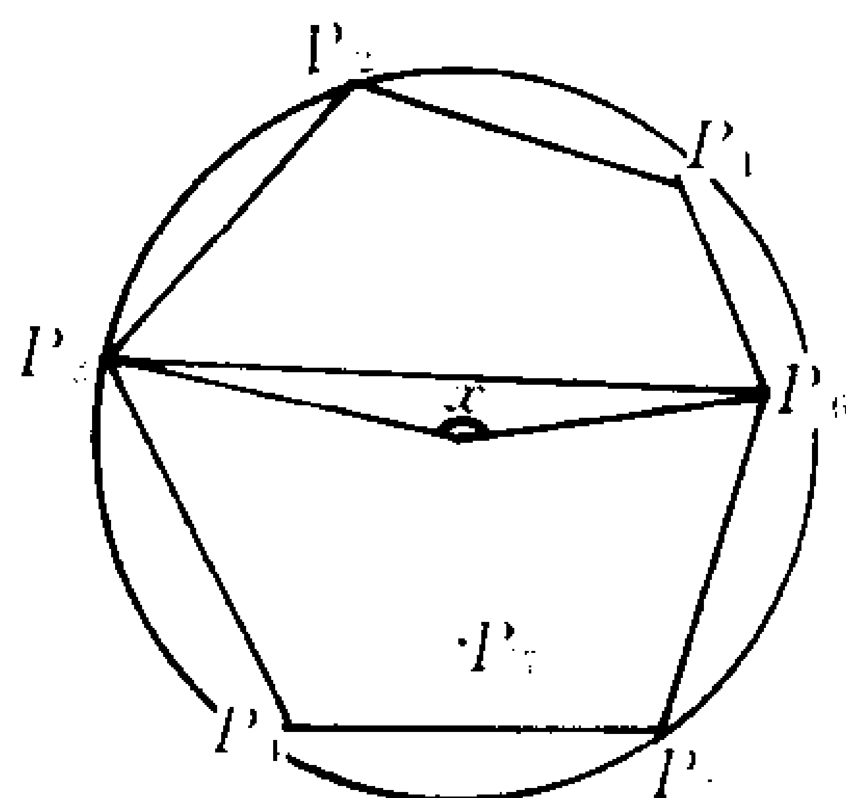


图　4

引理 3　(a) 设一点 $r_5 \in$ 四边形 $r_1r_2r_3r_4$，则

$$\min_{1\leqslant i<j<k\leqslant 5} |r_ir_jr_k| \leqslant |r_1r_2r_3r_4|(2+2\sqrt{2});$$

(b) 设两点 $r_5,r_6 \in$ 四边形 $r_1r_2r_3r_4$，则

$$\min_{1\leqslant i<j<k\leqslant 6} |r_ir_jr_k| \leqslant |r_1r_2r_3r_4|/8.$$

证明参看[5]. 结论(a) 最初是由王振[9] 发现并证明的.

现在我们前面叙述的定理的**证明**.

首先，若 $P_1,P_2,\cdots,P_7$ 的凸包是三角形或四边形，则 $P_1P_2\cdots P_7$ 至少划分为 9 个不相交的小三角形 $P_iP_jP_k$，因而 $\min|P_iP_jP_k| \leqslant |P_1P_2\cdots P_7|/9 \leqslant \frac{1}{9}\cdot\frac{4}{2}\sin\frac{2\pi}{4} = \frac{2}{9} = 0.2222\cdots$；若 $P_1P_2\cdots P_7$ 的凸包为五边形 $P_1P_2\cdots P_5$，不妨设 $P_6,P_7 \in$

$P_1P_2P_3P_4$，则由引理 2(a)，$|P_1P_2\cdots P_7| = |P_1P_4P_5| + |P_1P_2P_3P_4| \geqslant \min|P_iP_jP_k| + 8\min|P_iP_jP_k| = 9\min|P_iP_jP_k|$，故 $\min|P_iP_jP_k| \leqslant \frac{1}{9} \cdot |P_1P_2\cdots P_5| = \frac{1}{9} \cdot \frac{5}{2}\sin(2\pi/5) = 0.2641\cdots$.

其次，若 $P_1P_2\cdots P_7$ 的凸包是六边形 $P_1P_2\cdots P_6$，不妨设 $P_7 \in P_3P_4P_5P_6$. 如图 4，P_3P_4 把 K 分为两个弓形，设含有 $P_1P_2P_3P_4$ 的一个度数为 $3x$，另一个为 $2\pi - 3x$，则由引理 2(a) 必须有

$$\sin x - \sin 2x/2 \geqslant \min_{1\leqslant i,j,k\leqslant 7}|P_iP_jP_k|,$$

由引理 2(b) 和 3(a)，又有

$$\min_{1\leqslant i,j,k\leqslant 7}|P_iP_jP_k| \leqslant 3\sin[(2\pi - 3x)/3]/[2\cdot(2+2\sqrt{2})];$$

从上二式解出 $x < \frac{2\pi}{7} - 0.005$，从而

$$\min_{1\leqslant i,j,k\leqslant 7}|P_iP_jP_k| < \sin(2\pi/7) - \sin(4\pi/7)/2.$$

最后，若 $P_1P_2\cdots P_7$ 是凸七边形，则由引理 1，$\min|P_iP_jP_k| \leqslant \left(\sin\frac{2\pi}{7} - \frac{1}{2}\sin\frac{4\pi}{7}\right)|P_1P_2\cdots P_7| \Big/ \left(7\sin\frac{2\pi}{7}\Big/2\right)$，但因 $P_1P_2\cdots P_7 \in K$，$|P_1P_2\cdots P_7| \leqslant \left(7\sin\frac{2\pi}{7}\Big/2\right)$，故

$$\min_{1\leqslant i,j,k\leqslant 7}|P_iP_jP_k| \leqslant \sin(2\pi/7) - \sin(4\pi/7)/2.$$

综上所述，$\forall\ P_1,\cdots P_7 \in K$，$\exists\ i,j,k$，使

$$|P_iP_jP_k| \leqslant \sin(2\pi/7) - \sin(4\pi/7)/2,$$

而且取到等号的条件是 $P_1P_2\cdots P_7$ 为 K 的内接正七边形，即：

$$H_7(K) = [\sin(2\pi/7) - \sin(4\pi/7)/2]/\pi. \qquad \square$$

（三）

Goldberg 在[3]中猜测 $n \leqslant 11$ 时，n 点在圆盘中的 Heilbronn 分布为圆内接 n 边形，本文证实了 $n = 7$ 的情况，$n = 5,6$ 时的正确

性见[8]. 但 Goldberg 的猜测在 $n=8$ 时已不成立. 举例如下:

设 $P_1P_2\cdots P_7$ 是圆内接正七边形各顶点，而 P_8 是圆心，则 $\min|P_iP_jP_k| = \frac{1}{2}\sin\frac{6x}{7} = \frac{1}{2}\sin\frac{\pi}{7}$；但对圆内接正八边形 $Q_1Q_2\cdots Q_8$，$\min|Q_iQ_jQ_k| = \sin\frac{2\pi}{8} - \frac{1}{2}\sin\frac{4\pi}{8}$. 而 $\frac{1}{2}\sin\frac{\pi}{7} = 0.2169\cdots > \sin\frac{2\pi}{8} - \frac{1}{2}\sin\frac{4\pi}{8} = \frac{\sqrt{2}-1}{2} = 0.2071\cdots$.

参考文献

[1] J. Komlos, J. Pinfz, E. Szemeredi, A lower bound for Heilbronn's problem, J. London Math. Soc. (2), 25(1982), 13 — 14.

[2] J. Komlos, J. Pintz, E. Szemeredi, On Heilbronn's triangle problem, J. London Math. Soc. (2), 24(1981), 385 — 296.

[3] M. Goldberg, Maximizing the smallest triangle made by points in a square, Math. Mag., 45(1972), 135 — 144.

[4] 杨路，张景中，正方形内六点问题，《数学讲座》(下)，四川人民出版社，1980年，159 — 175.

[5] 杨路，张景中，曾振柄，关于最初几个 Heilbronn 数的计算，《数学年刊》，A 辑，1992年第4期，503 — 515.

[6] 杨路，张景中，曾振柄，三角形内的 Heilbronn 问题，《数学学报》，1994年第5期，678 — 689.

[7] 周大国，梯形的 Heilbronn 问题，(硕士学位论文).

[8] 陈计，刘竞欧，关于圆形区域的最初几个 Heilbronn 数，《宁波大学学报》(理工版)，1989年第1期，6 — 8.

[9] 王振，有奖征解问题1，《数学通讯》，1988年第6期，7；1988年第12期，36.

[10] 陈计，问题225，《数学教学》，1990年第4期，23；1990年第5期，40.

平面八点的一个极值问题

上海科学技术出版社　田廷彦
华东师范大学数学系　熊　斌

平面上有n个点，每两点之间有一个距离，记最大距离同最小距离之比为λ_n.

吴报强[1]在1991年猜测：$\inf\lambda_6 = 2\sin\frac{2\pi}{5}$，$\inf\lambda_7 = 2$，$\inf\lambda_8 = \sin\frac{3\pi}{7}\Big/\sin\frac{\pi}{7}$，$\inf\lambda_9 = \csc\frac{\pi}{8}$. 前两个猜测是正确的，见文[2－4]. 本文将证明 $\inf\lambda_8 = \sin\frac{3\pi}{7}\Big/\sin\frac{\pi}{7}$.

先计算一下$\sin\frac{3\pi}{7}\Big/\sin\frac{\pi}{7}$，$\sin\frac{3\pi}{7}\Big/\sin\frac{\pi}{7} = 1 + 2\cos\frac{2\pi}{7} = 2.24697960\cdots$. 下面，为方便起见，记 $k_0 = \sin\frac{3\pi}{7}\Big/\sin\frac{\pi}{7}$.

先给出几个引理.

引理1　在$\triangle ABC$中，$\frac{BC}{\min(AB, AC)} \geqslant 2\sin\frac{\angle A}{2}$.

引理1的证明见文[1].

引理2　若点$P \in \triangle ABC$（注："$\in$"表示P在$\triangle ABC$内部或边界上），则有

$$\frac{BC}{\min(PA, PB, PC)} \geqslant \begin{cases} 2\sin\angle A, & \angle A < \frac{\pi}{2}; \\ 2, & \angle A \geqslant \frac{\pi}{2}. \end{cases}$$

证明　(1) 当$\angle A < \frac{\pi}{2}$时，设$\triangle ABC$之外心为O. 图1，图2分别表示$\triangle ABC$为锐角三角形和非锐角三角形的情况.

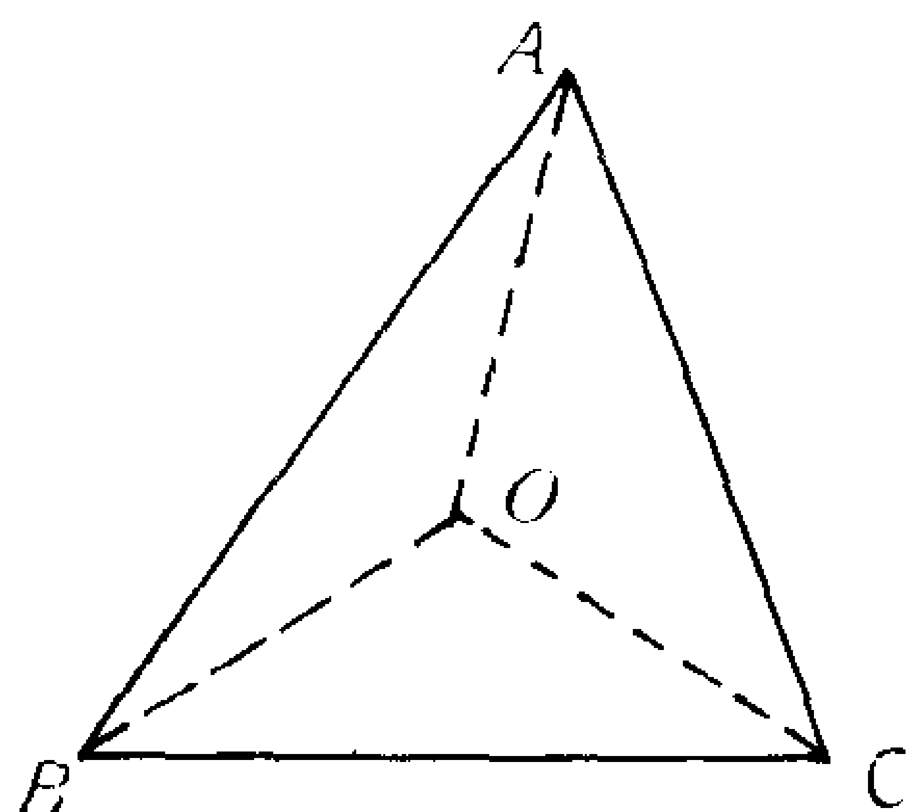


图 1

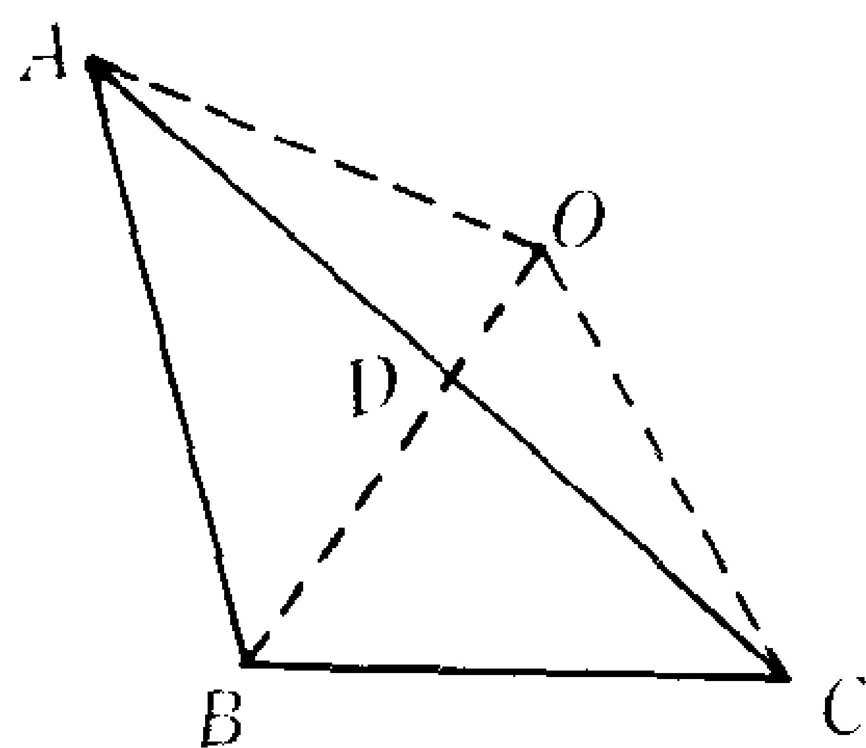


图 2

设外接圆半径为 R.

若 $\triangle ABC$ 是锐角三角形，如图 1，O 在其内部，不妨设 $P \in \triangle AOC$，于是 $\min(PA,PB,PC) \leqslant \min(PA,PC) \leqslant \dfrac{PA+PC}{2} \leqslant \dfrac{AO+CO}{2} = R$.

若 $\triangle ABC$ 是非锐角三角形，如图 2，不妨设 $\angle B \geqslant 90°$，并设 BO 交 AC 于 D，于是 P 必落在 $\triangle ABD$ 和 $\triangle BDC$ 之一之中，同理易知此时仍有：$\min(PA,PB,PC) \leqslant R$. 再由 $R = \dfrac{BC}{2\sin\angle A}$，代入整理，便得结论.

(2) 当 $\angle A \geqslant \dfrac{\pi}{2}$ 时，相应的结果已在文[2]中给出. □

引理3 设在四边形 $ABCD$ 中，$DA = a$，$AB = b$，$BC = c$，$CD = x$，$\angle DAB = \alpha$，$\angle ABC = \beta$，则

$$x^2 = a^2 + b^2 + c^2 - 2ab\cos\alpha - 2bc\cos\beta + 2ac\cos(\alpha+\beta).$$

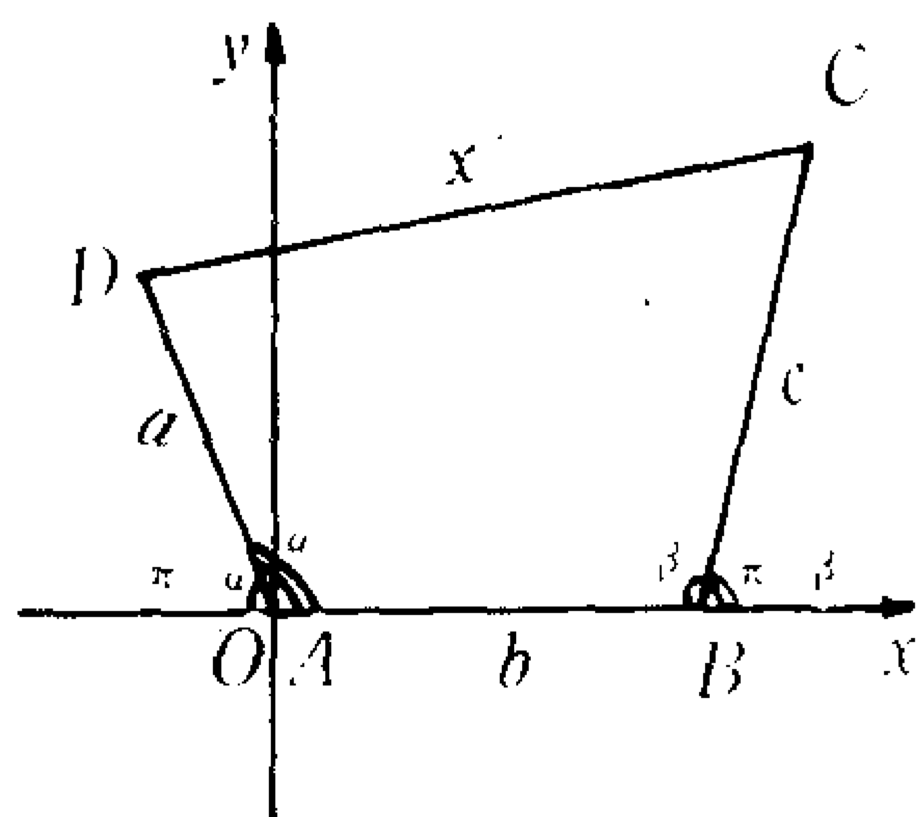


图 3

证明 如图 3，建立直角坐标系，置 A 于原点，B 于 (b,o) 点，C、D 在上半平面，则 C 的坐标为

$(b + c\cos(\pi-\beta), c\sin(\pi-\beta))$

$= (b - c\cos\beta, c\sin\beta)$.

D 的坐标为 $(-a\cos(\pi - \alpha), a\sin(\pi - \alpha)) = (a\cos\alpha, a\sin\alpha)$.

于是 $x^2 = CD^2$

$$
\begin{aligned}
&= (b - c\cos\beta - a\cos\alpha)^2 + (c\sin\beta - a\sin\alpha)^2 \\
&= b^2 + c^2\cos^2\beta + a^2\cos^2\alpha - 2bc\cos\beta - 2ab\cos\alpha \\
&\quad + 2ac\cos\alpha\cos\beta + c^2\sin^2\beta + a^2\sin^2\alpha - 2ac\sin\alpha \cdot \sin\beta \\
&= a^2 + b^2 + c^2 - 2ab\cos\alpha - 2bc\cos\beta + 2ac(\cos\alpha\cos\beta - \\
&\quad \sin\alpha\sin\beta) \\
&= a^2 + b^2 + c^2 - 2ab\cos\alpha - 2bc\cos\beta + 2ac\cos(\alpha + \beta).
\end{aligned}
$$

□

推论 1 按引理 3 的条件和记号，并且如果有 $\alpha \geqslant \frac{\pi}{2}, \beta \geqslant \frac{\pi}{2}$，则有

$$\frac{x}{\min(a,b,c)} \geqslant \sqrt{3 - 2(\cos\alpha + \cos\beta - \cos(\alpha + \beta))}.$$

证明 记 $d = \min(a,b,c)$，由引理 3，得

$$
\begin{aligned}
x^2 &= a^2 + b^2 + c^2 - 2ab\cos\alpha - 2bc\cos\beta + 2ac\cos(\alpha + \beta) \\
&= (a - c)^2 + b^2 + 2ac(1 + \cos(\alpha + \beta)) \\
&\quad - 2ab\cos\alpha - 2bc\cos\beta.
\end{aligned}
$$

易知由条件有 $-2\cos\alpha \geqslant 0$, $-2\cos\beta \geqslant 0$，且 $(a - c)^2 \geqslant 0$，又 $1 + \cos(\alpha + \beta) \geqslant 0$，于是

$$
\begin{aligned}
x^2 &\geqslant d^2 + 2d^2(1 + \cos(\alpha + \beta)) + (-2\cos\alpha - 2\cos\beta)d^2 \\
&= 3d^2 - 2d^2(\cos\alpha + \cos\beta - \cos(\alpha + \beta)).
\end{aligned}
$$

两边除以 d 再开根号即得结论. □

推论 2 条件如引理 3，若 $\alpha + \beta \geqslant \frac{3}{2}\pi$，则

$$\frac{x}{\min(a,b,c)} > \sqrt{5 + 4\cos(\alpha + \beta)}.$$

证明 易知 α、β 都是钝角，于是 $\frac{\alpha + \beta}{2}$ 为钝角. 由推论 1 知

$$\frac{x}{\min(a,b,c)} \geqslant \sqrt{3 - 2(\cos\alpha + \cos\beta) + 2\cos(\alpha + \beta)}.$$

不妨设 $\alpha \geqslant \beta$,易知

$$0 \leqslant \alpha - \frac{\alpha+\beta}{2} < \pi - \frac{\alpha+\beta}{2} < \frac{\pi}{2},$$

于是 $-2(\cos\alpha + \cos\beta) = 4\cos\left(\pi - \frac{\alpha+\beta}{2}\right)\cos\left(\alpha - \frac{\alpha+\beta}{2}\right)$

$$> 4\cos\left(\pi - \frac{\alpha+\beta}{2}\right)\cos\left(\pi - \frac{\alpha+\beta}{2}\right)$$

$$= 4\cos^2\frac{\alpha+\beta}{2} = 2(1+\cos(\alpha+\beta)),$$

代入便得推论 2 之结论. □

推论 3 由推论 2 易知,若八点中找出四点 A、B、C、D 构成一凸四边形,且 $\angle BAD + \angle ADC \geqslant \frac{271}{180}\pi$,则

$$\lambda_8 \geqslant \frac{BC}{\min(BA,AD,DC)} > \sqrt{5 + 4\sin\frac{\pi}{180}} = 2.25162\cdots > k_0.$$

此推论用到余弦函数在$[\frac{3}{2}\pi, 2\pi]$上递增这一事实.

引理 4 若两点 A、D 在线段 BC 之同侧,且

$$\angle BAC \geqslant \frac{4\pi}{7}, \angle BDC \geqslant \frac{4\pi}{7}, 则 \frac{BC}{\min(BA,AD,DC,BD,AC)} \geqslant k_0.$$

证明 分两种情况讨论.

(1) 若 A,B,C,D 不能组成一凸四边形,不妨设有 $D \in \triangle ABC$,如图 4 所示(为方便起见,D 未画出).

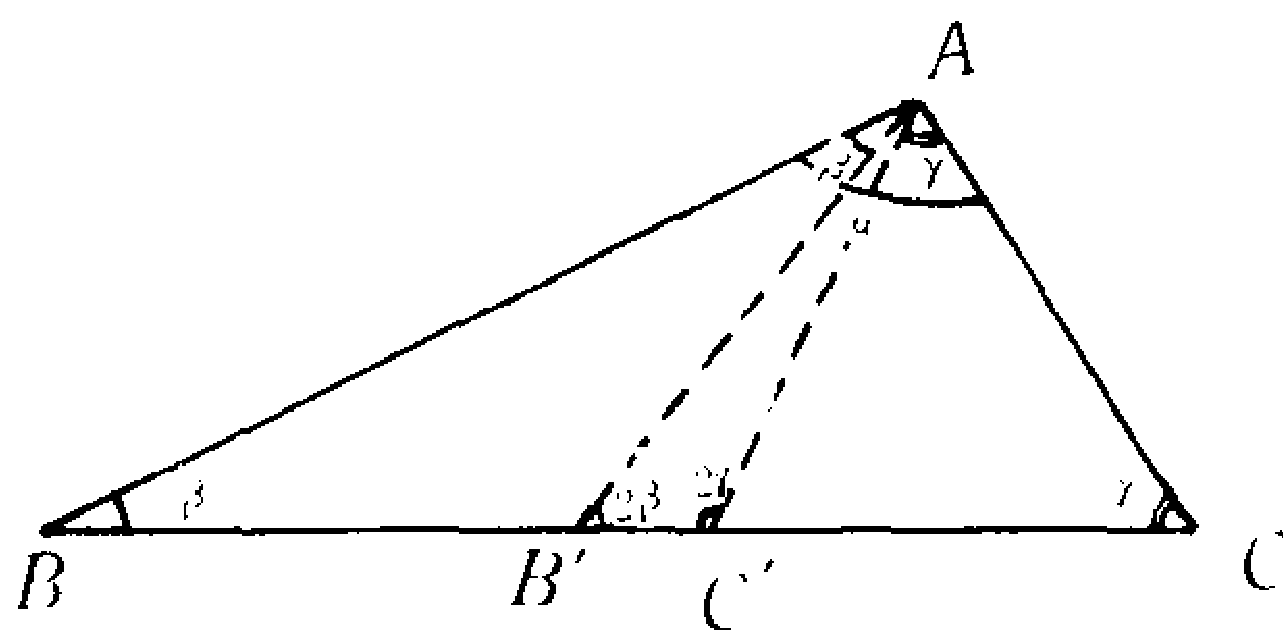


图 4

不妨设 $\angle A = \alpha \geqslant \frac{4\pi}{7}$, $\angle B = \beta$, $\angle C = \gamma$, 且 β 为 $\triangle ABC$ 最小内角.

由于$\beta+\gamma<\frac{\pi}{2}<\alpha$，故作$\angle BAB'=\beta$，$\angle CAC'=\gamma$，$B'$、$C'$在$BC$上，显然，$B'$在图中左侧，$C'$在右侧.

若$D\in\triangle ABB'$，则$\min(DA,DB,DC)$

$$\leqslant\min(DA,DB)\leqslant\frac{DA+DB}{2}\leqslant\frac{AB'+BB'}{2}=AB'$$

$$=\frac{AB}{2\cos\beta}=\frac{\sin\gamma}{2\cos\beta}\cdot\frac{BC}{\sin\alpha}.$$

若$D\in\triangle AB'C'$，易知（见文[3]有关引理）

$$\min(DA,DB,DC)\leqslant DA\leqslant\max(AB',AC')=AB'$$

$(\because\angle AC'B'=2\gamma\geqslant2\beta=\angle AB'C')$.

若$D\in\triangle AC'C$，则同理可证$\min(DA,DB,DC)\leqslant AC'\leqslant AB'$.

于是，无论D在哪里，总有$\min(DA,DB,DC)\leqslant AB'=\frac{\sin\gamma}{2\cos\beta}\cdot\frac{BC}{\sin\alpha}$.

下面分两种情况讨论.

(i)$2\beta\geqslant\gamma$，于是$AC\geqslant AB'$，故

$$\min(DA,DB,DC,AB,AC)\leqslant\min(DA,DB,DC)$$

$$\leqslant AB'=\frac{\sin\gamma}{2\cos\beta}\cdot\frac{BC}{\sin\alpha},$$

于是有$\frac{BC}{\min(DA,DB,DC,AB,AC)}\geqslant\frac{2\cos\beta\sin\alpha}{\sin\gamma}$

$$=\frac{\sin(\alpha+\beta)+\sin(\alpha-\beta)}{\sin\gamma}=\frac{\sin\gamma+\sin(\alpha-\beta)}{\sin\gamma}$$

$$=1+\frac{\sin(\alpha-\beta)}{\sin\gamma}=1-\frac{\sin(2\alpha+\gamma)}{\sin\gamma}$$

$$=1-\cos2\alpha+(-\sin2\alpha)\mathrm{ctg}\gamma,$$

考察$(-\sin2\alpha)\mathrm{ctg}\gamma$，

$\because\pi<2\alpha<2\pi$，$\therefore-\sin2\alpha>0$.

$\gamma\leqslant2\beta=2(\pi-\alpha-\gamma)$，$\therefore\gamma\leqslant\frac{2}{3}(\pi-\alpha)\leqslant\frac{2}{7}\pi<\frac{\pi}{2}$.

$\therefore (-\sin 2\alpha)\mathrm{ctg}\gamma \geqslant (-\sin 2\alpha)\mathrm{ctg}(\frac{2}{3}(\pi-\alpha))$，因此，最小值必在 $\gamma=\frac{2}{3}(\pi-\alpha)$，$\beta=\frac{1}{3}(\pi-\alpha)$ 时取到，此时有

$$\frac{BC}{\min(DA,DB,DC,AB,AC)} \geqslant \frac{2\cos\beta\sin\alpha}{\sin\gamma}$$

$$\geqslant \frac{2\cos\frac{1}{3}(\pi-\alpha)\sin\alpha}{\sin\frac{2}{3}(\pi-\alpha)} = \frac{\sin(\pi-\alpha)}{\sin\frac{1}{3}(\pi-\alpha)}$$

$$= 3-4\sin^2\frac{1}{3}(\pi-\alpha)$$

$$\geqslant 3-4\sin^2\frac{1}{3}(\pi-\frac{4}{7}\pi) = k_0.$$

(ii) $2\beta<\gamma$，于是 $AC<AB'$，

且 $\beta<\frac{\gamma}{2}=\frac{\pi-\alpha-\beta}{2}$，即 $\beta<\frac{\pi-\alpha}{3}<\frac{\pi}{2}$.

$$\therefore \frac{BC}{\min(DA,DB,DC,AB,AC)} \geqslant \frac{BC}{AC} = \frac{\sin\alpha}{\sin\beta} > \frac{\sin\alpha}{\sin\frac{\pi-\alpha}{3}}$$

$$= 3-4\sin^2\frac{1}{3}(\pi-\alpha) \geqslant k_0.$$

(2) 若 A、B、C、D 组成一凸四边形，如图 5 所示，由 (1) 中 (ii) 的讨论知，有 $\angle DCB<2\angle DBC$，否则结论已经成立. 又由 $\angle BDC\geqslant\frac{4\pi}{7}$，可得 $\angle DCB<\frac{2\pi}{7}$，同理，$\angle ABC<\frac{2\pi}{7}$，于是

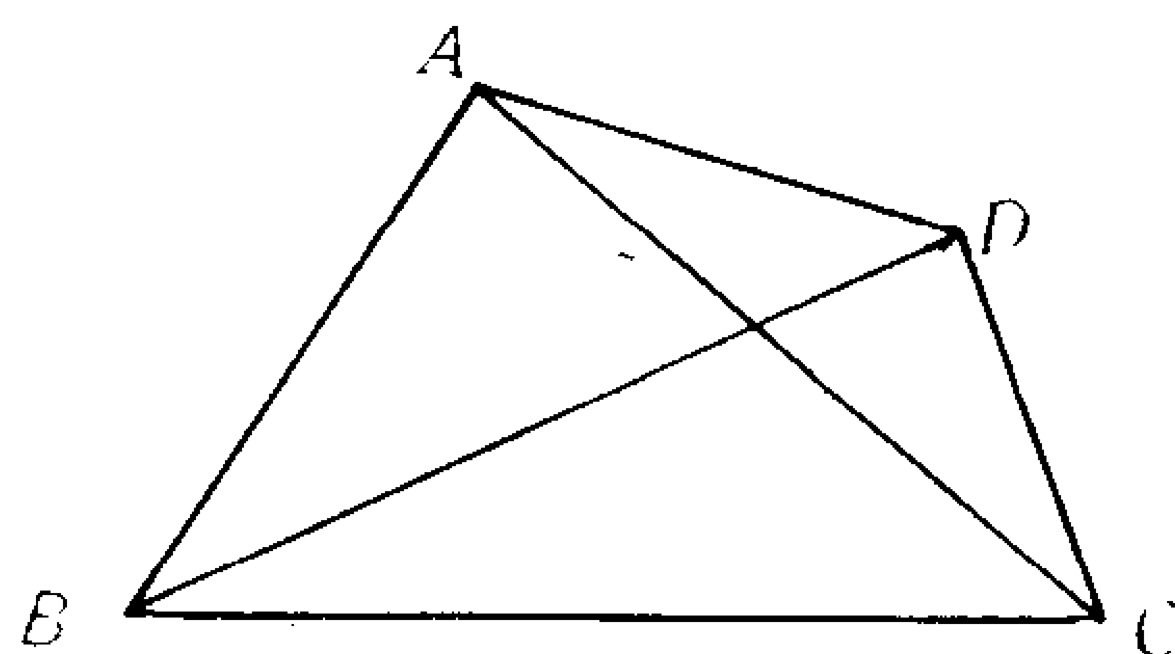


图 5

$$\max(\angle BAD,\angle ADC) \geqslant \frac{\angle BAD+\angle ADC}{2}$$

$$= \frac{1}{2}(2\pi-\angle ABC-\angle DCB) > \frac{5\pi}{7}.$$

不妨设 $\angle ADC > \frac{5\pi}{7}$，由引理 1 知 $\frac{AC}{\min(AD,CD)} \geqslant 2 \cdot \sin\frac{5\pi}{14}$.

由余弦定理：

$$BC^2 = AB^2 + AC^2 - 2AB \cdot AC \cdot \cos\angle BAC$$

$$\geqslant AB^2 + [\min(AD,CD)]^2 \cdot 4\sin^2\frac{5\pi}{14} + 2 \cdot AB \cdot 2\min(AD,CD) \cdot \sin\frac{5\pi}{14}\cos\frac{3\pi}{7}$$

$$\geqslant [\min(AB,AD,CD)]^2[1 + 4\sin^2\frac{5\pi}{14} + 4\sin\frac{5\pi}{14}\cos\frac{3\pi}{7}]$$

$$= [\min(AB,AD,CD)]^2[1 + 4\cos^2\frac{\pi}{7} + 4\cos\frac{\pi}{7}\cos\frac{3\pi}{7}]$$

$$=[\min(AB,AD,CD)]^2[1 +2(1 +\cos\frac{2\pi}{7}) +2(\cos\frac{2\pi}{7} +\cos\frac{4\pi}{7})]$$

$$= [\min(AB,AD,CD)]^2[3 + 4\cos\frac{2\pi}{7} + 2\cos\frac{4\pi}{7}]$$

$$= [\min(AB,AD,CD)]^2[1 + 2\cos\frac{2\pi}{7}]^2,$$

$$\therefore \frac{BC}{\min(BA,AD,DC,BD,AC)} \geqslant \frac{BC}{\min(AB,AD,CD)} \geqslant 1 + 2\cos\frac{2\pi}{7} = k_0.$$ □

引理 5 设在 $\triangle ABC$ 中，$\angle A = \theta \geqslant \frac{\pi}{2}$，若 $\frac{BC}{\min(AB,AC)} < k_0$，则 $\frac{BC}{\max(AB,AC)} > f(\theta)$，

其中 $f(\theta) = \frac{k_0}{\sqrt{k_0^2 - \sin^2\theta} + \cos\theta}$，$\theta \in [\frac{\pi}{2},\pi)$，并且当 θ 落入其定义域 $[\frac{\pi}{2},\pi)$ 时，f 是增函数 .

证明 不妨设 $a > b \geqslant c$，其中 $a = BC, b = AC, c = AB$，由 $\frac{a}{c} < k_0, a^2 = c^2 + b^2 - 2bc\cos\theta = c^2 + b^2 + 2bc\cos(\pi - \theta)$,

故 $1=(\frac{c}{a})^2+(\frac{b}{a})^2+2\cdot\frac{b}{a}\cdot\frac{c}{a}\cos(\pi-\theta)$

$$>\frac{1}{k_0^2}+(\frac{b}{a})^2+2\cdot\frac{b}{a}\cdot\frac{1}{k_0}\cos(\pi-\theta).$$

由此解得：

$$\frac{a}{b}>\frac{k_0}{\sqrt{k_0^2-\sin^2\theta}+\cos\theta}=f(\theta)$$

$$=\frac{k_0}{k_0^2-1}(\sqrt{k_0^2-\sin^2\theta}-\cos\theta).$$

由于当 $\theta\in[\frac{\pi}{2},\pi)$ 时，$\sin\theta\geqslant 0$，且递减，$\cos\theta$ 也递减，因此由最后一式容易看出 $f(\theta)$ 是增函数. □

引理 6 设在 $\triangle ABC$ 中，有一内角 $\geqslant\frac{3\pi}{7}$，P、$Q\in\triangle ABC$，设此五点中最小距离为 d，则 $\frac{\max(AB,BC,CA)}{d}\geqslant k_0$.

证明 如图 6，不妨设 $\angle A$ 为最大内角；于是，

$$\angle A\geqslant\frac{3\pi}{7},BC=\max(AB,BC,CA).$$

由引理 4 知，若 $\angle A\geqslant\frac{4\pi}{7}$，问题已解决，所以 $\angle A<\frac{4\pi}{7}$. 其次，若 $\angle C\geqslant\frac{3\pi}{7}$，则由 $\angle A\geqslant\frac{3\pi}{7}$，得 $\angle B\leqslant\frac{\pi}{7}$，既然 $\angle A\in[\frac{3\pi}{7},\frac{4\pi}{7})$，则有 $\frac{BC}{AC}=\frac{\sin\angle A}{\sin\angle B}\geqslant k_0$，问题也解决，

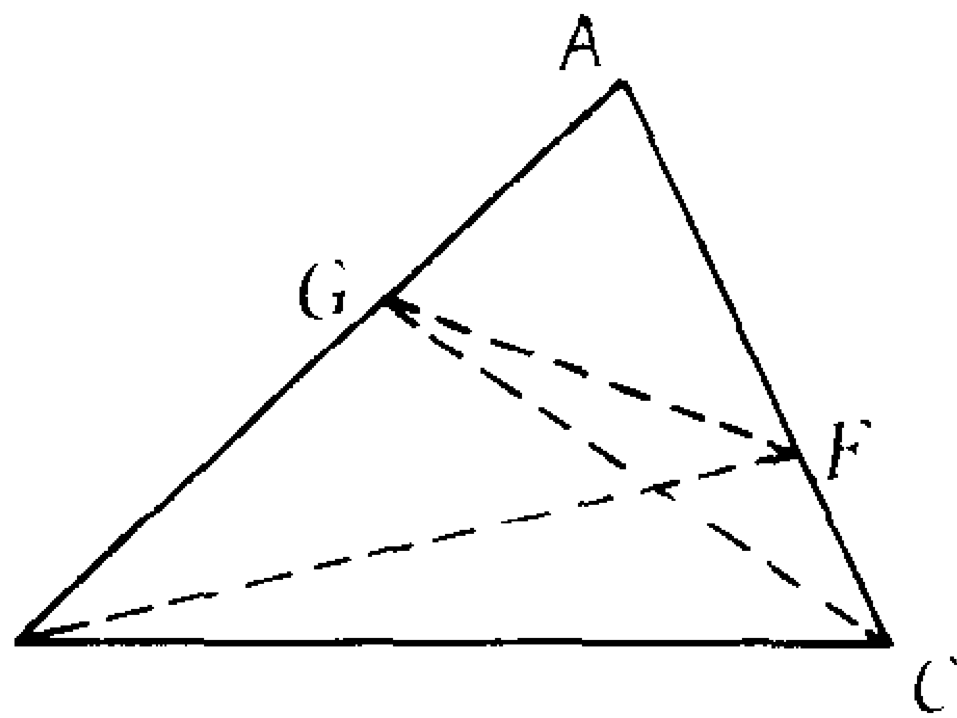


图 6

因此 $\angle C<\frac{3\pi}{7}$，同理 $\angle B<\frac{3\pi}{7}$，于是定能分别在 AC、AB 上找到两点 F、G，使 $\angle BFC=\angle BGC=\frac{4\pi}{7}$.

若 P、$Q\in$ 四边形 $BCFG$，则 P、Q 一定落在该四边形之外接圆

内，于是$\angle BPC, \angle BQC \geqslant \frac{4\pi}{7}$，由引理4，知问题解决，故至少有一点$\in \triangle AGF$，不妨设$P \in \triangle AGF$.

由文[3]中的引理知，$AP \leqslant \max(AG, AF)$.

由于$\frac{BC}{AF} \geqslant \frac{AB}{AF} = \frac{\sin\frac{3\pi}{7}}{\sin(\frac{4\pi}{7} - \angle A)} \geqslant \frac{\sin\frac{3\pi}{7}}{\sin\frac{\pi}{7}} = k_0$；

同理$\frac{BC}{AG} \geqslant k_0$，故$\frac{BC}{d} \geqslant \frac{BC}{AP} \geqslant \frac{BC}{\max(AG, AF)} \geqslant k_0$. □

下面即给出**定理之证明**.

Ⅰ. 设凸包为$\triangle ABC$，另五点D、E、F、G、$H \in \triangle ABC$.

先给一个定义，点P对线段RQ的张角指的是$\angle RPQ$.

于是E在$\triangle ABC$内对三边的张角必有最大的，同理对F、G、H，也各有一最大张角存在；由抽屉原则，这四个最大张角中一定有两个是对着$\triangle ABC$的同一条边的，不妨设$\angle CGA$和$\angle CHA$是这两个角，于是显然有$\angle CGA \geqslant \frac{2\pi}{3} > \frac{4\pi}{7}$，同理$\angle CHA > \frac{4}{7}\pi$，由引理4立知问题解决.

注意到上述论证未用到D点，即凸包为三角形时，内部只用四点即可得证.

Ⅱ. 设凸包为四边形$ABCD$，另四点E、F、G、$H \in$ 四边形$ABCD$.

先证一个引理.

引理7 若G、F、$H \in$ 凸四边形$ABCD$，且对于这七点，有$\lambda_7 < k_0$，则该四边形必有一个内角$> \frac{4\pi}{7}$.

证明 用反证法，假设任一内角$\leqslant \frac{4\pi}{7}$，由于$\triangle ABD$和$\triangle BCD$中必有一者至少含有F、G、H中的两点，不妨设$\triangle ABD$满足条件，于是由引理6，$\angle BAD < \frac{3\pi}{7}$，又$\angle BCD \leqslant \frac{4\pi}{7}$，于是有

$$\angle BAD + \angle BCD < \frac{3\pi}{7} + \frac{4\pi}{7} = \pi.$$

同理 $\angle ABC + \angle ADC < \pi$.

由此易知四边形 $ABCD$ 之内角和 $< 2\pi$，此不可能，引理得证.

下面给出说明.

对于"Ⅱ"的情况，用反证法，假设此时有 $\lambda_8 < k_0$，既然四边形内有四点，由引理 7 知更有四边形一内角 $> \frac{4\pi}{7}$，不妨设 $\angle ADC > \frac{4\pi}{7}$，于是由引理 4 知只能有 E、F、G、$H \in \triangle ABC$，但又由"Ⅰ"的分析知三角形内只要有四点，假设即不成立，因此问题得到解决.

Ⅲ. 设凸包为五边形 $ABCDE$，另三点 F、G、$H \in$ 五边形 $ABCDE$，此时仍用反证法，假设 $\lambda_8 < k_0$.

不妨设 $\angle E$ 为该五边形之最大内角，因此 $\angle E \geqslant \frac{3}{5}\pi > \frac{4}{7}\pi$，由引理 4 及假设知 $\triangle AED$ 中无 F、G、H 三点，于是 F、G、$H \in$ 四边形 $ABCD$.

由引理 7，四边形 $ABCD$ 中必有一内角 $> \frac{4\pi}{7}$，显然 $\angle BAD > \frac{4\pi}{7}$ 与 $\angle ADC > \frac{4\pi}{7}$ 是对称的；$\angle ABC > \frac{4\pi}{7}$ 与 $\angle BCD > \frac{4\pi}{7}$ 也是对称的. 因此下面就两种情况（$\angle ADC > \frac{4\pi}{7}$，$\angle ABC > \frac{4\pi}{7}$）展开讨论即可.

(1) $\angle ADC > \frac{4\pi}{7}$，由引理 4，$F$、$G$、$H \in \triangle ABC$，不妨设 F 对三边的最大张角是 $\angle AFB \geqslant \frac{2}{3}\pi > \frac{4\pi}{7}$，由引理 4，知 $\angle AGB$ 不可能是 G 对三边的最大张角，不妨设 $\angle BGC$ 是最大张角，同理，$\angle AHC$ 是且只能是 H 对三边形成的最大张角.

由引理 4 及假设，因为 $\angle CHA \geqslant \frac{2}{3}\pi > \frac{4}{7}\pi$，故必有 $\angle CGA$

$< \frac{4\pi}{7}$，同理 $\angle BGA < \frac{4\pi}{7}$，所以 $\angle BGC > \frac{6\pi}{7}$，同理 $\angle AFB > \frac{6\pi}{7}$.

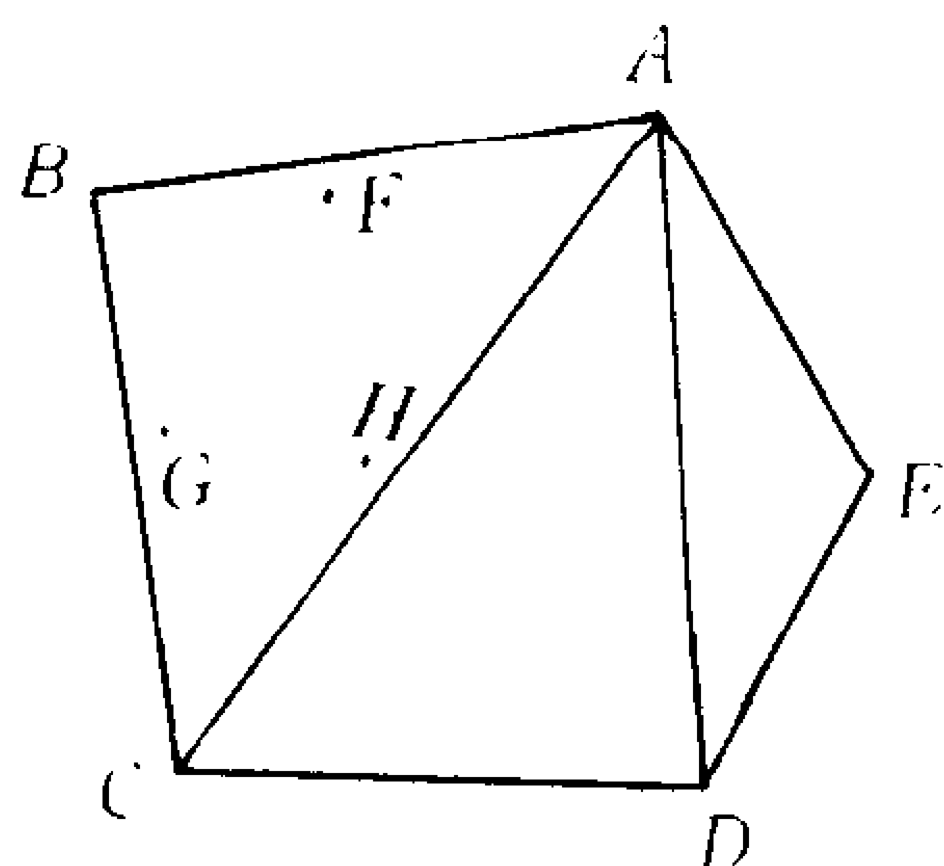


图 7

于是由此可知 $\angle BCD < \frac{19}{36}\pi$，否则由引理 1 和引理 5 知

$$\frac{BD}{\min(BG,CG)} = \frac{BD}{BC} \cdot \frac{BC}{\min(BG,CG)}$$

$$> f\left(\frac{19}{36}\pi\right) \cdot 2 \cdot \sin\frac{3\pi}{7} = 2.27372\cdots > k_0.$$

因此 $\angle BCD < \frac{19}{36}\pi$，同理 $\angle BAE < \frac{19}{36}\pi$.

又由引理 6 知 $\angle ABC < \frac{3\pi}{7}$，加之，得

$\angle BCD + \angle BAE + \angle ABC < \frac{19}{36}\pi + \frac{19}{36}\pi + \frac{3\pi}{7} = \frac{187}{126}\pi$，于是

$\angle AED + \angle EDC > 3\pi - \frac{187}{126}\pi = \frac{191}{126}\pi > \frac{271}{180}\pi$.

此时由推论 3 知 $\lambda_8 > k_0$ 仍然成立，故对于(1)，假设不成立.

(2) $\angle ABC > \frac{4\pi}{7}$.（注：为了讨论问题时用对称性而能节约篇幅，只用 $\angle AED > \frac{4\pi}{7}$，虽然 $\angle AED \geqslant \frac{3}{5}\pi > \frac{4}{7}\pi$），于是 F、G、$H \in \triangle ACD$，不妨设 F、G、H 对于 $\triangle ACD$ 形成的各自的最大张角分别为 $\angle AFC$、$\angle CGD$ 和 $\angle AHD$.

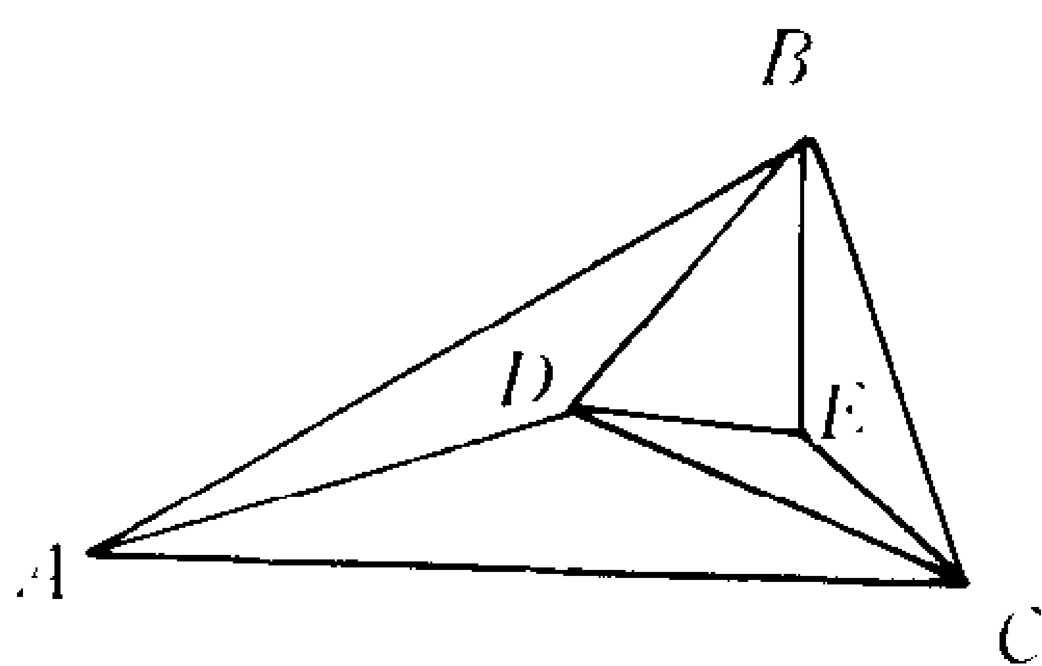


图 8

先证明一个引理.

引理 8 如图 8，$D \in \triangle ABC$，$E \in \triangle BDC$，则若 $\angle BDC < \frac{2}{5}\pi$，便必有

$$\frac{\max(AB,AC)}{\min(AD,DE,BE,CE,BD,DC)} > k_0.$$

证明 用反证法，若结论不成立，因为 $\angle BDC < \frac{2}{5}\pi$，$\angle BDA \leqslant \pi$，所以 $\angle ADC > \frac{3}{5}\pi$，于是必有 $\angle DBC < \frac{1}{3}\pi$，否则由引理 5 和引理 2 得知 $\frac{AC}{\min(BE,CE,DE)} = \frac{AC}{DC} \cdot \frac{DC}{\min(BE,CE,DE)}$

$$> f(\frac{3}{5}\pi) \cdot 2\sin\frac{1}{3}\pi = 2.25385\cdots > k_0.$$

同理有 $\angle ADB > \frac{3}{5}\pi$ 和 $\angle BCD < \frac{1}{3}\pi$，

由 $\angle BDC < \frac{2}{5}\pi$ 和 $\angle BCD < \frac{1}{3}\pi$ 得 $\angle DBC > \frac{4}{15}\pi$，同理 $\angle BCD > \frac{4}{15}\pi$.

又 $\max(\angle ADC, \angle ADB) \geqslant \frac{\angle ADC + \angle ADB}{2}$

$= \frac{2\pi - \angle BDC}{2} > \frac{4}{5}\pi$，不妨设 $\angle ADC > \frac{4}{5}\pi$.

由假设、引理 5 和引理 2 得

$$\frac{AC}{\min(BE,CE,DE)} = \frac{AC}{DC} \cdot \frac{DC}{\min(BE,CE,DE)}$$

$$> f(\frac{4}{5}\pi) \cdot 2\sin\frac{4\pi}{15} = 2.45613\cdots > k_0.$$

因之假设不成立，引理得证.

下面给出这第二种情况的证明(注：以后除非有特殊说明，否则都用反证法，引理 5 中那个关于 $f(\theta)$ 的不等式就能直接引用了).

由于 $\angle AFC$、$\angle CGD$、$\angle AHD$ 都是各自的最大张角，和前面(1)的讨论一样，知 $\angle AFC$、$\angle CGD$ 和 $\angle AHD$ 均大于 $\frac{6\pi}{7}$.

我们先来证明：$G \in \triangle CFD$，$H \in \triangle AFD$，

同理可证：$F \in \triangle AHC$；$G \in \triangle CHD$.

事实上，$\angle AFC > \frac{6\pi}{7} > \frac{4\pi}{7}$，故 G、$H \notin \triangle AFC$；又 $\angle AFC \leqslant \pi$，$\angle AFD < \frac{4\pi}{7}$，所以 $\angle CFD > \frac{3\pi}{7}$，

同理 $\angle AFD > \frac{3\pi}{7}$.

由引理 6 知 G、H 不可能同时 $\in \triangle CFD$ 或 $\triangle AFD$，因此 $\triangle CFD$、$\triangle AFD$ 各包含了 G、H 中的一点，如果 $G \in \triangle CFD$、$H \in \triangle AFD$ 则问题已经解决，若 $G \in \triangle AFD$，$H \in \triangle CFD$，我们来证明这是不可能的.

这是因为如果是这样，由于 G、H 分别位于直线 DF 两侧，延长 GH 不可能先与直线 AD 相交，必先与 AC 或 CD 相交，若 GH 延长后先与 CD 相交，则 $H \in \triangle CGD$，但 $\angle CGD > \frac{6\pi}{7} > \frac{4}{7}\pi$，这是不可能的，故 GH 延长后先与 AC 相交；同理，延长 HG 后亦先与 AC 相交，这等于说明 G、H 均在 AC 上，这显然不可能，所以 $G \in \triangle CFD$，$H \in \triangle AFD$；同理，$F \in \triangle AHC$，$G \in \triangle CHD$.

现在给出正式的证明，分两种情况(因为 $H \in \triangle AFE$ 或 $H \in \triangle EFD$).

(1) $H \in \triangle AFE$.

若 $F \in \triangle AEC$，并且 $\angle AFE \geqslant \frac{2}{5}\pi$，则由于 $\angle AED > \frac{4\pi}{7}$，故

$$\frac{AD}{\min(AH, FH, EH)} = \frac{AD}{AE} \cdot \frac{AE}{\min(AH, FH, EH)}$$

$$> f\left(\frac{4\pi}{7}\right) \cdot 2 \cdot \sin\frac{2}{5}\pi = 2.37189\cdots > k_0.$$

故 $\angle AFE < \frac{2}{5}\pi$，但由引理 8 知亦不可能.

若 $F \in \triangle CDE$，如图 9，此时仍有 $\angle AFE < \frac{2}{5}\pi$，且 $H \in \triangle AEF$ (H 未画出).

若 $\angle EFD \geqslant \frac{5\pi}{7}$，则由引理 5 和引理 1，知

$$\frac{AD}{\min(EF,DF)}=\frac{AD}{ED}\cdot\frac{ED}{\min(EF,DF)}$$

$$>f(\frac{4\pi}{7})\cdot 2\cdot\sin\frac{5\pi}{14}=k_0,$$

($\because \angle AED > \frac{4\pi}{7}$) 所以，$\angle EFD < \frac{5\pi}{7}$，又 $\angle CFD < \frac{4\pi}{7}$，故有 $\angle EFC > \frac{5}{7}\pi$.

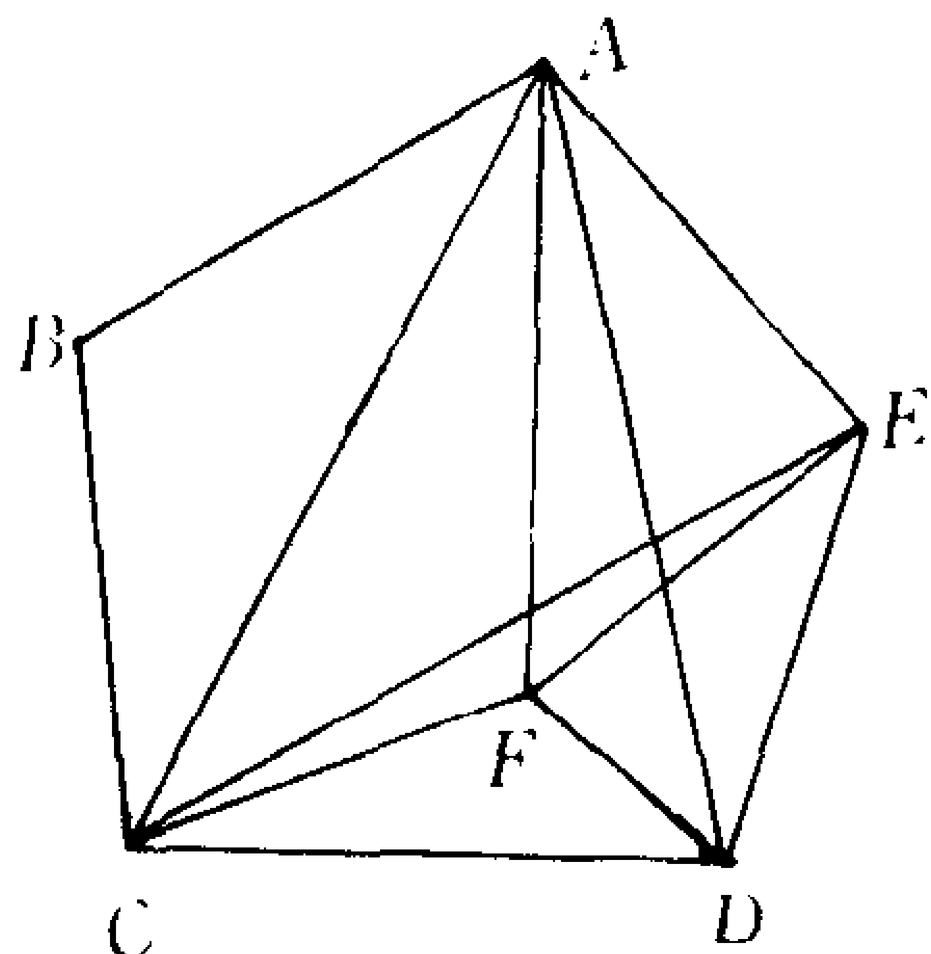


图 9

于是必有 $\angle FAE < \frac{3}{10}\pi$，否则

$$\frac{CE}{\min(AH,FH,EH)}=\frac{CE}{EF}\cdot\frac{EF}{\min(AH,FH,EH)}$$

$$>f(\frac{5\pi}{7})\cdot 2\cdot\sin\frac{3}{10}\pi=2.45143\cdots>k_0.$$

最后，必有 $\angle AEF < \frac{\pi}{4}$，否则

$$\frac{AC}{\min(AH,EH,FH)}=\frac{AC}{AF}\cdot\frac{AF}{\min(AH,EH,FH)}$$

$$>f(\frac{6}{7}\pi)\cdot 2\cdot\sin\frac{\pi}{4}=2.43741\cdots>k_0.$$

于是综上所述，有

$$\pi=\angle AFE+\angle FEA+\angle EAF$$

$$<\frac{2}{5}\pi+\frac{1}{4}\pi+\frac{3}{10}\pi=\frac{19}{20}\pi,$$此不可能.

(2)$H\in\triangle EFD$，由对称性知必有 $F\in\triangle BCH$.

同理可证此时 $F\in\triangle BCD$，因为若 $F\in\triangle ABE$，则必有 $F\in\triangle ABH$，且 $F\notin BH$，(除非 H、F 俱在 BE 上，此不可能)，这和 $F\in\triangle BCH$ 相矛盾；又若 $F\in\triangle BED$，于是同样可证 $\angle EFD<\frac{2}{5}\pi$，…，这就和(i)的一部分情况一样(依据引理8)，所以只能有 F

$\in \triangle BCD$.

同样知有：$\angle BFD > \frac{5}{7}\pi \Rightarrow$ $\angle FED < \frac{3}{10}\pi$；$\angle EFD < \frac{2}{5}\pi$，所以 $\angle EDF > \pi - \frac{3}{10}\pi - \frac{2}{5}\pi = \frac{3}{10}\pi$.

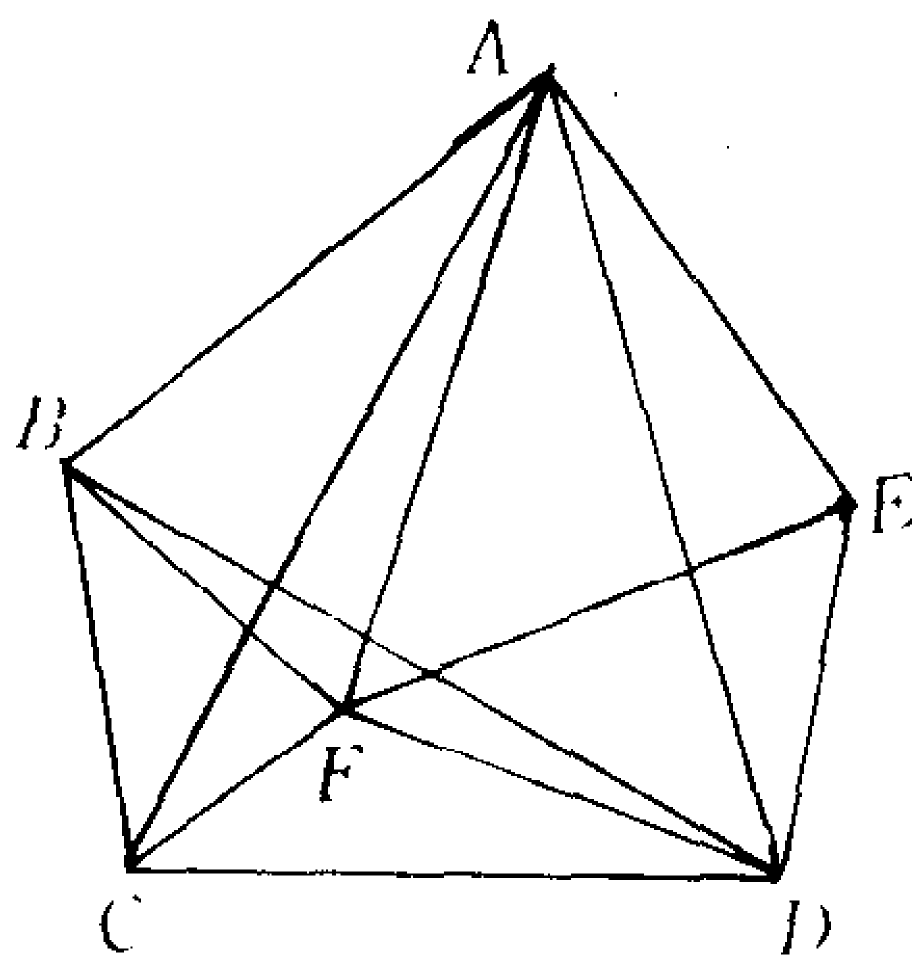


图 10

由对称性知此时有，$H \in \triangle CDE$，又由于 $G \in \triangle CHD \subset \triangle CDE$，由引理6知 $\angle CDE < \frac{3\pi}{7}$，因为 $\angle EDF > \frac{3}{10}\pi$，所以 $\angle FDC < \frac{3\pi}{7} - \frac{3\pi}{10} = \frac{9}{70}\pi < \frac{\pi}{7}$.

由于 $\angle FCD \leqslant \angle ACD < \frac{3\pi}{7}$，故 $\angle CFD > \pi - \frac{3\pi}{7} - \frac{\pi}{7} = \frac{3\pi}{7}$. 又 $\angle CGD > \frac{6}{7}\pi \geqslant \frac{4}{7}\pi$，所以 $\angle CFD < \frac{4}{7}\pi$，

于是$\frac{CD}{CF} = \frac{\sin\angle CFD}{\sin\angle CDF} > \frac{\sin\frac{3\pi}{7}}{\sin\frac{\pi}{7}} = k_0$.

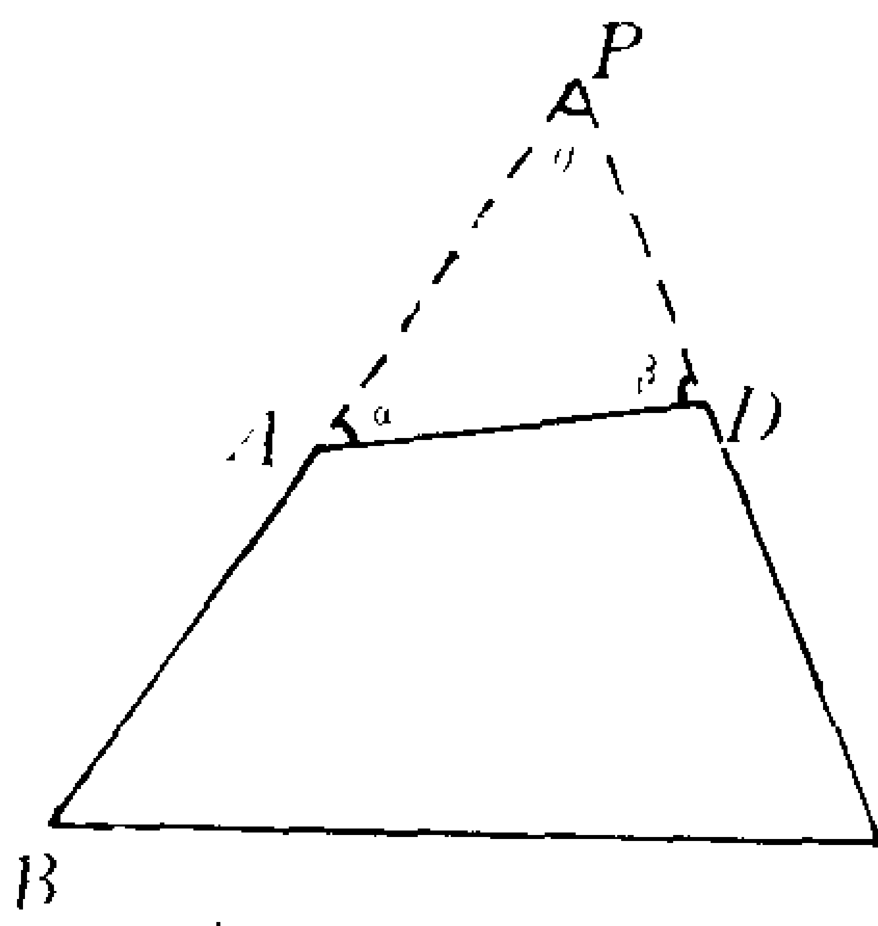


图 11

Ⅲ 的情形终于证完.

Ⅳ. 设凸包为六边形 $ABCDEF$，G、H 在其内部先证明两个引理.

引理 9 设在凸四边形 $ABCD$ 中，$\angle BAD + \angle ADC > \frac{29}{20}\pi$，则 $\max(\angle BAD, \angle ADC) > \frac{4}{5}\pi$，否则必有$\frac{BC}{\min(BA, AD, DC)} > k_0$.

证明 延长 BA、CD 至 P 点，记 $\angle PAD = \alpha$，$\angle PDA = \beta$，

$\angle P=\theta$，不妨设 $\angle BAD \geqslant \angle ADC$. 假若 $\angle BAD \leqslant \frac{4}{5}\pi$，则 $\angle ADC > \frac{29}{20}\pi - \frac{4}{5}\pi = \frac{13}{20}\pi > \frac{\pi}{2}$，因此 α、β 都是锐角，$\theta = \angle BAD + \angle ADC - \pi > \frac{9}{20}\pi$，且 $0 \leqslant \beta - \alpha < \frac{7}{20}\pi - \frac{1}{5}\pi = \frac{3}{20}\pi$.

由推论 1，有不等式

$$\frac{BC}{\min(BA,AD,DC)} > \sqrt{3+2(\cos\alpha+\cos\beta-\cos\theta)}$$
$$=\sqrt{3+2\left(2\cos\frac{\alpha+\beta}{2}\cos\frac{\beta-\alpha}{2}-\cos\theta\right)}$$
$$=\sqrt{3+2\left(2\sin\frac{\theta}{2}\cos\frac{\beta-\alpha}{2}-\cos\theta\right)}$$
$$>\sqrt{3+2\left(2\sin\frac{9}{40}\pi\cos\frac{3}{40}\pi-\cos\frac{9}{20}\pi\right)}$$
$$=2.28323\cdots>k_0.$$

引理10 已知一凸六边形 $ABCDEF$，内有一点 H，它对六边形有一边的张角 $>\frac{4}{5}\pi$（不妨设 $\angle AHF > \frac{4}{5}\pi$），则对此七个点，有 $\lambda_7 > k_0$.

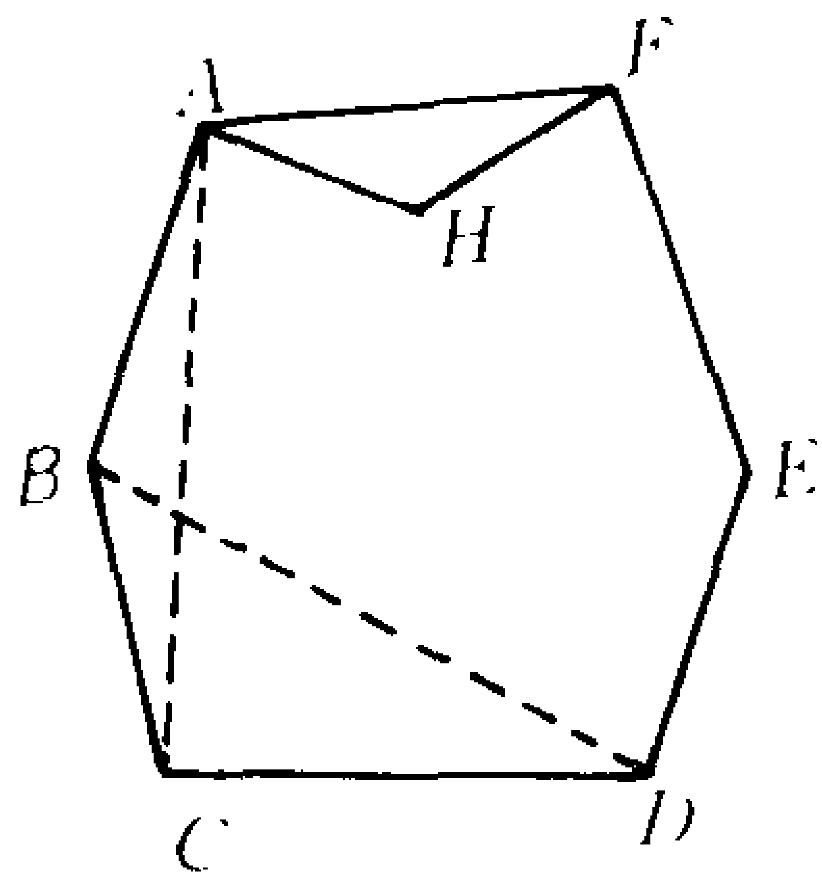


图 12

证明 假设 $\lambda_7 \leqslant k_0$，则必有 $\angle BAF < \frac{49}{90}\pi$，否则由引理 5 和引理 1，有

$$\frac{BF}{\min(AH,FH)}=\frac{BF}{AF}\cdot\frac{AF}{\min(AH,FH)}$$
$$>f\left(\frac{49}{90}\pi\right)\cdot 2\sin\frac{2}{5}\pi=2.27604\cdots>k_0.$$

同理，$\angle AFE < \frac{49}{90}\pi$. 于是 $(\angle ABC+\angle BCD)+(\angle CDE+\angle DEF) > 4\pi - \frac{49}{45}\pi = \frac{131}{45}\pi$.

由对称性，不妨设 $\angle ABC + \angle BCD \geqslant \angle CDE + \angle DEF$，于

是 $\angle ABC+\angle BCD>\frac{131}{90}\pi>\frac{29}{20}\pi$，由引理 9，知 $\max(\angle ABC,\angle BCD)>\frac{4}{5}\pi$.

若 $\angle ABC>\frac{4}{5}\pi$，则同理可证 $\angle ACD<\frac{49}{90}\pi$，下证 $\angle FAC<\frac{73}{180}\pi$.

因为如果 $\angle FAC\geqslant\frac{73}{180}\pi$，由于 $\angle ABC>\frac{4}{5}\pi$，$\angle AHF>\frac{4}{5}\pi$，由引理 1(连用两次)，得

$$\begin{aligned}&\frac{CF}{\min(CB,BA,AH,HF)}\\&=\frac{CF}{\min(AC,AF)}\cdot\frac{\min(AC,AF)}{\min(CB,BA,AH,HF)}\\&>2\cdot\sin\frac{73}{360}\pi\cdot2\cdot\sin\frac{2}{5}\pi=2.26284\cdots>k_0,\end{aligned}$$

因此 $\angle FAC<\frac{73}{180}\pi$.

又根据推论 3，知 $\angle FED+\angle EDC<\frac{271}{180}\pi$，因此五边形 $ACDEF$ 之内角和 $<\frac{49}{90}\pi+\frac{73}{180}\pi+\frac{49}{90}\pi+\frac{271}{180}\pi=3\pi$，此不可能.

于是 $\angle ABC\leqslant\frac{4}{5}\pi$，这样只能是 $\angle BCD>\frac{4}{5}\pi$；但这样一来，又有 $\angle BAF<\frac{49}{90}\pi$；$\angle AFE<\frac{49}{90}\pi$；$\angle ABD<\frac{49}{90}\pi$；$\angle BDE<\frac{49}{90}\pi$，于是 $\angle FED>3\pi-\frac{98}{45}\pi=\frac{37}{45}\pi>\frac{4}{5}\pi$，而这正和 $\angle ABC>\frac{4}{5}\pi$ 的情形是完全对称的，同理可证.

下面给出此种情形之证明.

设 G、H 两点在六边形 $ABCDEF$ 之内，两边延长 GH，则仅出现三种可讨论之情况：

(i) 直线 GH 与 AB、BC 相交；

(ii) 直线 GH 与 AF、BC 相交；

(iii) 直线 GH 与 AF、CD 相交.

易知其余任一种(共有 C_6^2 种)都与上三种情形中的某一种等价，因此下面仅就上面所列的三种情形展开讨论.

(i) 直线 GH 与 AB, BC 相交，易知此时只能有 G、$H \in \triangle ABC$.

仍用反证法，不妨设延长 GH 后与 BC 相交，于是 $H \in \triangle BGC$.

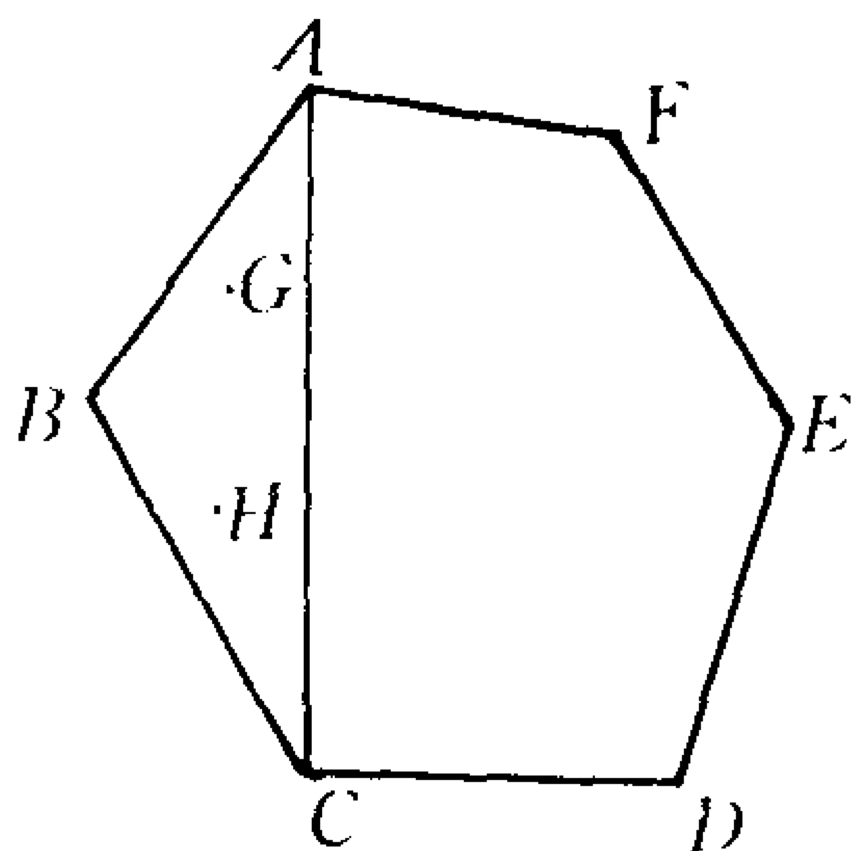


图 13

如图 13，由引理 6 知 $\angle ABC < \frac{3}{7}\pi$.

由引理 8 知 $\angle BGC > \frac{2}{5}\pi$($\because H \in \triangle BGC$).

于是由引理 2 知有 $\frac{BC}{\min(GH, BH, CH)} > 2 \cdot \sin \frac{2}{5}\pi$，和前面一样，根据引理 5 可以得到 $\angle BCD < \frac{49}{90}\pi$，于是

$\angle ABC + \angle BCD < \frac{3\pi}{7} + \frac{49}{90}\pi = \frac{613}{630}\pi < \frac{89}{90}\pi$，于是 $\max(\angle BAF + \angle AFE, \angle FED + \angle EDC) > \frac{1}{2}(4\pi - \frac{89}{90}\pi) = \frac{271}{180}\pi$，由推论 3 知此时假设不成立.

(ii) 直线 GH 与 AF、BC 相交，于是此时 G、$H \in$ 四边形 $ABCF$，不妨设延长 GH 后与 BC 相交，于是 $H \in \triangle BGC$, $G \in \triangle AHF$.

下面分两种小情况讨论.

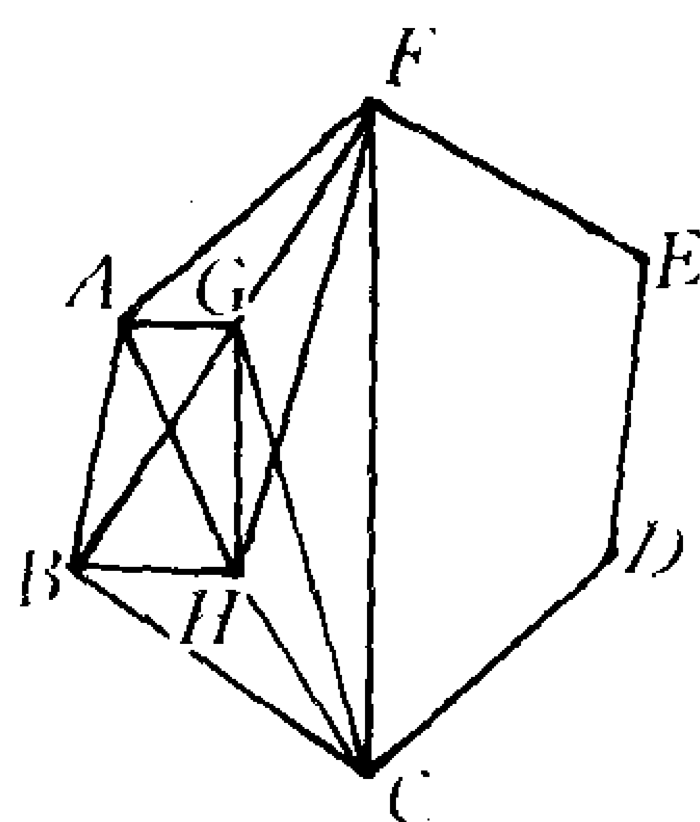


图 14

①$\angle BGC \geqslant \frac{\pi}{3}$，$\angle AHF \geqslant \frac{\pi}{3}$，如图 14.

此时必有$\angle AFE < \frac{3}{5}\pi$，否则由引理 2 和引理 5 知

$$\frac{AE}{\min(AG,FG,HG)}$$
$$=\frac{AE}{AF}\cdot\frac{AF}{\min(AG,FG,HG)}$$
$$>f(\frac{3}{5}\pi)\cdot 2\sin\frac{\pi}{3}=2.25385\cdots>k_0.$$

因此$\angle AFE<\frac{3}{5}\pi$；同理$\angle FAB$、$\angle ABC$及$\angle BCD$均小于$\frac{3}{5}\pi$，于是$\angle FED+\angle EDC>4\pi-\frac{12}{5}\pi=\frac{8}{5}\pi>\frac{271}{180}\pi$，此时由推论 3 知假设仍然不成立，问题解决.

②$\angle BGC$、$\angle AHF$中至少有一者$<\frac{\pi}{3}$，不妨设$\angle BGC<\frac{\pi}{3}$.

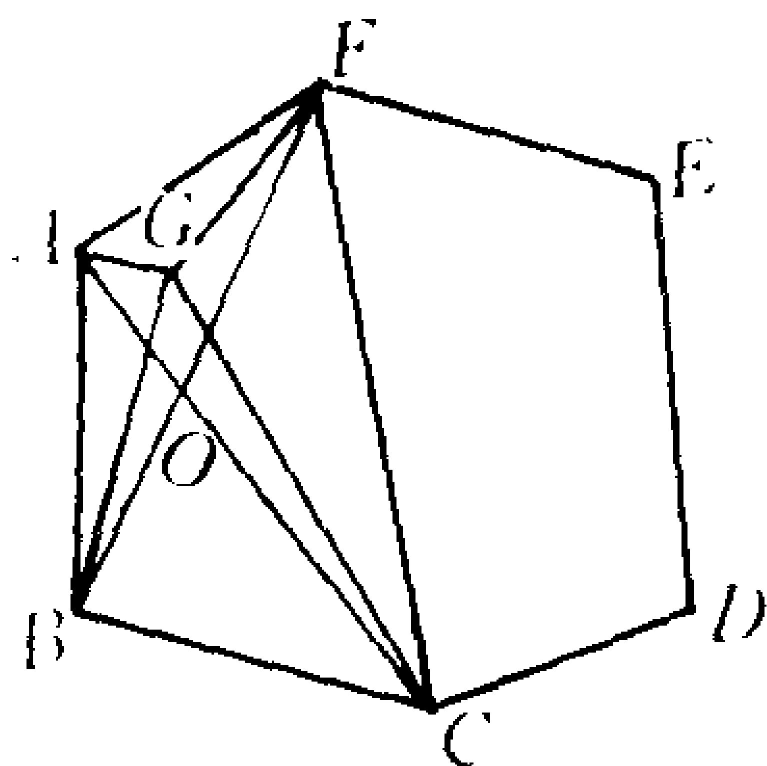


图 15

如图 15，设 AC 和 BF 交于 O 点($H \in \triangle BGC$)，易知必有 $G \in \triangle AFO$，否则必有 $G \in \triangle ABC$ 或 $\triangle FBC$，因为

$\angle BGC < \frac{\pi}{3} < \frac{2}{5}\pi$，$H \in \triangle BGC$，由引理 8 知此不可能，故只能有 $G \in \triangle AFO$(H 未画出).

由于$\angle BGC<\frac{\pi}{3}$，故$\max(\angle GBC,\angle GCB)>\frac{\pi}{3}$；若$\angle GBC>\frac{\pi}{3}$，由于 $H \in \triangle GBC$，和前面一样，由引理 2 和引理 5 知$\angle FGC<\frac{3}{5}\pi$，$\angle AGC<\frac{3}{5}\pi$，于是$\angle AGF>2\pi-\frac{3}{5}\pi-\frac{3}{5}\pi=\frac{4}{5}\pi$，这由引理

10 又知不可能，同理，如果 $\angle GCB > \frac{\pi}{3}$，仍可推得 $\angle AGF > \frac{4}{5}\pi$，…．总之，假设是不对的．(ii) 得到解决．

(iii) 直线 GH 与 AF、CD 相交，于是 G、$H \in$ 四边形 $ACDF$．同样，不妨设 GH 经延长后与 CD 相交，于是 $G \in \triangle AHF$，$H \in \triangle GCD$．

分两种情况讨论之．

①$\angle AHF$、$\angle CGD$ 中至少有一者 $< \frac{\pi}{3}$，不妨设 $\angle CGD < \frac{\pi}{3} < \frac{2}{5}\pi$，且 $H \in \triangle GCD$．

若 AD 交 CF 于 O 点，和前面一样，由引理 8，必得 $G \in \triangle AFO$．

因为 $\angle CGD < \frac{\pi}{3}$，所以 $\max(\angle GCD, \angle GDC) > \frac{\pi}{3}$．此时和 (ii) 中②的情况一样，依据引理 2 及引理 5 仍可推得 $\angle AGF > \frac{4}{5}\pi$，于是由引理 10 知假设 $\lambda_8 < k_0$ 不能成立．

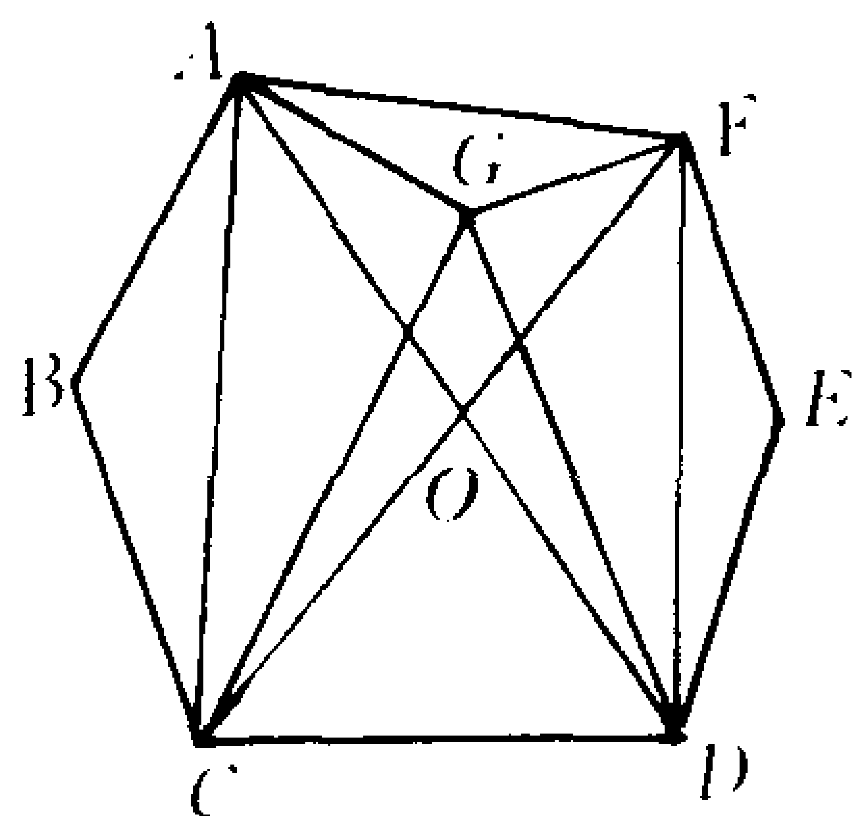


图 16

②$\angle AHF \geqslant \frac{\pi}{3}$，$\angle CGD \geqslant \frac{\pi}{3}$．

此时和前面又一样，由引理 2 与引理 5 仍可推得 $\angle BAF$、$\angle AFE$、$\angle BCD$ 及 $\angle EDC$ 俱都小于 $\frac{3}{5}\pi$，于是 $\angle ABC + \angle FED > 4\pi - \frac{12}{5}\pi = \frac{8}{5}\pi$，又 $\angle ABC < \pi$，故 $\angle FED > \frac{3}{5}\pi$，同理，$\angle ABC > \frac{3}{5}\pi$．又 $\angle AHF \geqslant \frac{\pi}{3}$，$G \in \triangle AHF$，由引理 2，

$$\frac{AF}{\min(AG, FG, GH)} \geqslant \sqrt{3}.$$

不妨设 $\angle AFD$ 为四边形 $ABCD$ 之最大内角．于是 $\angle AFD \geqslant$

$\frac{\pi}{2}$,由引理1,知 $AD \geqslant \sqrt{2} \cdot \min(AF,DF)$. 若 $AF \leqslant DF$,则

$$\frac{AD}{\min(AG,FG,GH)} = \frac{AD}{AF} \cdot \frac{AF}{\min(AG,FG,GH)}$$

$$\geqslant \sqrt{2} \cdot \sqrt{3} = 2.44948\cdots > k_0.$$

若 $DF \leqslant AF$,同理由引理1和引理5,得

$$\frac{AD}{\min(FE,ED)} = \frac{AD}{FD} \cdot \frac{FD}{\min(FE,ED)}$$

$$> \sqrt{2} \cdot 2 \cdot \sin\frac{3}{10}\pi = 2.28824\cdots > k_0.$$

至此,第四种情况获得解决.

V. 设凸包为七边形 $ABCDEFG$,点 H 在其中. 事实上,我们可以证明更强的事实,其实不考虑 H,仅凸七边形的七个顶点,便有 $\lambda_7 \geqslant k_0$ 之结论,等号取到当且仅当这种情况中的七边形为一正七边形,H 在其中心附近有一小小的活动范围,因此,我们便得到了 $\inf\lambda_8 = k_0 = \sin\frac{3\pi}{7}\Big/\sin\frac{\pi}{7}$ 之结论.

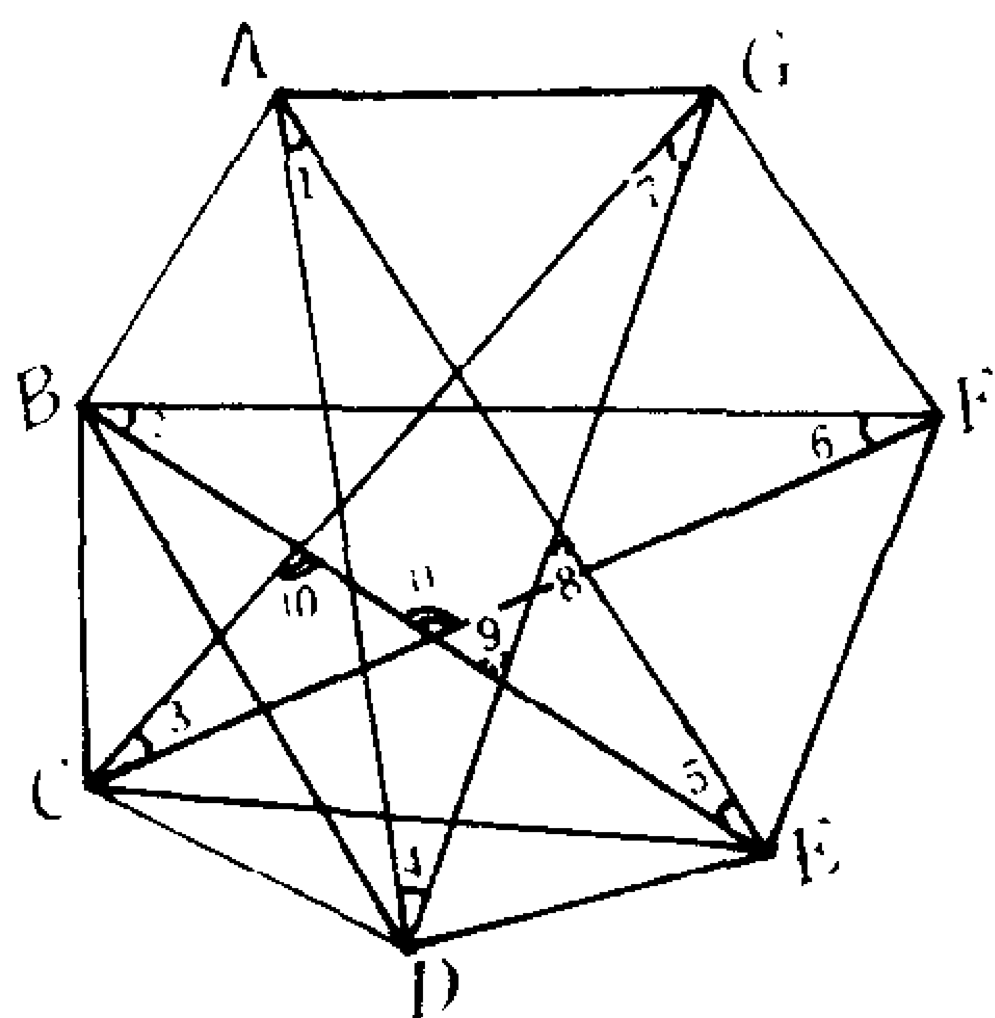


图 17

下面给出证明. 假设 $\lambda_7 < k_0$,如图17,标好各角,则

$$(\angle 1 + \angle 4) + \angle 5 + \angle 7 + \angle 3 + \angle 2 + \angle 6 = (\angle 8 + \angle 5) + \angle 7 + \angle 3 + \angle 2 + \angle 6 = (\angle 9 + \angle 7) + \angle 3 + \angle 2 + \angle 6 = (\angle 10 + \angle 3) + \angle 2 + \angle 6 = \angle 11 + \angle 2 + \angle 6 = \pi.$$

不妨设 $\angle 1 = \min(\angle 1, \angle 2, \angle 3, \angle 4, \angle 5, \angle 6, \angle 7)$,于是 $\angle 1 \leqslant \frac{\pi}{7}$.

不妨设 $\angle ADE \geqslant \angle AED$,易知 $\angle ADE \geqslant \frac{3}{7}\pi$. 于是,在假设的前提下,必有 $\angle ADE > \frac{4\pi}{7}$,否则

$\frac{AE}{DE}=\frac{\sin\angle ADE}{\sin\angle DAE}\geqslant \sin\frac{3\pi}{7}\Big/\sin\frac{\pi}{7}=k_0$. 因此，$\angle ADE>\frac{4\pi}{7}$.

下面先给出两个推论.

推论 4 若凸七边形中有一个内角 $>\frac{4}{5}\pi$，则对于这七点，有 $\lambda_7>k_0$.

证明 事实上，在引理 10 的证明中，并没有用到 H 在六边形 $ABCDEF$ 内这一条件，只用到了一个条件：H 对一边的张角 $>\frac{4}{5}\pi$，因此，若 H 在六边形之外，围成一凸七边形，只要该七边形有一内角 $>\frac{4}{5}\pi$，结论便成立，故推论得证.

推论 5 若凸七边形中有相邻两内角之和 $>\frac{29}{20}\pi$，则对于这七点有 $\lambda_7>k_0$.

证明 假如 $\lambda_7<k_0$，由引理 9 知两内角中较大者必须大于 $\frac{4}{5}\pi$，再由推论 4 知仍有 $a_7>k_0$.

于是看图 17，在假设前提下，由推论 5，知必有：

$$\angle CBA+\angle BAG\leqslant\frac{29}{20}\pi;$$

$$\angle AGF+\angle GFE\leqslant\frac{29}{20}\pi;$$

$$\angle FED+\angle EDC\leqslant\frac{29}{20}\pi.$$

于是 $\angle BCD\geqslant 5\pi-\frac{87}{20}\pi=\frac{13}{20}\pi$，同理，$\angle CBA\geqslant\frac{13}{20}\pi$.

于是由推论 1 知 $\frac{AD}{\min(AB,BC,CD)}$

$$\geqslant\sqrt{3-2(\cos\angle CBA+\cos\angle BCD-\cos(\angle CBA+\angle BCD))}$$

$$\geqslant\sqrt{3+4\cos\frac{7}{20}\pi-2\cos\frac{3}{10}\pi}.$$

最后一步是利用不等式$\angle BCD, \angle CBA \geqslant \frac{13}{20}\pi$以及余弦函数在$[\frac{\pi}{2}, \pi]$上递减，在$[\pi, 2\pi]$上递增这一性质.

于是$\frac{AE}{\min(AB,BC,CD)} = \frac{AE}{AD} \cdot \frac{AD}{\min(AB,BC,CD)}$

$> f(\frac{4\pi}{7}) \cdot \sqrt{3 + 4\cos\frac{7}{20}\pi - 2\cos\frac{3}{10}\pi} = 2.37921\cdots > k_0.$

至此，第五种情形业已证完.

Ⅵ. 设凸包为八边形 $ABCDEFGH$，由第五种情况知，对于凸七边形 $ABCDEFG$ 结论已成立，于是更有 $\lambda_8 \geqslant k_0$. 这里也不能取到等号，否则由 Ⅴ 的讨论知，这八点中的任意七点都必须围成一个正七边形，显然这是不可能的，所以只能有 $\lambda_8 > k_0$.

综上所述，完成了 $\inf\lambda_8 = \sin\frac{3\pi}{7} \Big/ \sin\frac{\pi}{7}$ 的证明.

参考文献

[1] 吴报强，关于 Heilbronn 型问题的一个猜测，《数学通报》，1991 年第 5 期，41 — 43.

[2] 李文琦，吴元鸿，$\lambda_6 = \max P_iP_j/\min P_iP_j \geqslant 2\sin 72°$，《教学与研究》(中学数学版)，1986 年第 12 期，6 — 8.

[3] 田廷彦，何冬顺，关于 Heilbronn 型问题的一个猜想的纠正和证明，《数学通报》，1992 年第 12 期，29 — 32.

[4] 陈计，熊斌，叶中豪，数学竞赛训练题 6 及其解答与评注，《数学通讯》，1992 年第 2 期，38；1992 年第 3 期，39.

正 n 边形问题的解法

中国科学院计算中心　李文志

（一）引　　言

1990年11月,《美国数学月刊》问题栏的编辑Bateman教授等人,在月刊上提出了正五边形问题[1]:

*A*6642　设 λ 为单位面积正五边形上的三角形内切圆半径的最大值.

a)* 求 λ 的近似值(精确到 10^{-3}).

b)* 求 λ 的精确值.

本文给出了正 n 边形问题的系统的解法,并以正八边形问题为例[2],详述了这一解法的全过程.为方便起见,我们将问题写出如下.

正 n 边形问题:设 $P_1P_2\cdots P_n$ 为正 n 边形,其外接圆半径为单位,A,B,C 为其内部或边界上的点.求 $\triangle ABC$ 的内切圆半径的最大值.

（二）几个引理和预备定理

我们先给出如下记号:

$s(ABC)$:三角形 ABC 的周长的一半,即 $(AB+BC+CA)/2$.

$S(ABC)$:三角形 ABC 的面积.

$r(ABC)$：三角形 ABC 的内切圆半径.

$n(A,B)$：设 A,B 两点分别在正 n 边形的两条边上，沿正 n 边形的边，沿逆时针方向从 A 点走到 B 点所经过的边数（A 点与 B 点所在的边不算在内）.

引理 1 在 $\triangle ABC$ 中，$BC > AC$，$CD \parallel AB$，且 D 与 B 在 AC 同侧，$BD > AD$，那么 $r(ABD) > r(ABC)$.

证明 由条件及平面几何知识不难得到 $s(ABC) > s(ABD)$，而 $S(ABC) = S(ABD)$，从而由 $r = S/s$ 知 $r(ABD) > r(ABC)$. □

定理 1 对于正 n 边形来说，$r(ABC)$ 取得最大值的必要条件是，A,B,C 三点均在正 n 边形的边上，且 $n(A,B)$，$n(B,C)$，$n(C,A)$ 相差最大为 1，或者可以看作相差为 1.

当三角形某顶点（比如 A）与某个 P_i 点重合时，A 既可以看作是在边 $P_{i-1}P_i$ 上又可以看作在边 P_iP_{i+1} 上. 定理 1 表明如果 $r(ABC)$ 取得最值，且 A 与 P_i 重合，那么把 A 看作在 $P_{i-1}P_i$ 上或者在 P_iP_{i+1} 上两种情形中，必有一种情形使得 $n(A,B)$，$n(B,C)$，$n(C,A)$ 两两之差不超过 1.

证明 用反证法，假设定理 1 不成立，$r(ABC)$ 取得最大值，但是 $n(B,C) - n(C,A) \geqslant 2$. 设 A,B,C 分别在 P_1P_2，P_iP_{i+1}，P_jP_{j+1} $(i < j)$ 上，且 C 不与 P_j 重合（若 C 与 P_j 重合，则视 C 在 $P_{j-1}P_j$ 上），那么

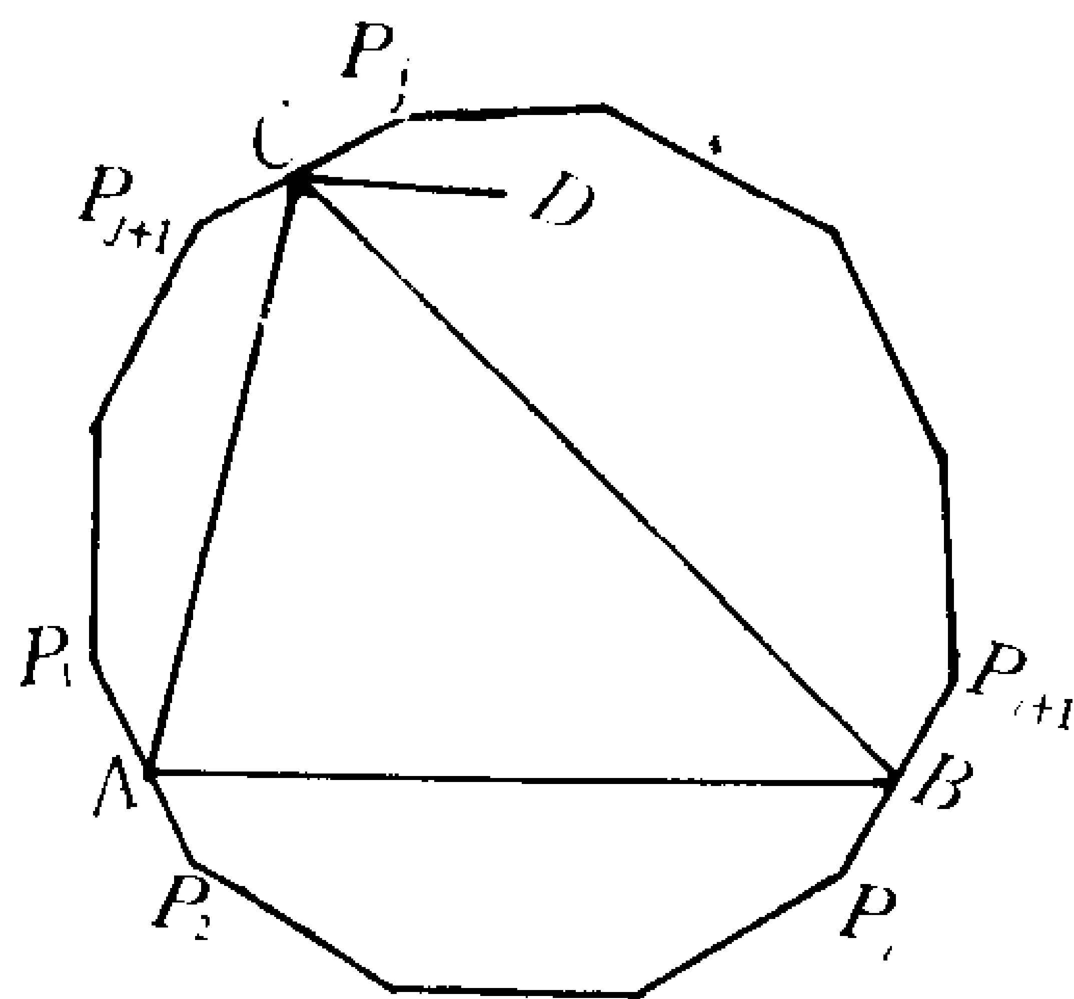


图 1

$$n(A,B) = i - 2,$$
$$n(B,C) = j - i - 1,$$
$$n(C,A) = n - j.$$

由 $n(B,C) - n(C,A) \geqslant 2$ 可得

$$n + i - 2j + 3 \leqslant 0, \qquad (*)$$

因此

$$(n+2)-j \leqslant j-(i+1).$$

因而 $P_2P_j \leqslant P_{i+1}P_j$，而 $P_2P_j > CA$（因 C 不与 P_j 重合）. 又 $BC \geqslant P_{i+1}P_j$（这个不等式在 $j-i \leqslant n/2$ 的条件下成立，若 $j-i > n/2$，则易见 $r(ABC)$ 取不到最大值），因而 $BC > AC$.

易知 $P_2P_{i+1} \,/\!/\, P_{j+1}P_{n-i+j+2}$，由（*）式知，下标 $n-i+j+2$ 小于 j. 注意到 P_2P_{i+1} 与 AB 的位置关系，我们可以过 C 向正 n 边形内作 AB 的平行线段 CD. 由于 $BC > AC$，可取 D 点充分靠近 C，使 $BD > AD$. 因而由引理 1 知 $r(ABC) < r(ABD)$，这与假设矛盾. □

定理 2 设 $\triangle MNP$ 中，$MN = MP$，A,B,C 分别为 MN,NP,MP 上的动点，如果 A,B,C 均不移动到三角形的顶点，而 $r(ABC)$ 取得极大值，那么 B 为 NP 中点，且 $MA = MC$.

证明与文[4]相同.

（三）问题的解答

由定理 1，我们可设 A,B,C 三点分别在正 n 边形的三边上且 $n(A,B),n(B,C),n(C,A)$ 三者两两之差不大于 1，因而必有两者相等. 当 $n=3k$ 时，问题的答案是平凡的；当 $n=3k+1$ 时，三者分别为 $k-1,k-1,k$；当 $n=3k+2$ 时，三者分别为 $k-1,k,k$. 对于后两种情况三边总有如下位置关系：两边关于第三边的垂直平分线对称，三边可延长相交成等腰三角形. 由定理 2，若 A,B,C 三点均不与正 n 边形的顶点重合，可能的局部极值不难求得，记作 r_0（若 r_0 不存在，记 $r_0=0$）. 剩下来的是边界情形，即至少有一点与正 n 边形顶点重合的情形.

下面我们仅以正八边形为例讨论边界情形（图 2）.

①$A=P_1$（$C=P_8$ 情形相同），则 $P_1B > P_1C$，可过 P_1 向正八

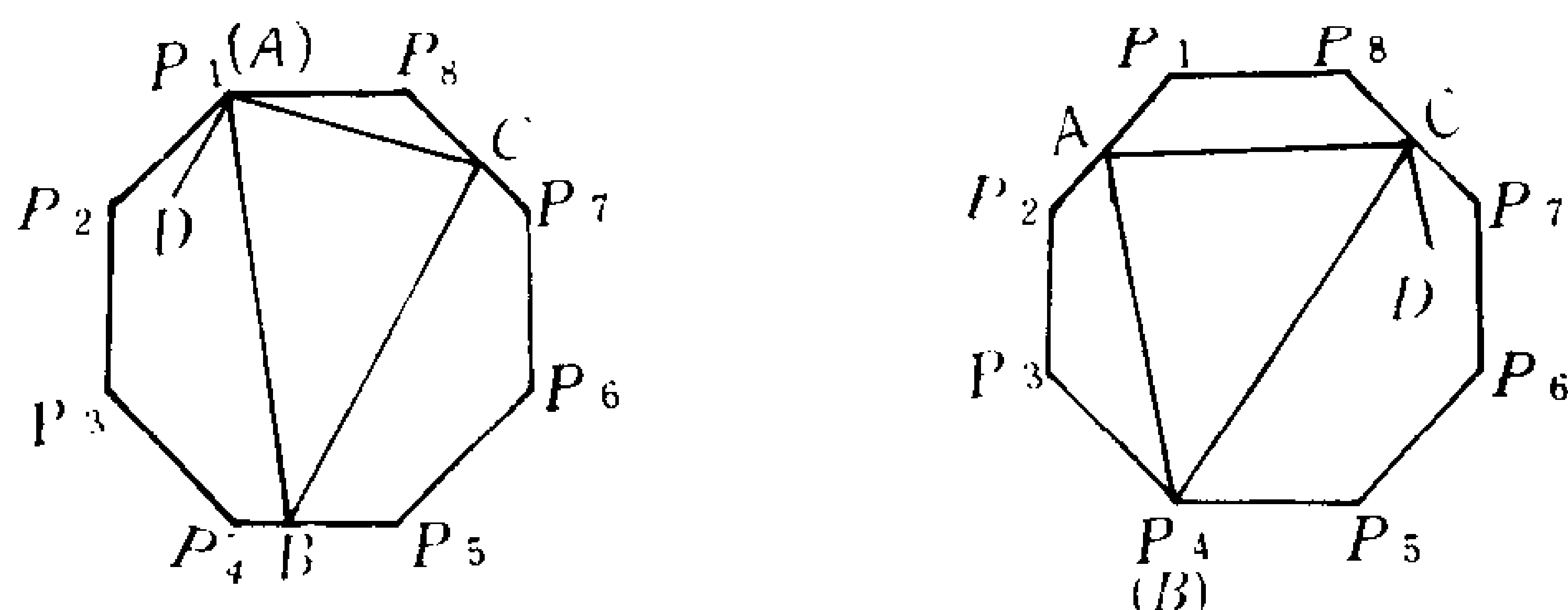


图 2

边形内作 BC 的平行线段 P_1D,P_1D 充分短时,$BD > CD$,由引理 1,$r(BCD) > r(P_1BC) = r(ABC)$.

②$B = P_4$(或 P_5).

若 $C \neq P_7$,则 $P_4C > AC$,可以过 C 向正八边形内作 AP_4 的平行线段 CD,CD 充分短时,$P_4D > AD$,由引理 1,$r(P_4AD) > r(P_4AC)$.

若 $C = P_7$,则 $r(ABC) = r(AP_4P_7)$ 在 A 为 P_1P_2 中点时取得最大值,记作 r_1.不难求得

$$r_1 = \frac{1}{4}(\sqrt{3} - 1)\sqrt{4 + 2\sqrt{2}}.$$

③$A = P_2$($C = P_7$ 情形相同).建立平面直角坐标系,如图3所示.$\triangle ABC$ 三边长为

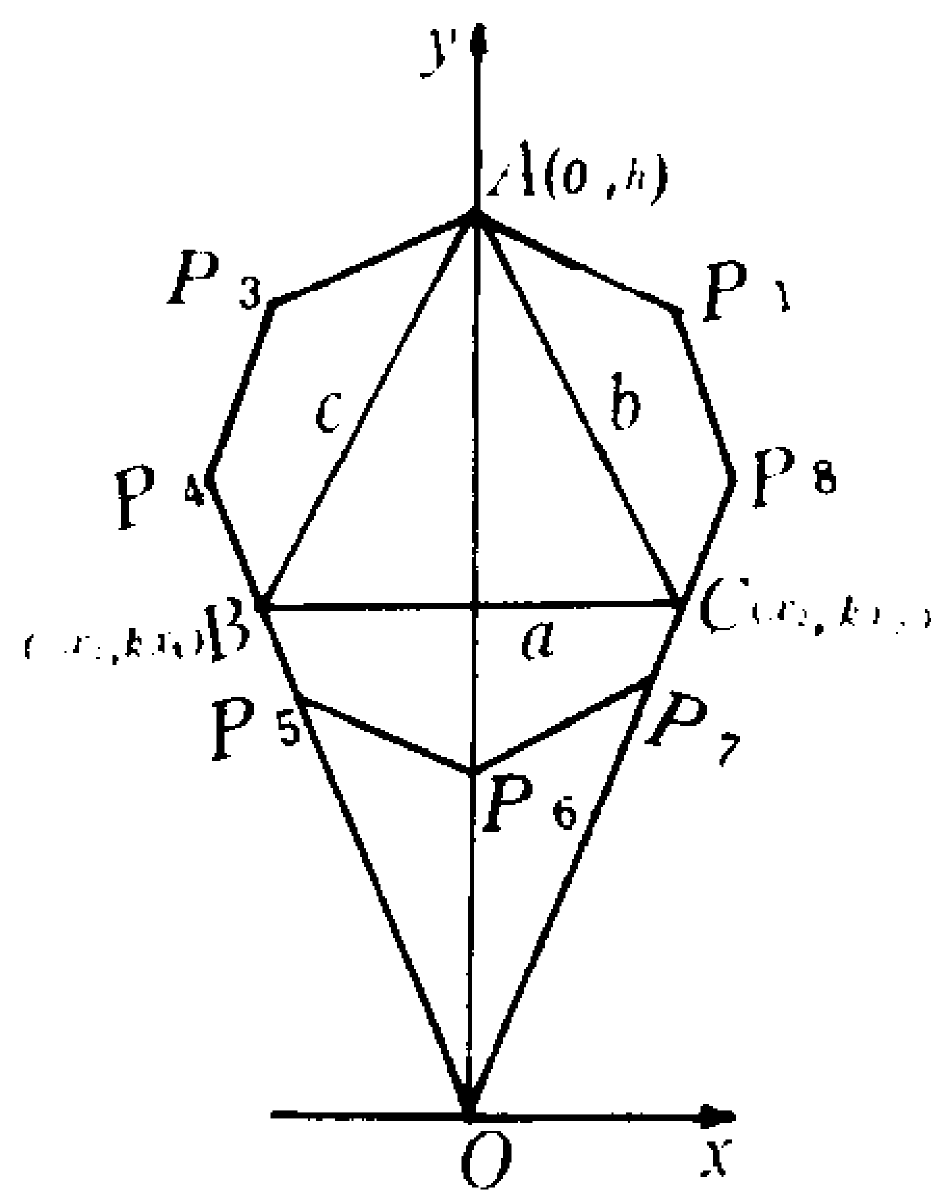


图 3

$$a = BC$$

$$= \sqrt{(x_2 + x_1)^2 + k^2(x_2 - x_1)^2},$$

$$b = CA = \sqrt{x_2^2 + (kx_2 - h)^2},$$

$$c = AB = \sqrt{x_1^2 + (kx_1 - h)^2},$$

面积为

$$S = (hx_1 + hx_2 - 2kx_1x_2)/2$$

内切圆半径为

$$r=\frac{hx_1+hx_2-2kx_1x_2}{a+b+c}.$$

现在我们证明如下**结论**：$r(P_2BC)$ 取得极值，且 B,C 均不与 P_i 重合的必要条件是 $x_1=x_2$.

证明（反证）　假定 $x_1\neq x_2$，$r(P_2BC)$ 取得极值，且 B,C 不与任一 P_i 重合，则$\frac{\partial r}{\partial x_i}=0$，$i=1,2$，即

$$\frac{h-2kx_2}{a+b+c}-\frac{hx_1+hx_2-2kx_1x_2}{(a+b+c)^2}$$

$$\cdot\left[\frac{x_2+x_1+k^2(x_1-x_2)}{a}+\frac{(k^2+1)x_1-kh}{c}\right],\tag{1}$$

$$\frac{h-2kx_1}{a+b+c}-\frac{hx_1+hx_2-2kx_1x_2}{(a+b+c)^2}$$

$$\cdot\left[\frac{x_2+x_1+k^2(x_2-x_1)}{a}+\frac{(k^2+1)x_1-kh}{b}\right],\tag{2}$$

(1) 式减去(2) 式得

$$\frac{2k(x_1-x_2)}{a+b+c}-\frac{hx_1+hx_2-2kx_1x_2}{(a+b+c)^2}$$

$$\cdot\left[\frac{2k^2(x_1-x_2)}{a}+\frac{(k^2+1)x_1-kh}{c}-\frac{(k^2+1)x_2-kh}{b}\right],\tag{3}$$

利用恒等式

$$aA-bB=\frac{1}{2}(a+b)(A-B)+\frac{1}{2}(a-b)(A+B),$$

可得

$$\frac{(k^2+1)x_1-kh}{c}-\frac{(k^2+1)x_2-kh}{b}$$

$$=\frac{1}{2}\left(\frac{1}{c}+\frac{1}{b}\right)(k^2+1)(x_1-x_2)$$

$$+\frac{1}{2}\left(\frac{1}{c}-\frac{1}{b}\right)\left[(k^2+1)(x_1+x_2)-2kh\right]$$

$$=\frac{b+c}{2bc}(k^2+1)(x_1-x_2)$$

$$+\frac{b^2-c^2}{2bc(b+c)}[(k^2+1)(x_1+x_2)-2kh]$$

$$=\frac{b+c}{2bc}(k^2+1)(x_1-x_2)$$

$$+\frac{x_2-x_1}{2bc(b+c)}[(k^2+1)(x_1+x_2)-2kh]^2, \tag{4}$$

将(4)代入(3)得

$$\frac{2k(x_1-x_2)}{a+b+c}-\frac{hx_1+hx_2-2kx_1x_2}{(a+b+c)^2}$$

$$\cdot\left\{\frac{2k^2(x_1-x_2)}{a}+\frac{b+c}{2bc}(k^2+1)(x_1-x_2)\right.$$

$$\left.+\frac{x_2-x_1}{2bc(b+c)}\cdot[(k^2+1)(x_1+x_2)-2kh]^2\right\}=0, \tag{5}$$

两边同乘以 $2bc(a+b+c)^2/(x_1-x_2)$ 得

$$4kbc(a+b+c)-(hx_1+hx_2-2kx_1x_2)$$

$$\cdot\left\{\frac{4k^2bc}{a}+(k^2+1)(b+c)-\frac{[(k^2+1)(x_1+x_2)-2kh]^2}{b+c}\right\}=0. \tag{6}$$

我们将证明上式不成立. 记上式左边为 T,上式中各常数的数值及各参数变量的范围(其中有的被放大了)是

$$k=1+\sqrt{2},h=2+\sqrt{2},$$

$$\sqrt{2}/2<x_1,x_2<1,$$

$$\sqrt{2}<a,b,c<2,$$

$$0<hx_1+hx_2-2kx_1x_2<1+\sqrt{2},$$

$$\frac{\partial a}{\partial x_1}>0,\frac{\partial c}{\partial x_1}<0,$$

$$\frac{\partial c}{\partial x_1}=\frac{(k^2+1)x_1-kh}{c}>-2.$$

我们对$\frac{\partial T}{\partial x_1}$进行估计，记

$$t=\frac{4k^2bc}{a}+(k^2+1)(b+c)-\frac{[(k^2+1)(x_1+x_2)-2kh]^2}{b+c},$$

则

$$t>4(3+2\sqrt{2})+8(1+\sqrt{2})-(8+6\sqrt{2})>0,$$

$$\frac{\partial t}{\partial x_1}=-\frac{4k^2bc}{a^2}\frac{\partial a}{\partial x_1}+\frac{4k^2b}{a}\frac{\partial c}{\partial x_1}+(k^2+1)\frac{\partial c}{\partial x_1}-\frac{2(k^2+1)}{b+c}$$
$$\cdot[(k^2+1)(x_1+x_2)-2kh]$$
$$+\frac{[(k^2+1)(x_1+x_2)-2kh]^2}{(b+c)^2}\frac{\partial c}{\partial x_1}$$
$$<0+0+0+(16+12\sqrt{2})+0=16+12\sqrt{2},$$

于是

$$\frac{\partial T}{\partial x_1}=4kbc\frac{\partial a}{\partial x_1}+4kb(a+b+2c)\frac{\partial c}{\partial x_1}$$
$$-(hx_1+hx_2-2kx_1x_2)\frac{\partial t}{\partial x_1}+(2kx_2-h)t$$
$$>0-128(1+\sqrt{2})-(40+28\sqrt{2})+0$$
$$=-168-156\sqrt{2}.$$

同理可得$\frac{\partial T}{\partial x_2}>-168-156\sqrt{2}$.

我们将区间$[\frac{\sqrt{2}}{2},1]\times[\frac{\sqrt{2}}{2},1]$等分成$n\times n$份，那么任一小方格中$T$的数值的变化不会超过$2(168+156\sqrt{2})(1-\sqrt{2}/2)/n=(24+144\sqrt{2})/n<228/n$，那么只要取$n=114$，小方格中$T$的数值的变化不会超过2，而$T$在这些小方格格点上的数值均大于2.127，因而$T$在$\sqrt{2}/2<x_1,x_2<1$范围内的值均大于0，(6)式不可能成立. 从而结论成立. □

当$x_1=x_2=x$时，我们可得

$$r=\frac{hx-kx^2}{x+\sqrt{(k^2+1)x^2-2khx+h^2}}.$$

令$\frac{dr}{dx}=0$，得到满足$\sqrt{2}/2<x<1$的唯一解$x=0.77685$(近似值)，相应的可能的极值$r_2=0.4780$(近似值)．类似可求得$r_0=0.4656$(近似值)．它们都小于r_1．于是r的最大值为

$$\max r(ABC)=\frac{1}{4}(\sqrt{3}-1)\sqrt{4+2\sqrt{2}}\doteq 0.4782.$$

(四) 进一步的问题与讨论

上述方法可以对任意特定的正整数n解决引言中的问题．也可以对所有的n采取上述方法，因为随着n的增大，各变量的范围缩小，参数则趋于某一常数，因而T的范围随着变小，使得数值估计变得容易了，可以一次解决掉大于某个n_0的所有的n.

令人遗憾的是，目前我们只得借助于上述繁琐的运算．本文中对偏导数的估计是很粗糙的，但是笔者认为，对数值方法的改进是没有多大意义的．能否有显著的改进，取决于能否证明下述

猜想[3]　$\triangle ABC$中，$AB=AC$，D为BC中点，E与F分别为AC，AB边上的动点，$\triangle DEF$的内切圆半径取得极大值，那么有$AE=AF$，或者E，F与三角形的顶点重合.

有趣的是，当D也为动点时，我们能够证明(定理2)：除边界情形外，取得极值的必要条件是E，F关于对称轴对称，而D固定在BC中点时，我们却不得不求助于繁琐的数值方法.

参考文献

[1] P. T. Bateman, H. G. Diamond, K. B. Stolarsky, Problem 6642, Amer. Math. Monthly, 97(1990), 857.

[2] 李文志，征解问题91，《数学通讯》，1992年第5期，39；1994年第10期，40－42.

[3] 李文志,征解问题133*,《数学通讯》,1994年第3期,37.

[4] Li Wen zhi, Chen Yi Ping, Solution to the regular pentagon problem, 《蛙鸣数学杂志》,第46期,中国科学技术大学数学系,1992年6月,13－21.

一个覆盖问题

中国科技大学数学系　冯　磊

问题　一条宽为 l 的无限长的带子覆盖面积为 1 的正方形，问如何使覆盖面积最大，并求最大面积.

解　这个问题要分几步来考虑.

(一) 首先，因为正方形面积为 1，所以正方形边长为 1，如果 $l \geqslant 1$，那么带子可以把正方形全部覆盖住(如图 1).

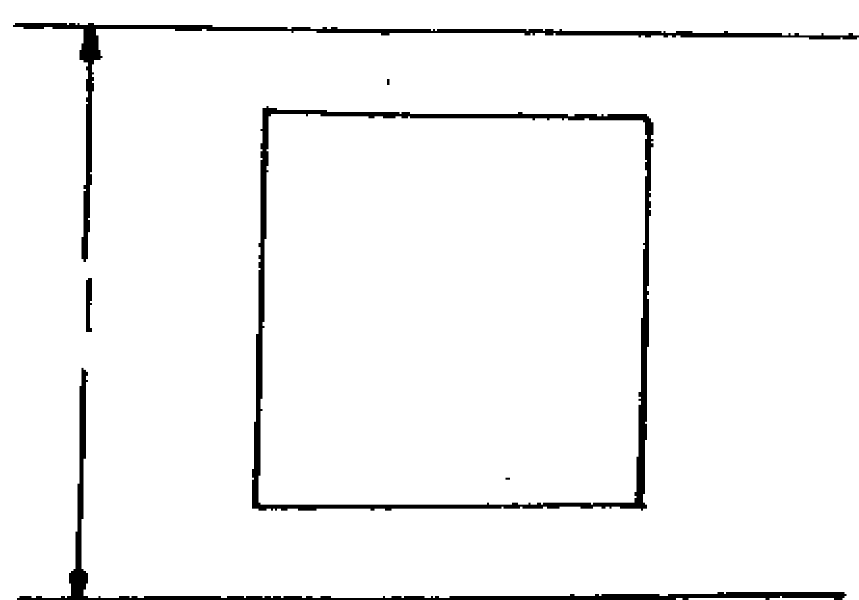


图　1

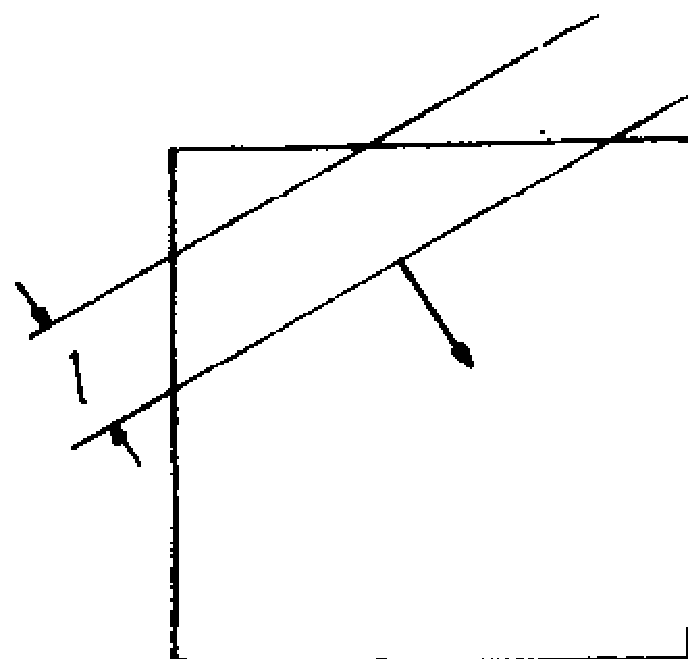


图　2

(二) 如果 $l < 1$.

(1) 这条带子一定覆盖住正方形的一条对角线，因为如果带子不盖住正方形的一条对角线，那么有以下三种情况：

(i) 带子在正方形上的位置如图 2，把带子向箭头的方向移动，覆盖面积会增大.

(ii) 位置如图 3. 如果把带子向箭头方向移动，使带子边缘过正方形的一个顶点，则移动后增加的四边形面积比减少的四边形面积多了带阴影的三角形面积，所以移动后覆盖面积增大了.

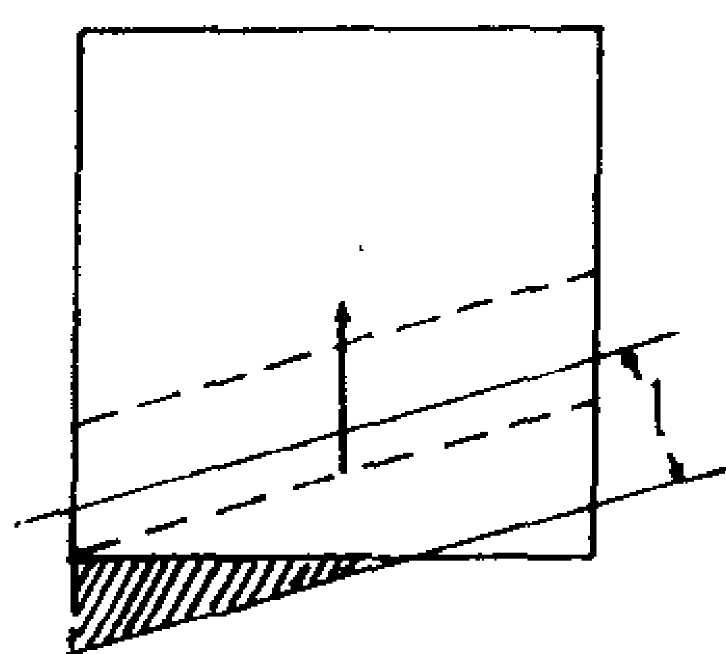


图　3

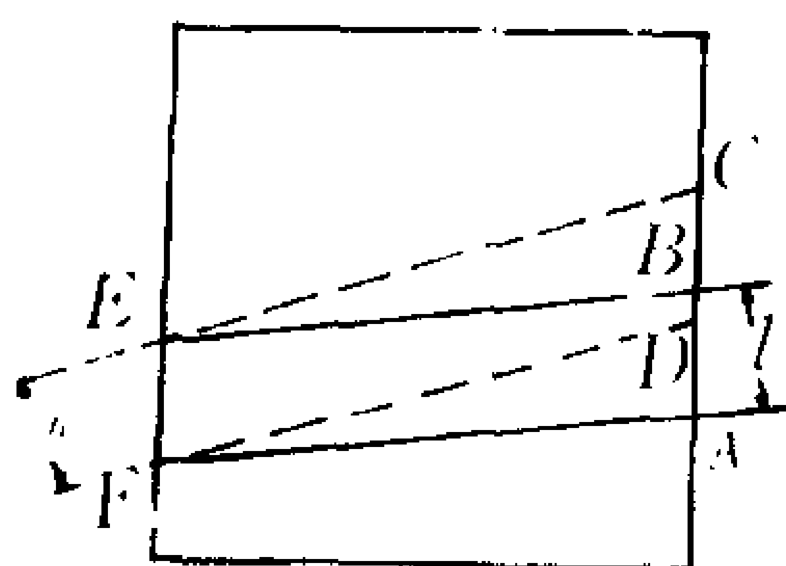


图　4

(iii) 位置如图 4. 设 $\angle FAD \geqslant 90°$. 取 $BC = AD$,取法如图. 连结 CE, DF. $\because \angle FAD \geqslant 90°$, $\therefore$ 在 $\triangle FDA$ 中, $FD > FA$, 而 $ECDF$ 和 $EBAF$ 面积相等, $\therefore FA \cdot l = FD \cdot h$, $\therefore l > h$. 所以移动后带子的宽度比原来小, 如果把带子宽度放大成 l, 那么 $FA \cdot l < FD \cdot l$, $\therefore$ 覆盖面积增大.

由此可得,如果带子不覆盖正方形的一条对角线,那么覆盖面积就不是最大的. 因此带子覆盖住正方形的一条对角线.

(2) 带子两边在正方形内的截长一定相等, 即图 5 中 $a = b$, 假设 $b > a$, 把带子从 a 向 b 的方向(如图 5 箭头所示) 移动一个非常小的距离, 使移动后的截长 $a' < b'$, 由于 $a' \parallel a$, $b' \parallel b$, 移动后覆盖面积增大的梯形面积比减小的梯形面积要大. 所以覆盖面积增大.

从而得出带子两边在正方形的截长相等, 这时带子的中心线一定通过正方形两对角线的交点.

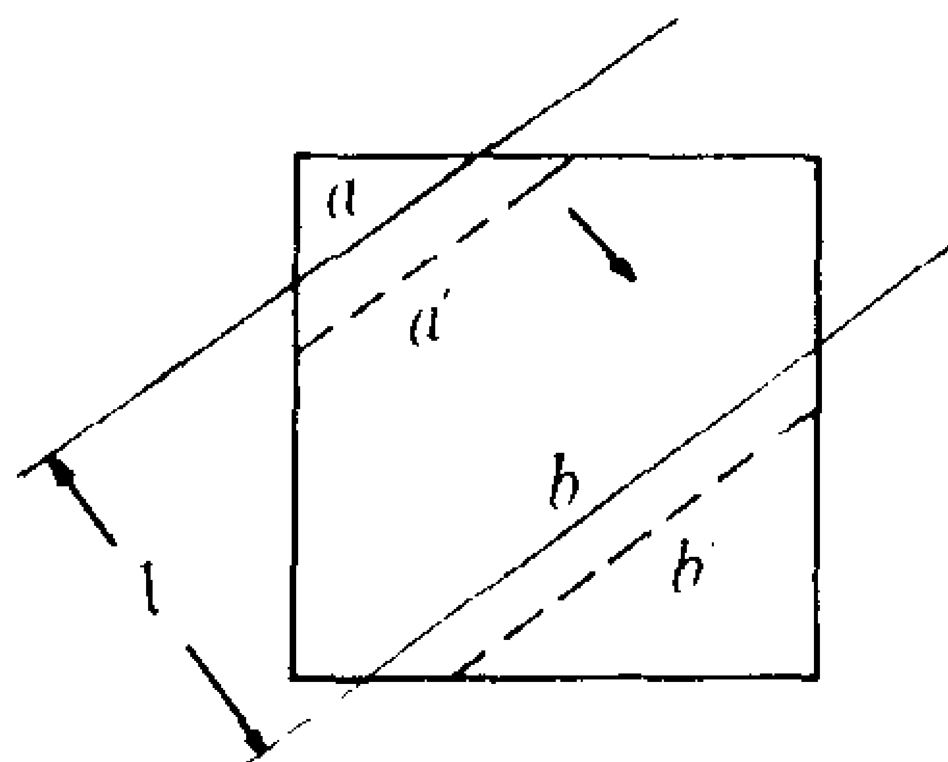


图　5

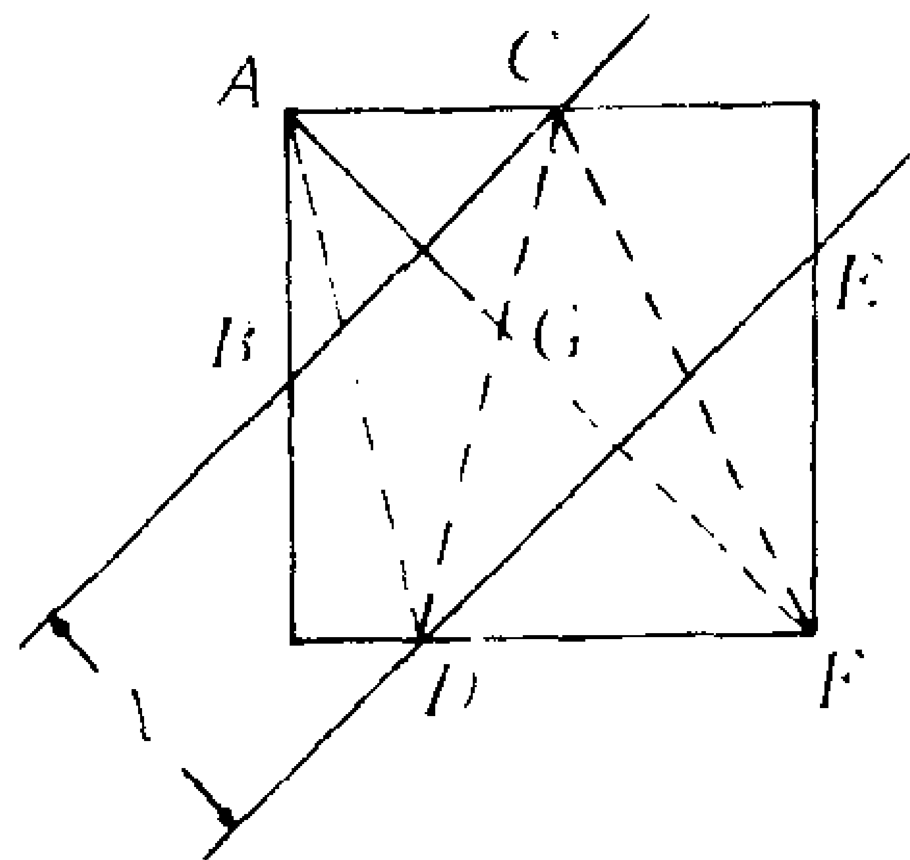


图　6

证明　如图6，连结CD,AF. $\because BC=DE,\angle ABC=\angle FED$，$\therefore \triangle ABC\cong\triangle FED$，$\therefore AC=DF$. 连$AD,CF$，则$ADFC$是平行四边形，$\therefore CD$与$AF$的交点$G$是$AF$的中点，即$G$是正方形对角线的中点. G又是CD的中点，即G是带子l的中心线上的点. $\therefore$ 带子的中心线一定通过正方形两对角线的交点.

(3) 求出阴影三角形的面积. 设$h=OC,x=DC,OB=m$，$OA=n$及$\angle\alpha$如图7所示，则

$$h=\frac{\sqrt{2}}{2}\cos\alpha,x=h-\frac{1}{2}=\frac{\sqrt{2}}{2}\cos\alpha-\frac{1}{2},$$

$$m=\sin45^\circ\frac{\sqrt{2}/2}{\sin(45^\circ+\alpha)}=\frac{1}{2\sin(45^\circ+\alpha)},$$

$$n=[2\sin(45^\circ-\alpha)]^{-1}.$$

$$\therefore\quad m+n=\frac{\sin(45^\circ+\alpha)+\sin(45^\circ-\alpha)}{2\sin(45^\circ+\alpha)\sin(45^\circ-\alpha)}=\frac{\sqrt{2}\cos\alpha}{2\cos^2\alpha-1}.$$

$$\therefore\quad S_{阴影三角形}=(m+n)hx^2/2h^2$$

$$=\frac{1}{2}\frac{\sqrt{2}\cos\alpha}{2\cos^2\alpha-1}\left(\frac{\sqrt{2}\cos\alpha-1}{2}\right)^2\Big/\frac{\sqrt{2}}{2}\cos\alpha$$

$$=\frac{\sqrt{2}}{2}\left(\cos\alpha-\frac{1}{2}\right)^2\Big/(2\cos^2\alpha-1).$$

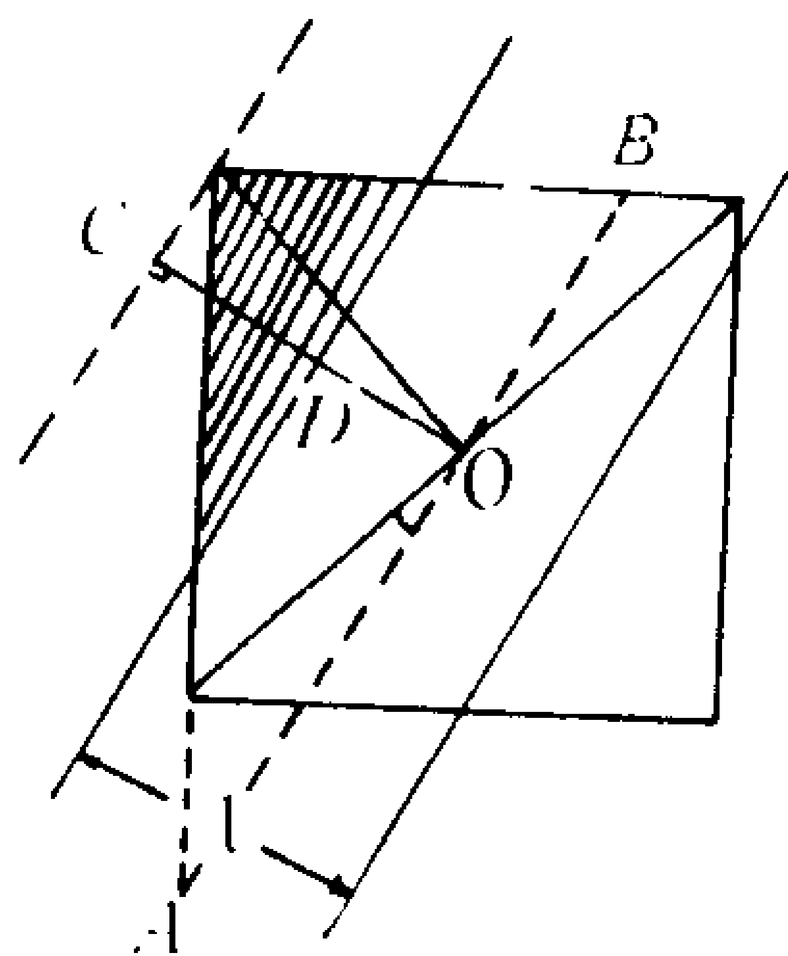
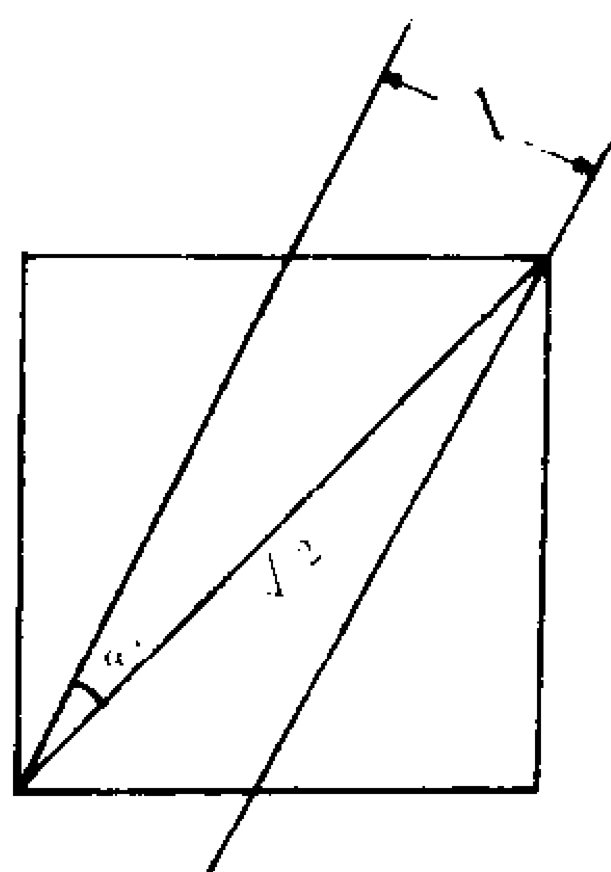


图　7


图　8

(4) 当 $\alpha = 0°$ 时，$S_{阴影三角形} = (\frac{\sqrt{2}}{2} - \frac{1}{2})^2$.

在符合前(1)和(2)所确定的带子在正方形内的位置情况下，$\angle\alpha$ 的最大度数如图 8. 这时

$$\cos\alpha = \sqrt{1-\sin^2\alpha} = \sqrt{1-\frac{l^2}{2}} = \sqrt{\frac{2-l^2}{2}},$$

而 $\alpha \geqslant 0$，$\therefore \sqrt{\frac{2-l^2}{2}} \leqslant \cos\alpha \leqslant 1$.

(5) 当 $l \geqslant \frac{\sqrt{2}}{2}$ 时，在 $\cos\alpha = \frac{1}{\sqrt{2}l}$ 时，阴影三角形面积最小，覆盖面积最大.

证明 要证当 $\cos\alpha = \frac{1}{\sqrt{2}l}$（因为 $l \geqslant \frac{\sqrt{2}}{2}$，此时 $\frac{1}{\sqrt{2}l} \leqslant 1$）时，阴影三角形面积一定小于 $\cos\alpha$ 为任何其他值时的面积，设 $\cos\alpha = t$，即要证：

$$\frac{\left(\frac{\sqrt{2}}{2}t - \frac{l}{2}\right)^2}{2t^2-1} > \frac{\left[\frac{\sqrt{2}}{2}\cdot\frac{1}{\sqrt{2}l} - \frac{l}{2}\right]^2}{2\left(\frac{1}{\sqrt{2}l}\right)^2 - 1}$$

$$= \frac{1-l^2}{4}.$$

移项后

$$\frac{\left(\frac{\sqrt{2}}{2}t - \frac{l}{2}\right)^2}{2t^2-1} - \frac{1-l^2}{4}$$

$$= \frac{4\left(\frac{1}{2}t^2 - \frac{\sqrt{2}}{2}tl + \frac{l}{4}\right)^2 - (2t^2-1)(1-t^2)}{4(2t^2-1)}$$

$$= \frac{(\sqrt{2}tl-1)^2}{4(2t^2-1)}.$$

由于 $l<1, t\geqslant\sqrt{\frac{2-l^2}{2}}$，从而

$$4(2t^2-1)\geqslant 4(2-l^2-1)>0, \qquad (*)$$

而 $t\neq\frac{1}{\sqrt{2}\,l}$ 时，$\sqrt{2}\,tl-1\neq 0$，于是 $\frac{(\sqrt{2}\,tl-1)^2}{4(2t^2-1)}>0$.

即当 $\cos\alpha\neq\frac{1}{\sqrt{2}\,l}$ 时，$\left(\frac{\sqrt{2}}{2}t-\frac{l}{2}\right)^2\Big/2t^2-1>\frac{1-l^2}{4}$，∴ 原命题得证. 这时覆盖面积最大为 $1-2\,\frac{1-l^2}{4}=\frac{1+l^2}{2}$.

(6) 当 $l<\frac{\sqrt{2}}{2}$ 时，在 $\cos\alpha=1$(即 $\alpha=0°$) 时，阴影三角形面积最小.

证明 设 $\cos\alpha=t$(取值为 $\sqrt{\frac{2-l^2}{2}}\leqslant t<1$)，于是

$$\frac{\left(\frac{\sqrt{2}}{2}t-\frac{l}{2}\right)^2}{2t^2-1}-\frac{(\sqrt{2}-l)^2}{4}$$

$$=\frac{4\left(\frac{1}{2}t^2-\frac{\sqrt{2}}{2}tl+\frac{l^2}{4}\right)-(2t^2-1)(2tl^2-2\sqrt{2}\,t)}{4(2t^2-1)}$$

$$=\frac{(-2-2l^2+4\sqrt{2}\,l)t^2-2\sqrt{2}\,tl+2l^2+2-2\sqrt{2}\,l}{2(2t^2-1)},$$

要证此式 >0，由(5)的(*)处得 $4(2t^2-1)>0$. 而

$$(-2-2l^2+2\sqrt{2}\,l)t^2-2\sqrt{2}\,tl+2l^2+2-2\sqrt{2}\,l$$

$$=(t-1)[(-2-2l^2+4\sqrt{2}\,l)t+(2\sqrt{2}\,l-2-2l^2)]$$

$$=(1-t)[(2-4\sqrt{2}\,l+2l^2)t+(2l^2-2\sqrt{2}\,l+2)],$$

由于 $1-t>0$，只需证

$$(t^2-4\sqrt{2}\,t+2)t+(2t^2-2\sqrt{2}\,t+2)>0. \qquad (\triangle)$$

(i) 若 $2l^2-4\sqrt{2}\,l+2\geqslant 0$，那么 $2l^2-2\sqrt{2}\,l+2\geqslant 2\sqrt{2}\,l>0$. 于是($\triangle$)式成立.

(ii) 若 $2l^2 - 4\sqrt{2}l + 2 < 0$，那么(△)式左边

$$> (2l^2 - 4\sqrt{2}l + 2) + (2l^2 - 2\sqrt{2}l + 2)$$

$$= (4l^2 - 6\sqrt{2}l + 4) = (4l - \sqrt{2})(l - \frac{\sqrt{2}}{2}).$$

而由题设得 $l < \frac{\sqrt{2}}{2}$，$\therefore 4(l - \sqrt{2})\left(l - \frac{\sqrt{2}}{2}\right) > 0$，从而(△)式也成立. ∴ 原命题得证，这时最大覆盖面积为

$$1 - 2\frac{(\sqrt{2} - l)^2}{2} = \frac{2\sqrt{2}l - l^2}{2}.$$

到此，本题全部解完. 本题整个答案为(以 $f(l)$ 表示问题最大覆盖面积)：$l \geqslant 1$ 时，$f(l) = 1$，覆盖方式如图 1.

当 $\frac{\sqrt{2}}{2} \leqslant l \leqslant 1$ 时，$f(l) = \frac{1 + l^2}{2}$，覆盖方式如图 7，其中 $\cos\alpha = \frac{1}{\sqrt{2}l}$.

当 $0 \leqslant l \leqslant \frac{\sqrt{2}}{2}$ 时，$f(l) = \frac{2\sqrt{2}l - l^2}{2}$，覆盖方式如图 9，其中带子边与带子盖住的正方形的那条对角线平行.

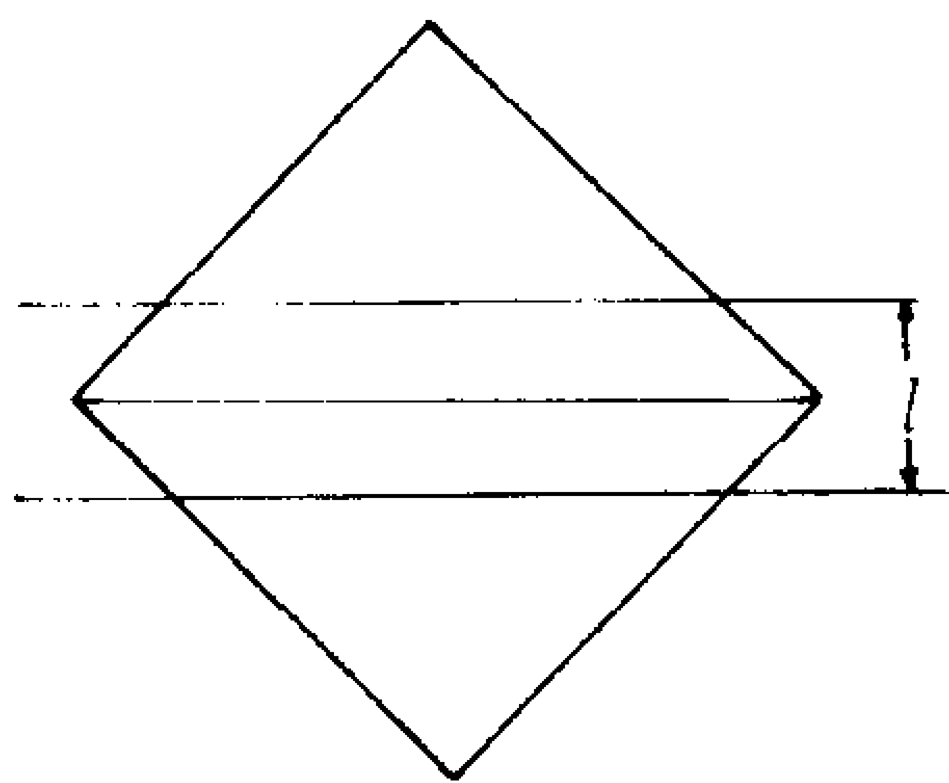


图 9

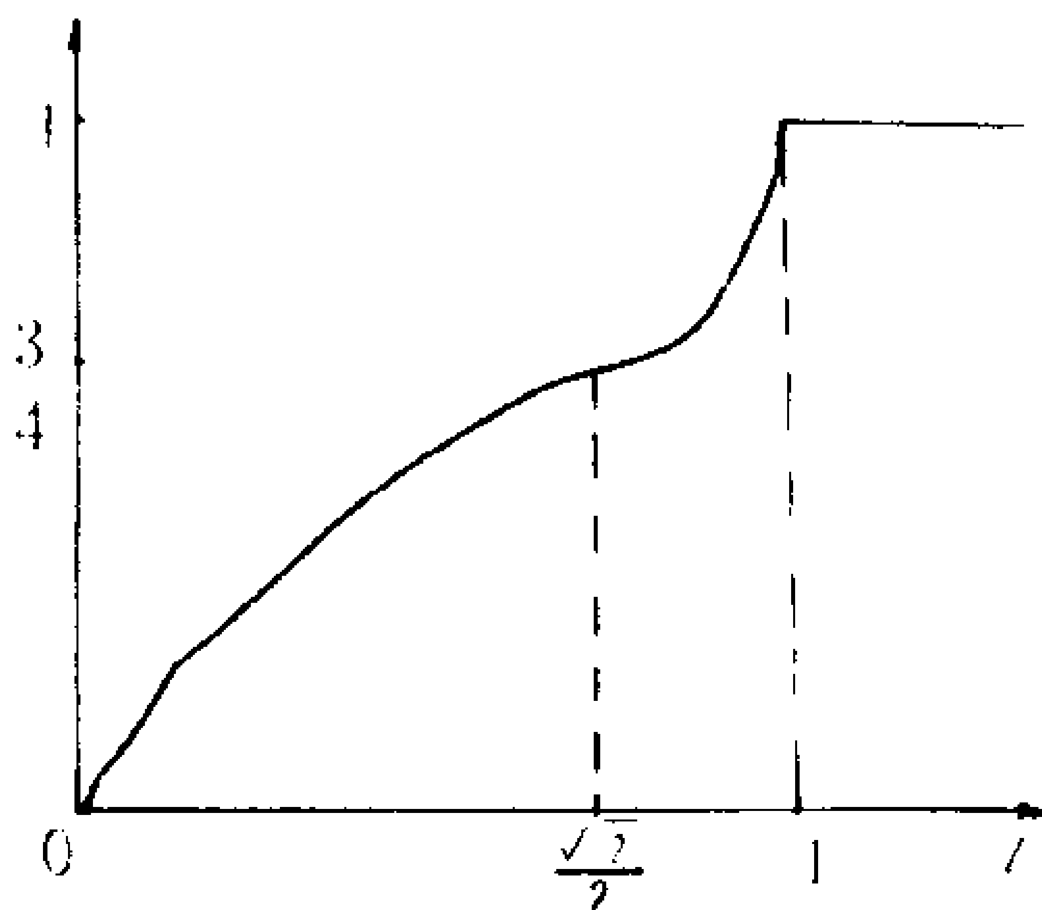


图 10

函数 $f(l)$ 如图 10 所示，它由三段组成，第一段($0 \leqslant l \leqslant \frac{\sqrt{2}}{2}$)为朝下的抛物线，第二段($\frac{\sqrt{2}}{2} \leqslant l \leqslant 1$)为朝上的抛物线，第三段($l \geqslant 1$)为直线.

祖冲之点集再探

上海市建江中学　徐　琳

平面上由 n 个点所组成的点集，若其中任意两点的垂直平分线都经过点集中至少 k 点，则称之为**平面 k 阶祖冲之 n 点集**；若平面 k 阶祖冲之 n 点集中，任意两点的垂直平分线都只经过点集中的 k 点，则称之为**平面纯 k 阶祖冲之 n 点集**. 显然 $k \leqslant n$（当 n 有限时，$k \leqslant n-2$；当 n 无限时，$k \leqslant n$）. 由于一阶祖氏有限集的存在性问题是平凡的，本文则着重讨论平面高阶祖氏有限集，平面祖氏无限集，并将平面祖氏集推广到空间.

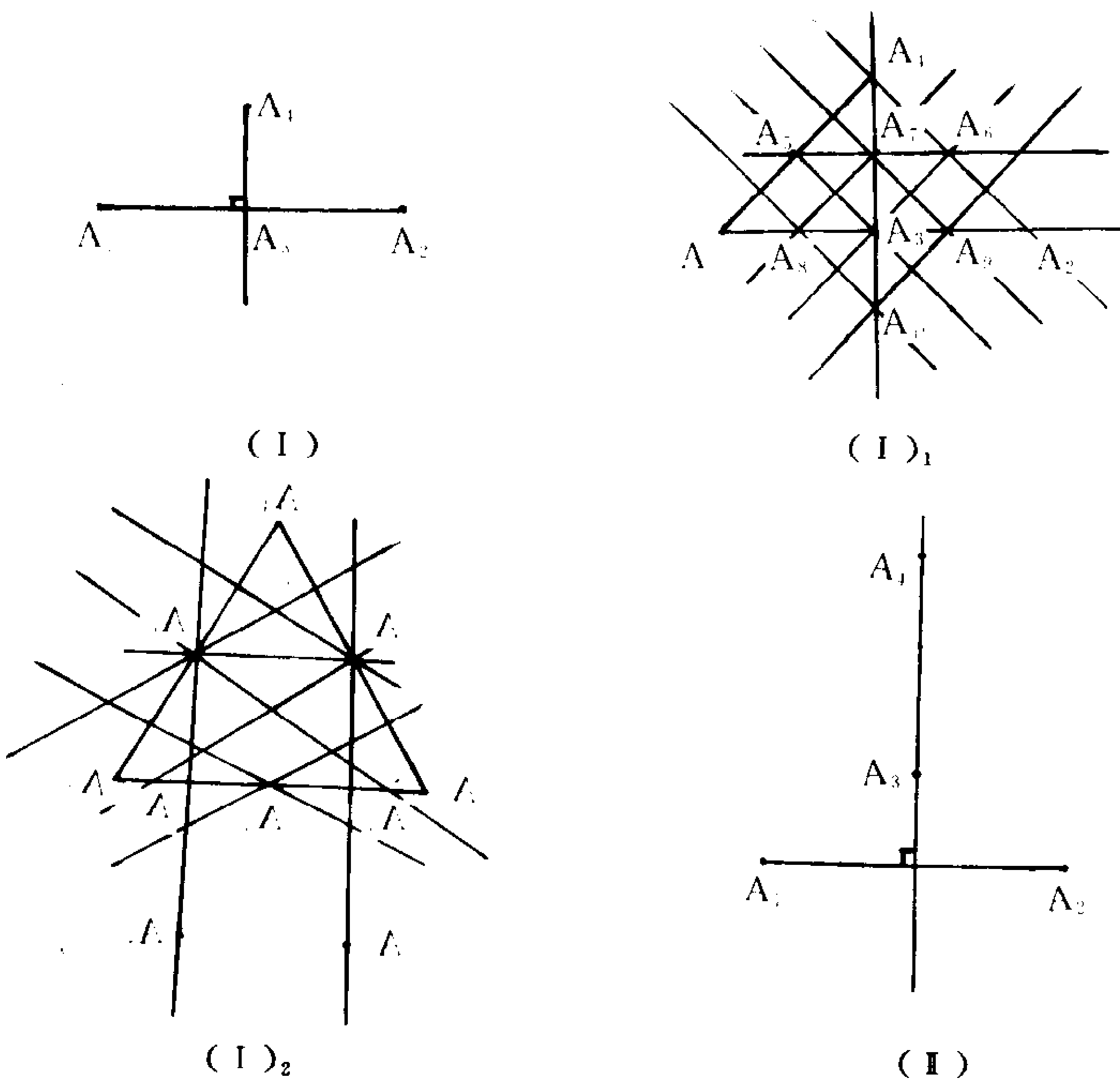
（一）平面高阶祖氏有限集

命题 1　平面二阶祖氏有限集只有以正方形各边向外（或向内）作正三角形的八个顶点构成的纯二阶祖氏 8 点集.

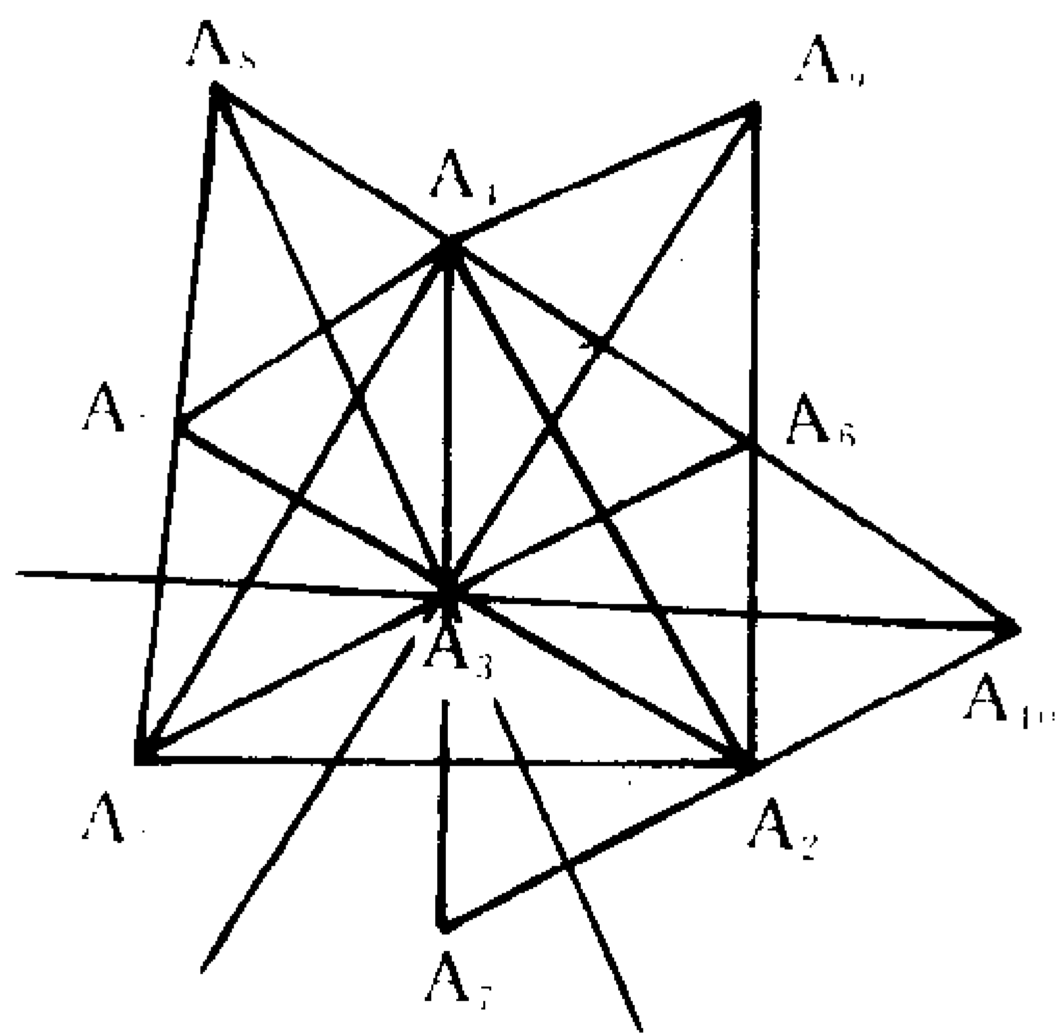
证明　由定义平面二阶祖氏点集 M 中，每两点的中垂线上至少有 M 的另两点，不妨设 A_1、A_2 的中垂线上有 A_3、A_4（A_1、A_2、A_3、$A_4 \in M$）. 显然这四点不能构成二阶祖氏集，M 中还应有别的点. 而新增 A_3、A_4 后，会增加新线段，如：A_1A_3、A_2A_3 等，新线段的中垂线上又需增点以保证过 M 中至少两点. 如果在原 n 个点的基础上，增加 m 个不重复点，那么新增不重复线段最多可为 $mn + \frac{m(m-1)}{2}$ 条，这又可新增不重复点，且最多为 $2mn + m(m-1)$ 个，如此下去，n 越大，增加速度越快，如果发散下去而不能封

闭，则 M 只能为无限集. 这样要使 M 为有限集，需以增加新点、新线段较少为原则找封闭集.

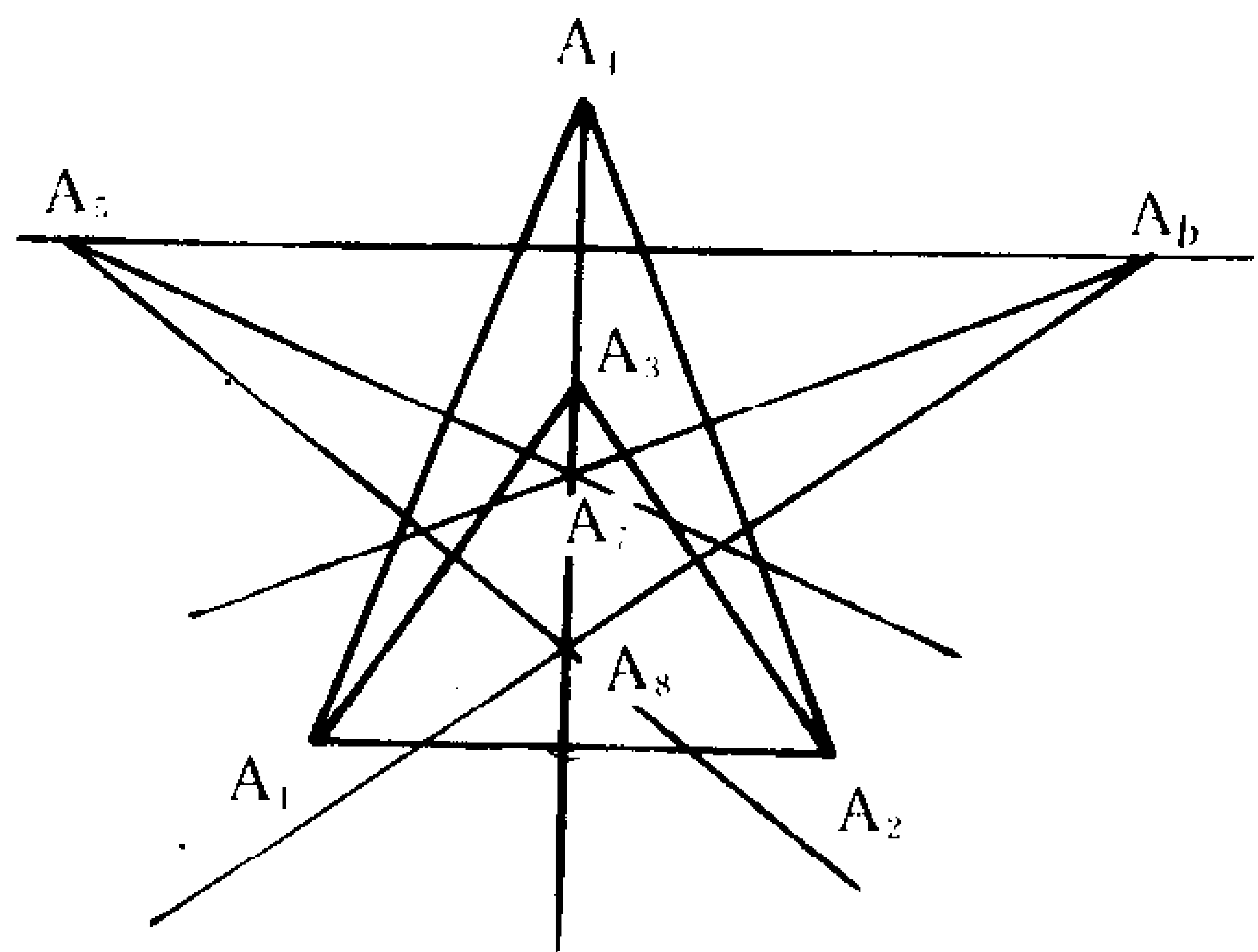
上面 A_3、A_4 只有三种情况：有一点在 A_1A_2 上、在 A_1A_2 同侧、在 A_1A_2 异侧，分别如图（Ⅰ）、（Ⅱ）、（Ⅲ）. 在图（Ⅰ）、（Ⅱ）中，以新增点、线段较少为原则，仍为发散点集，故在图（Ⅰ）、（Ⅱ）的基础上不能构成二阶祖氏有限集. 在图（Ⅲ）中，要使新增线段最少，必须 A_1、A_2 在 A_3A_4 的中垂线上，此时 $A_1A_3A_2A_4$ 为正方形，又新增平行线段 A_1A_3、A_2A_4 的中垂线 l_1 上必最少有两点，不妨设为 A_5、A_6，新增平行线段 A_1A_4、A_3A_2 的中垂线 l_2 上也最少有两点，不妨设为 A_7、A_8，要使新增中垂线减少，A_5、A_6 应关于 l_2 对称，A_7、A_8 应关于 l_1 对称，这样 $A_5A_7A_6A_8$ 为正方形.



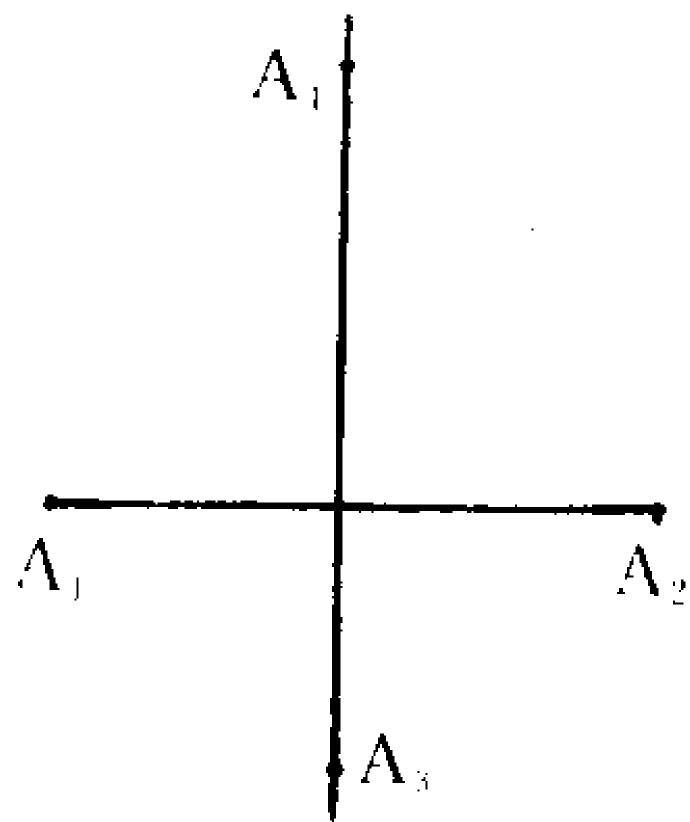
（Ⅰ）　（Ⅰ）$_1$　（Ⅰ）$_2$　（Ⅱ）



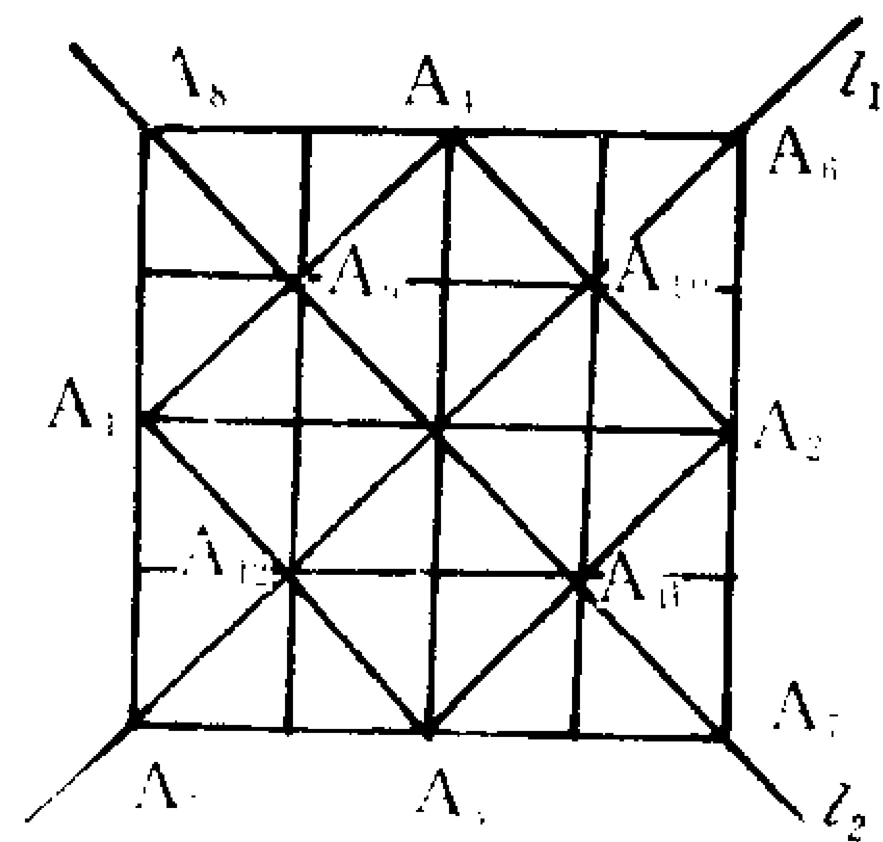
$(\text{Ⅱ})_1$



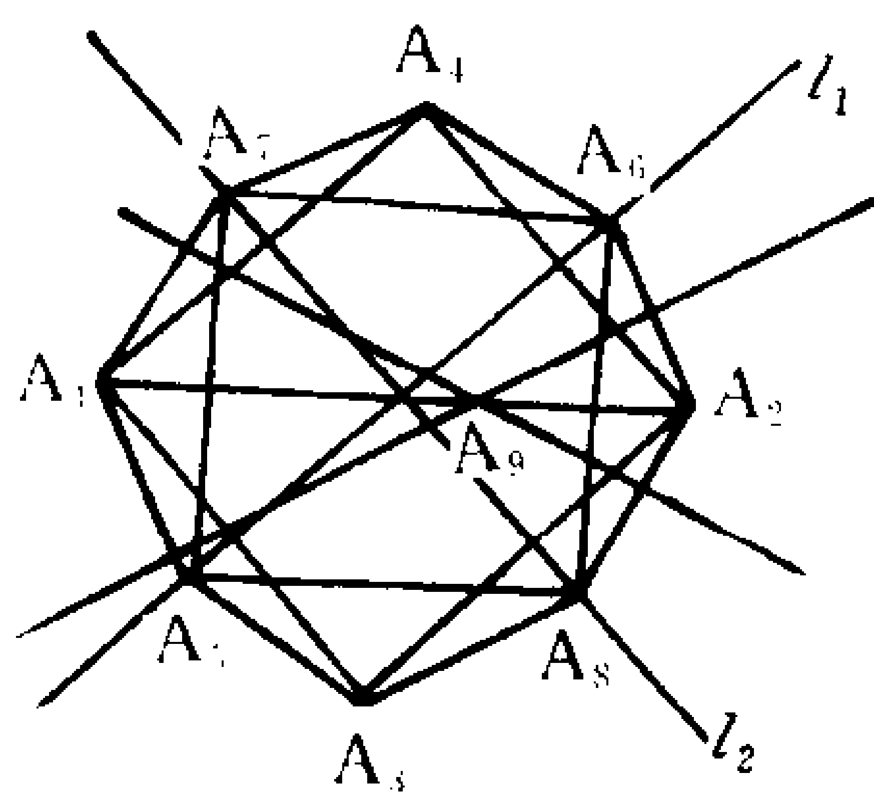
$(\text{Ⅰ})_2$



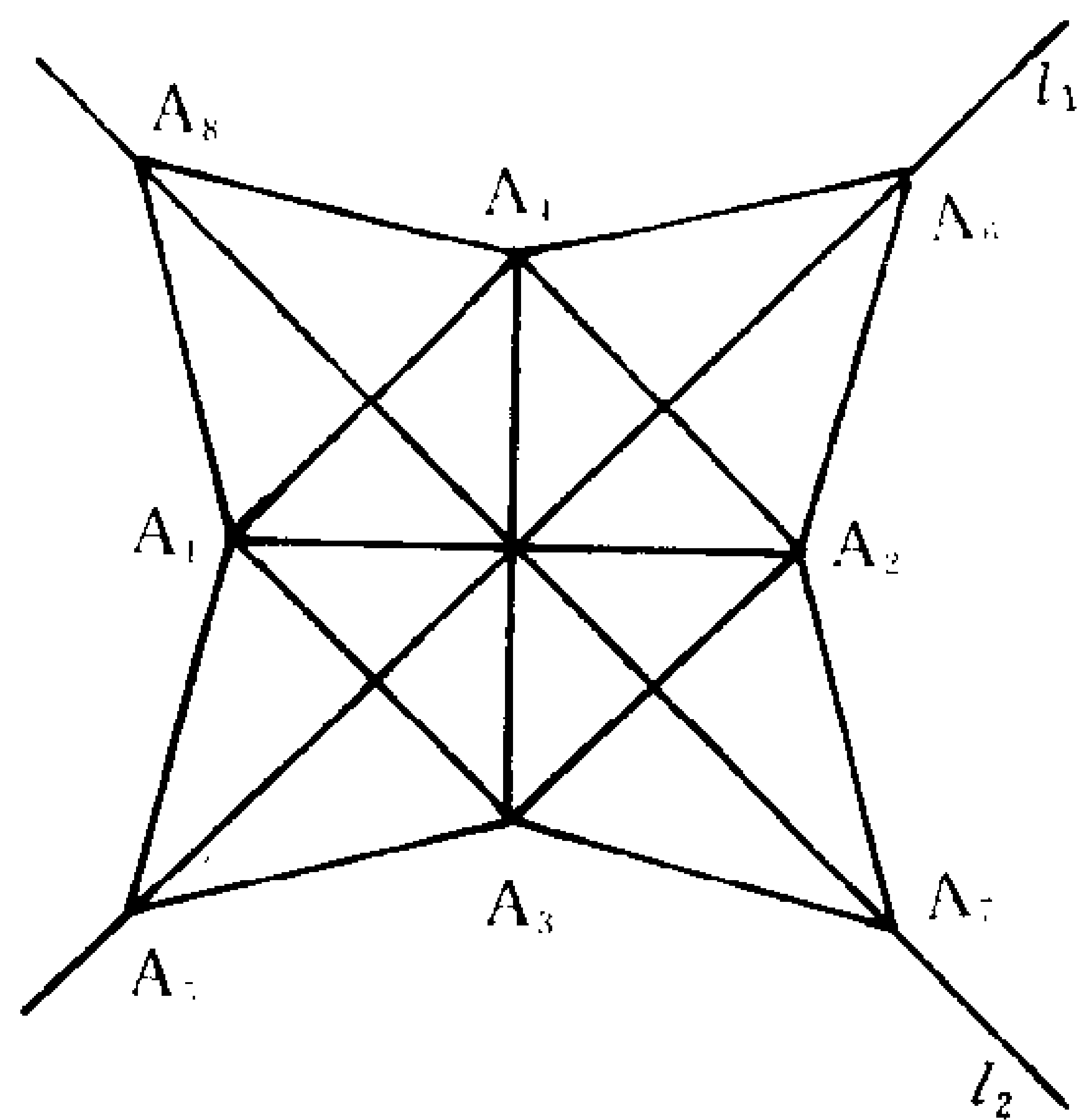
(Ⅲ)



$(\text{Ⅱ})_1$



$(\text{Ⅱ})_2$

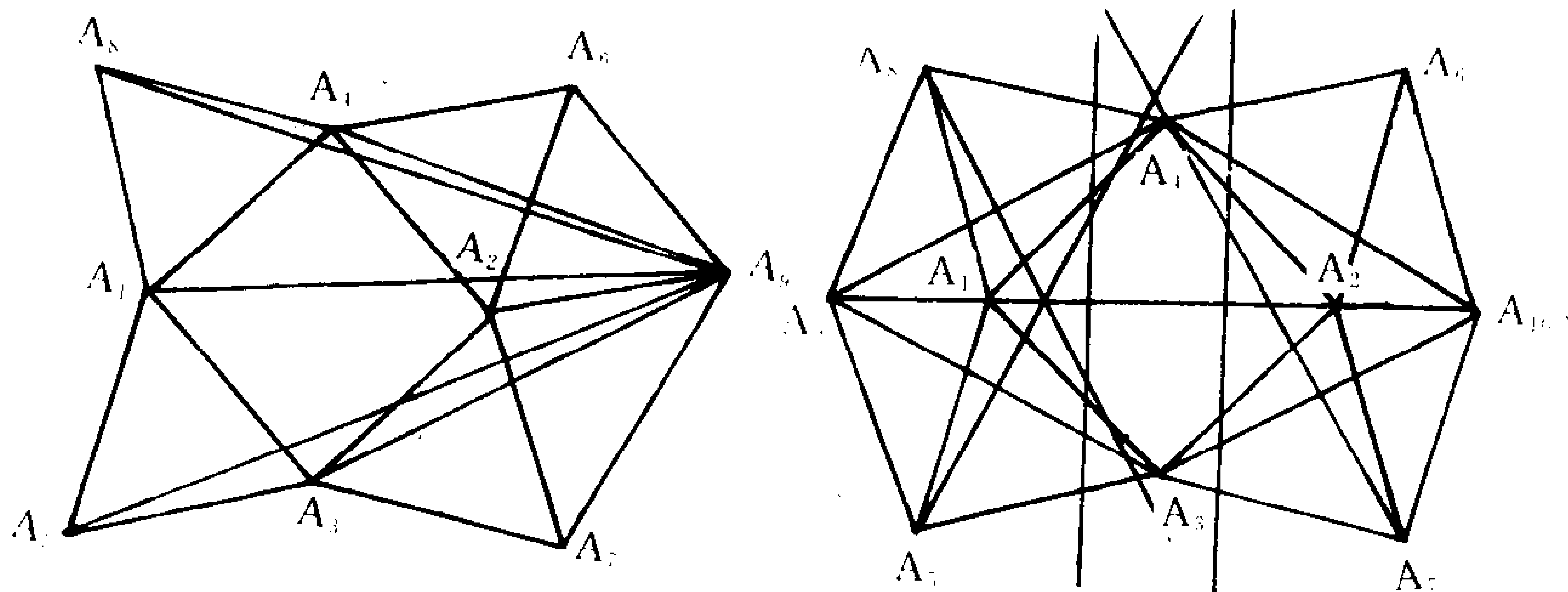


$(\text{Ⅱ})_3$

当 A_5、A_6、A_7、A_8 在正方形 $A_1A_3A_2A_4$ 外面时，两正方形相接(图(Ⅲ)$_1$)、相交(图(Ⅲ)$_2$)均为发散点集，而相离(图(Ⅲ)$_3$)时，还须 A_1A_5 的中垂线上至少有两点，要使点数最少，这两点必为 A_3、A_7，此时 $\triangle A_1A_3A_5$、$\triangle A_3A_2A_7$ 只能为正 $\triangle$，同理 $\triangle A_2A_4A_6$、$\triangle A_4A_1A_8$ 也为正三角形(当 A_5、A_6、A_7、A_8 在正方形 $A_1A_3A_2A_4$ 里面时，也有类似结果，证略)，这样点集$\{A_1, A_2, \cdots, A_8\}$构成平面纯二阶祖氏 8 点集，且点数最少.

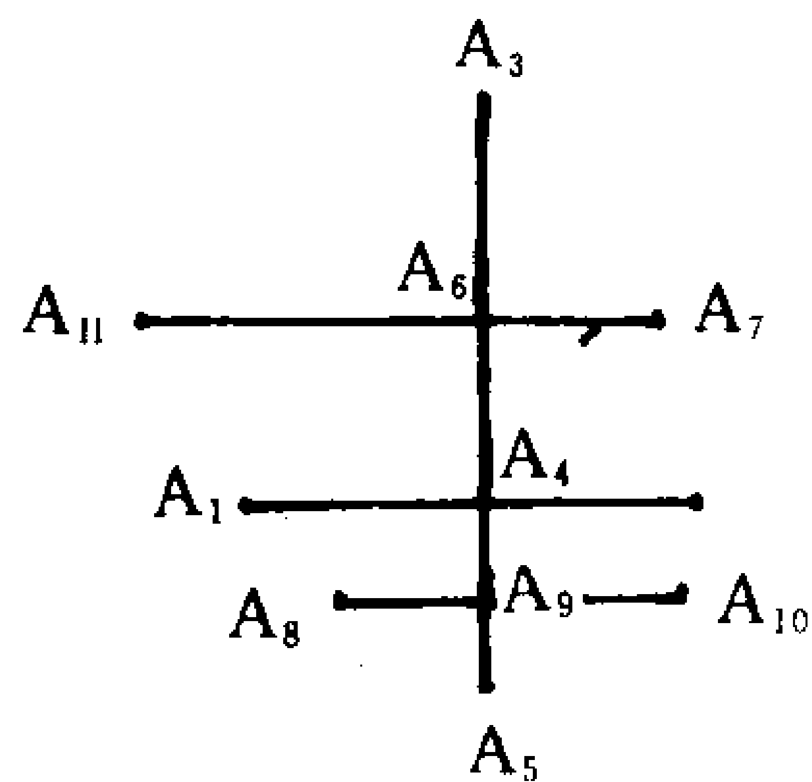
这个二阶集能否再增加有限个点而构成新的二阶有限集呢？答案是否定的，因为若新增点在原图非对称出现，则必为发散点集，而新增点在原图中对称出现，经验证仍发散.

综上所述，命题 1 成立. □



命题 2 平面三阶及其以上各阶的祖氏有限集不存在.

证明 三阶及其以上各阶的平面祖氏集 P 中任意两点的中垂线上至少有该点集的三点，不妨设 A_1A_2 中垂线上有 A_3、A_4、A_5 点 (A_1、A_2、$\cdots$、$A_5 \in P$) 则 A_3A_4、A_3A_5、A_4A_5 至少增加两条新中垂线，其上至少各有三点，如此下去，在两个互相垂直的方向上，总会有新的中垂



线,其上至少有三点,故点集 P 发散,不可能为有限集. □

(二) 祖氏无限集

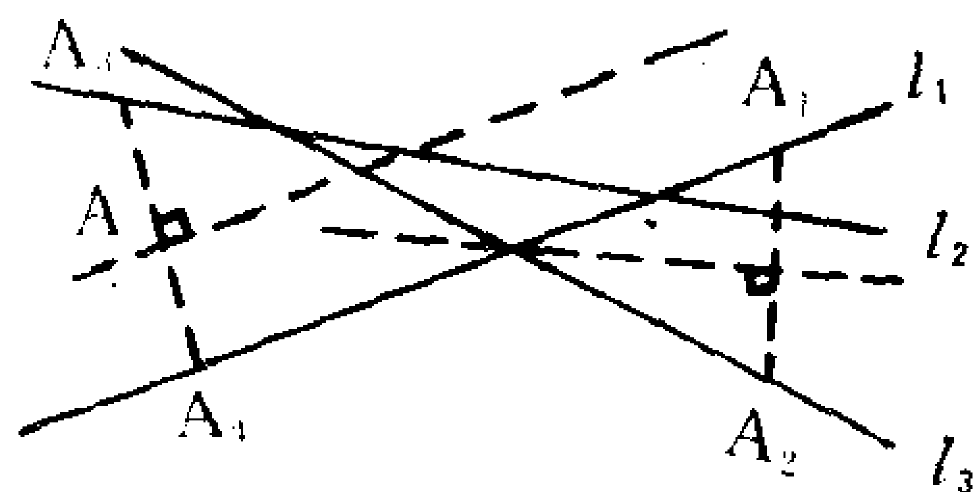
当祖氏点集的点数为可数无穷大 $\aleph_0$ 及不可数无穷大 $\aleph_1$ 时,有:

命题 3 平面一阶至 $\aleph_0$ 阶的祖氏 $\aleph_0$ 点集皆存在.

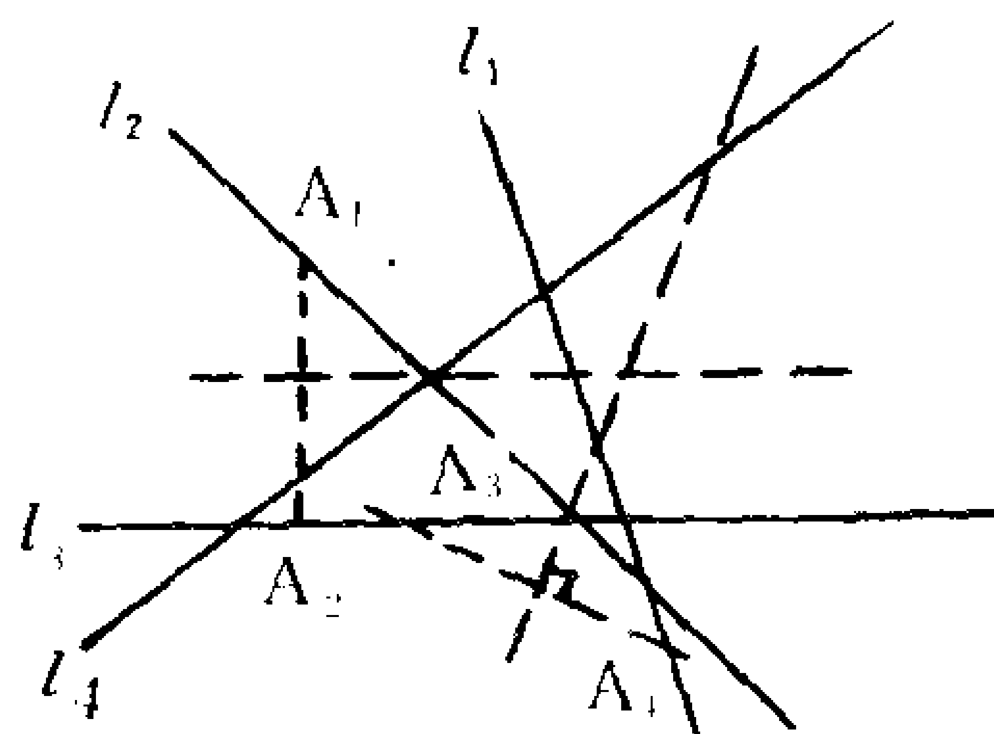
证明 平面直线(射线、线段)上的任两个有理点的中点必为相应直线(射线、线段)上的有理点,故平面直线(射线、线段)上的有理点构成平面纯一阶祖氏 $\aleph_0$ 点集;类似地,平面上有理数集 Q^2 构成平面纯 $\aleph_0$ 阶祖氏 $\aleph_0$ 点集;一般对于 $k(1\leqslant k\leqslant\aleph_0)$ 阶,可这样构造:在平面上任取两个实数点(或有理数点)A_1、A_2,在 A_1A_2 的中垂线上任取至少 k 个不同的新实数点(或新有理点)A_3,A_4,…,A_{k+2},再分别在 A_1A_3,A_1A_4,…,A_1A_{k+2},…,$A_{k+1}A_{k+2}$ 的中垂线上各任取至少 k 个不同的新实数点(或新有理点),如此下去,点集 $\{A_n\}$ 构成平面(纯)k 阶祖氏 $\aleph_0$ 点集. □

命题 4 平面一阶至 $\aleph_1$ 阶的祖氏 $\aleph_1$ 点集皆存在.

证明 平面上两两相交,其中任意三条不相交的 $n(3\leqslant n\leqslant\aleph_0)$ 条直线,其上的点构成 $(n-2)$ 阶祖氏点集.

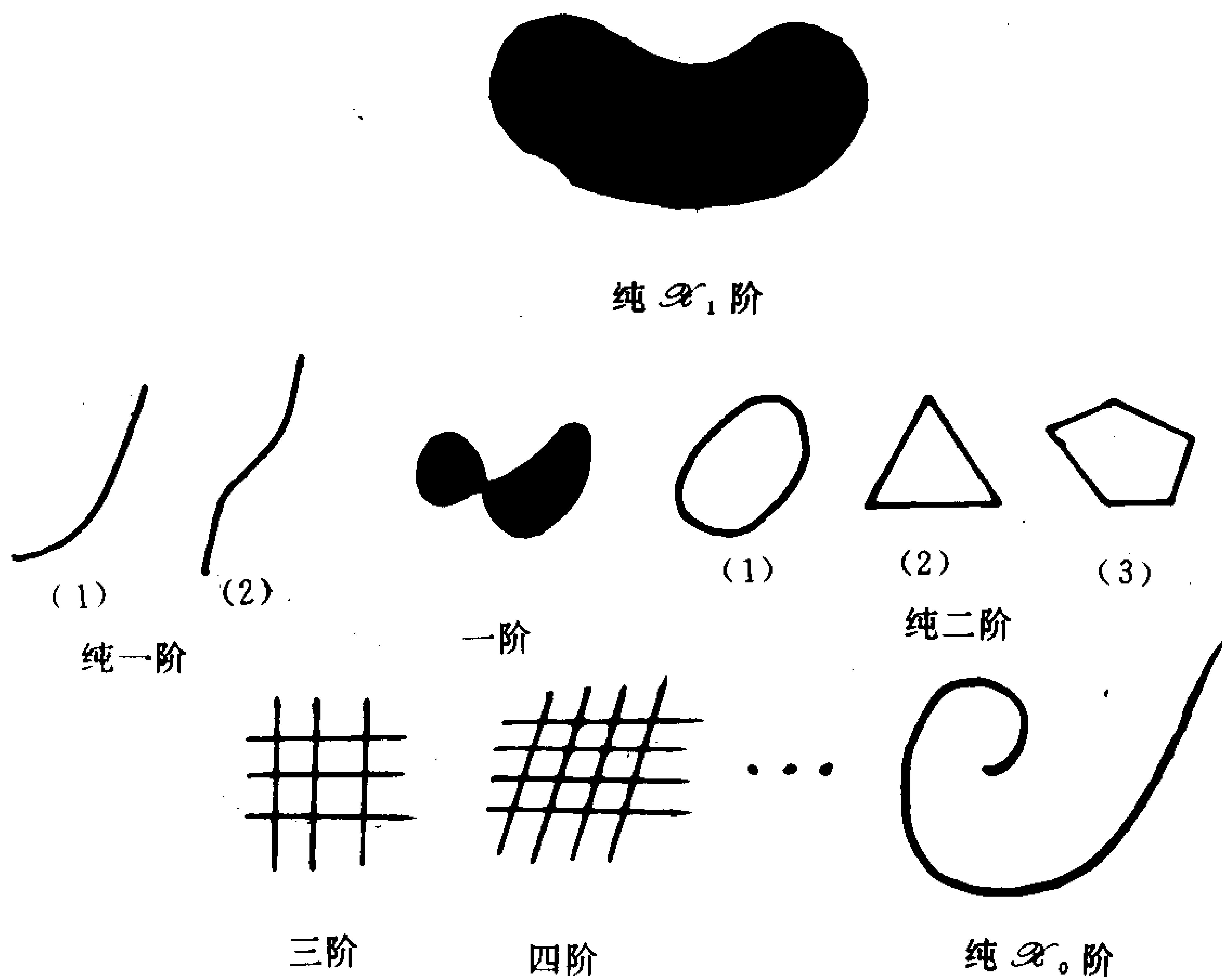


一阶(n=3)



二阶(n=4)

再如下图平面曲线、区域构成的各阶：



故命题 4 得证. □

（三）祖氏集的空间推广

1. 定义的推广.

空间 n 个点所组成的点集中，如果任意两点的垂直平分面都经过点集中至少 k 点，那么称该点集为空间 k 阶祖冲之 n 点集；若空间 k 阶祖冲之 n 点集中，任意两点的垂直平分面都只经过点集中的 k 点，则称之为空间纯 k 阶祖氏 n 点集.

2. 结论的推广.

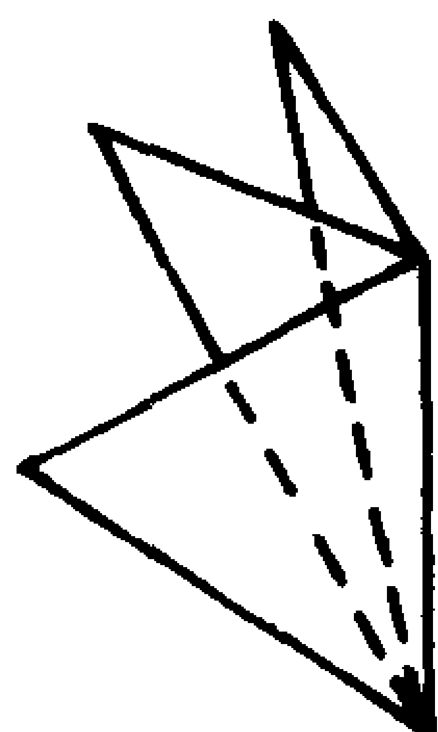
命题 5 平面(纯)k 阶祖氏 n 点集皆为相应的空间(纯)k 阶祖

氏 n 点集.

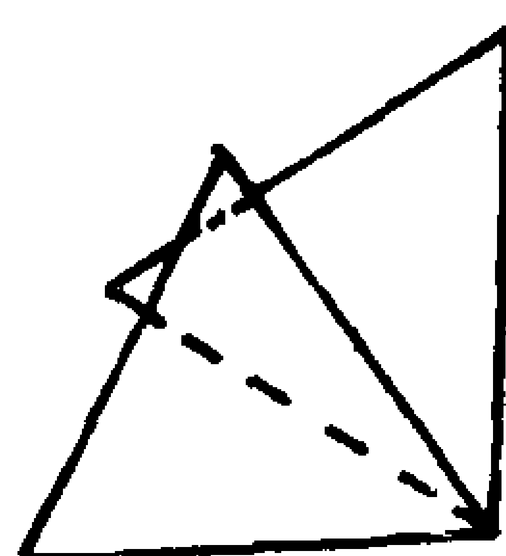
证明 因为任意两点的中垂线必在这两点的中垂面上，因而命题 5 成立. □

此外，空间还有更丰富的祖氏点集：

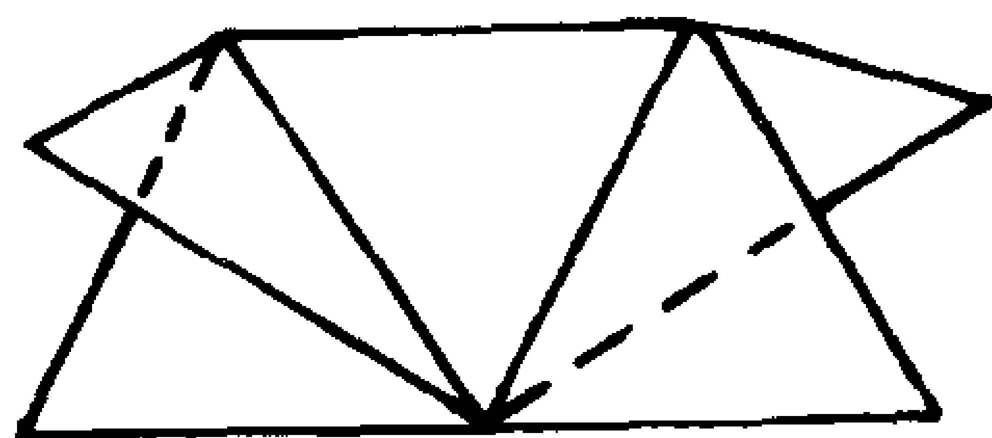
将正三角形绕着其一边旋转 n 个不同位置，这 n 个不同位置的三角形的顶点构成空间一阶祖氏 $n+2(n \in N)$ 点集，如图甲$_{(1)}$；将正三角形绕着其一顶点旋转 n 个不同位置，这 n 个不同位置的三角形顶点构成空间一阶祖氏 $2n+1(n \in N)$ 点集，如图甲$_{(2)}$；两个正三角形与另一个正三角形分别有公共边，这两个正三



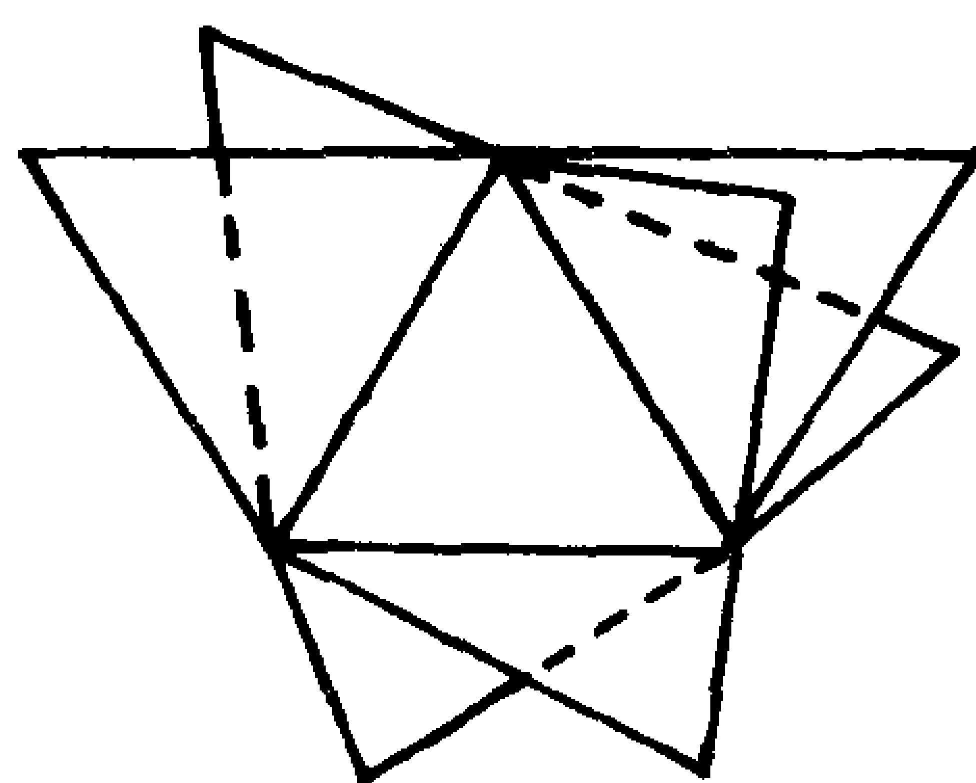
(1)



(2)



(3)



(4)

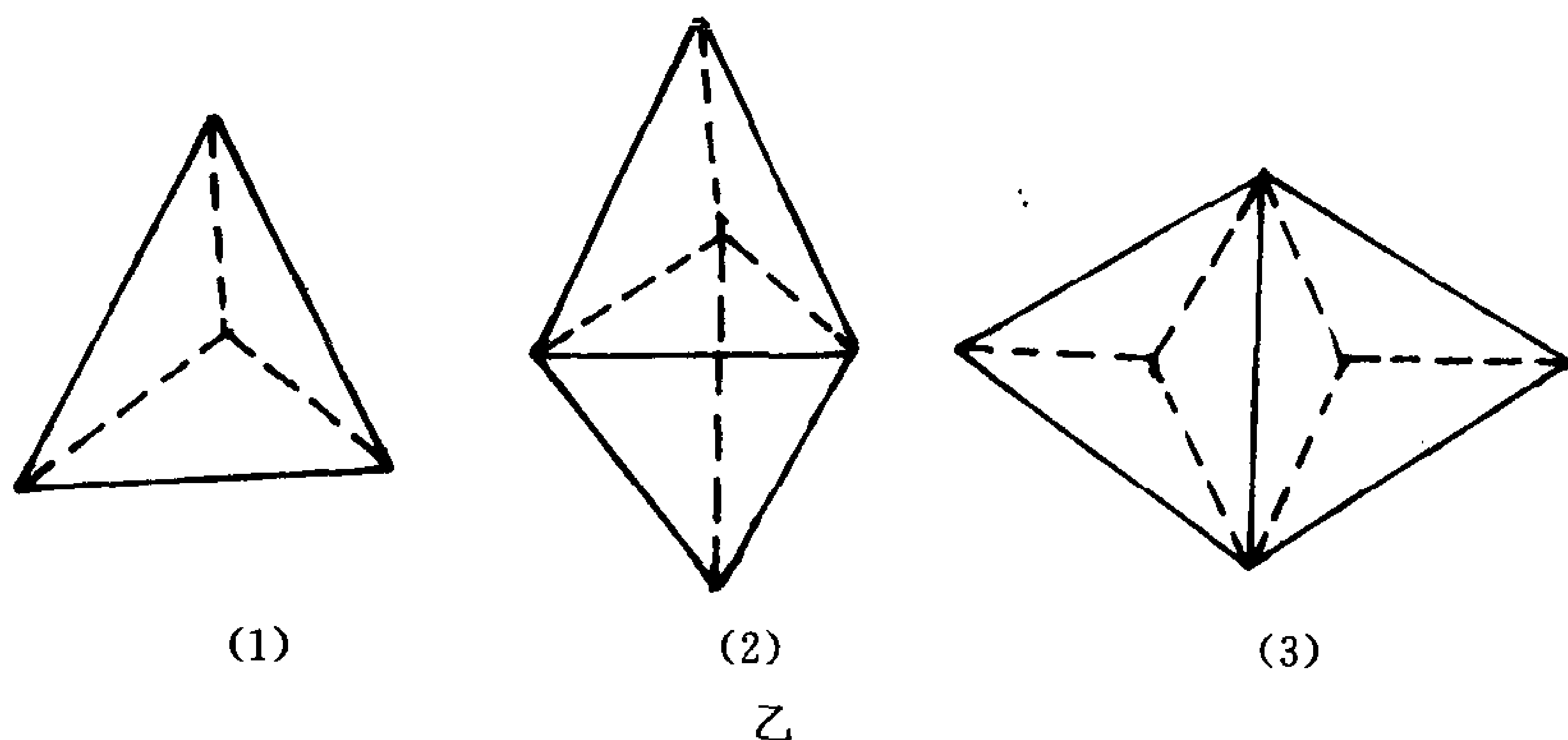
甲

角形分别绕公共边旋转 m、n 个不同位置，这些不同位置的三角形顶点构成空间一阶 $m+n+3(m,n \in N)$ 点祖氏集，如图甲$_{(3)}$；三

个正三角形与另一个正三角形有公共边，这三个正三角形分别绕公共边旋转 m,n,l 个不同位置，这些不同位置的三角形顶点构成空间一阶 $m+n+l+3$(m,n,l 为非负整数）点祖氏集，如图甲$_{(4)}$.（以上顶点有重合时，其顶点数就减少了重合个数).

侧面是正三角形，底面是正 $n(3 \leqslant n \leqslant 5, n \in N)$ 边形的多面体及其若干个的某些组合，其顶点可构成空间祖氏集：

当 $n=3$ 时，该四面体的顶点构成空间纯二阶祖氏 4 点集，如图乙$_{(1)}$；两个该四面体侧（底）面重合，其顶点构成空间二阶祖氏 5 点集，如图乙$_{(2)}$；该四面体绕其一侧棱旋转 n 次，这 n 个不同位置的四面体的顶点构成空间二阶祖氏 $2n+2$ 点集，如图乙$_{(3)}$（顶点重合时，点数应减去重合数).

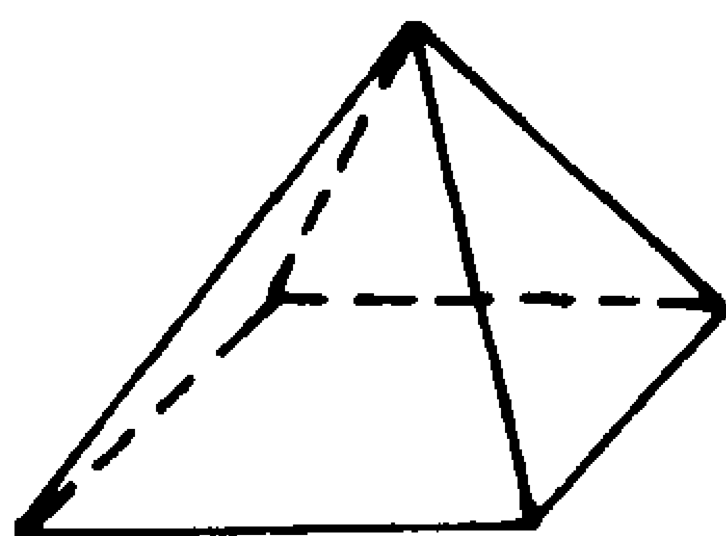


(1)　(2)　(3)

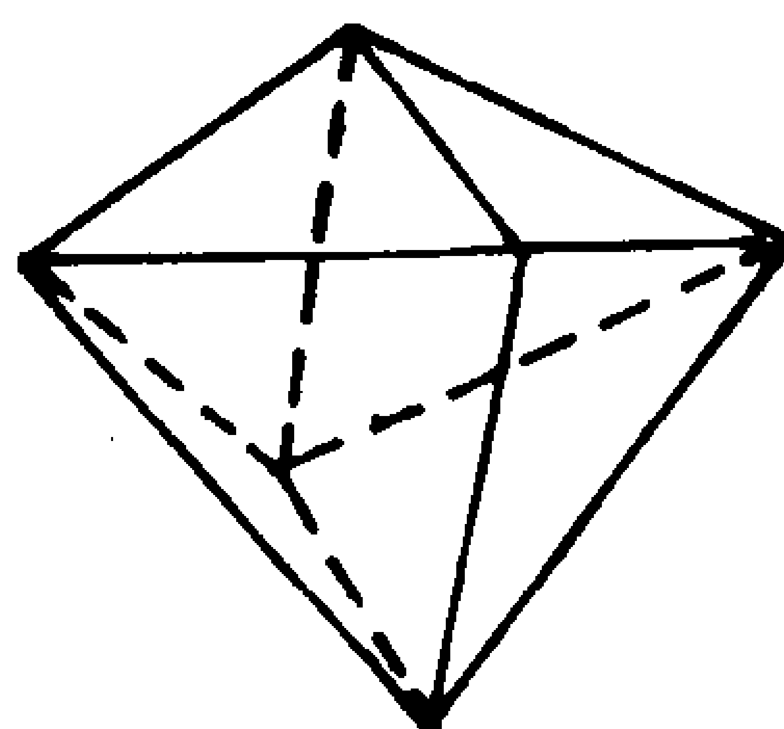
乙

当 $n=4$ 时的五面体，其顶点构成空间一阶祖氏 5 点集，如图乙$_{(4)}$；两个该五面体底面重合，其顶点构成空间二阶祖氏 6 点集，如图乙$_{(5)}$.

当 $n=5$ 时的六面体，其顶点构成空间纯二阶祖氏 6 点集，如图乙$_{(6)}$；两个该六面体底面重合，其顶点构成空间二阶祖氏 7 点集，如图乙$_{(7)}$.

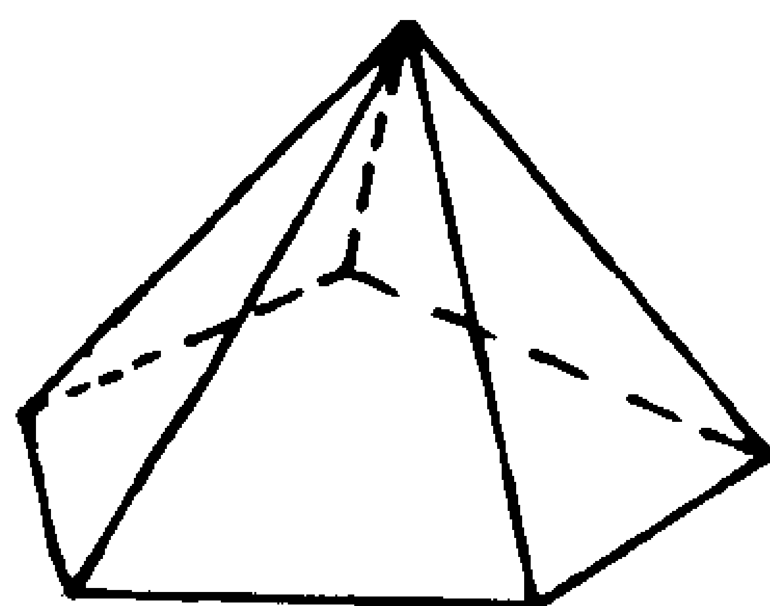


(4)

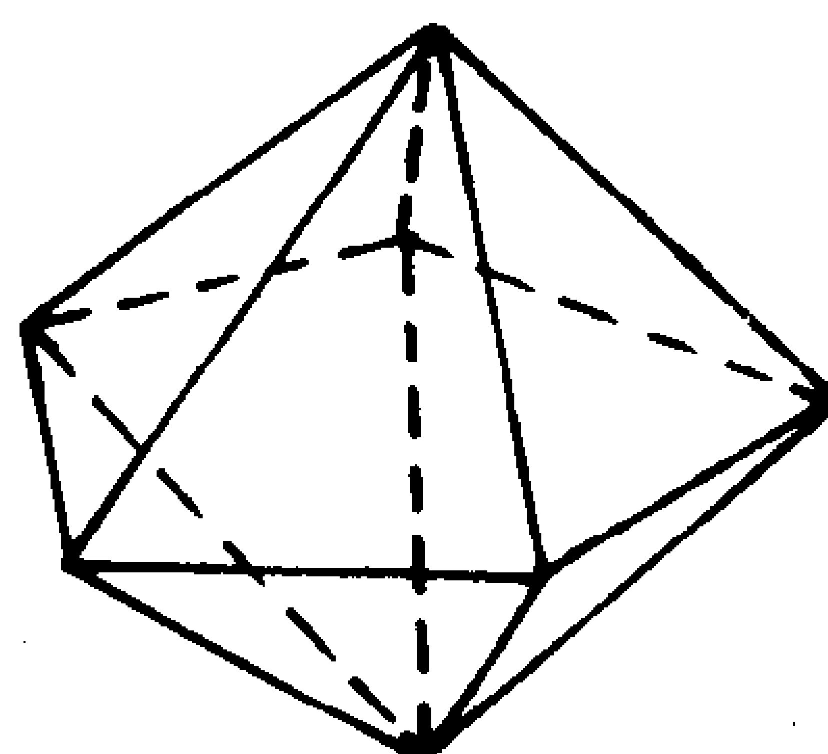


(5)

乙

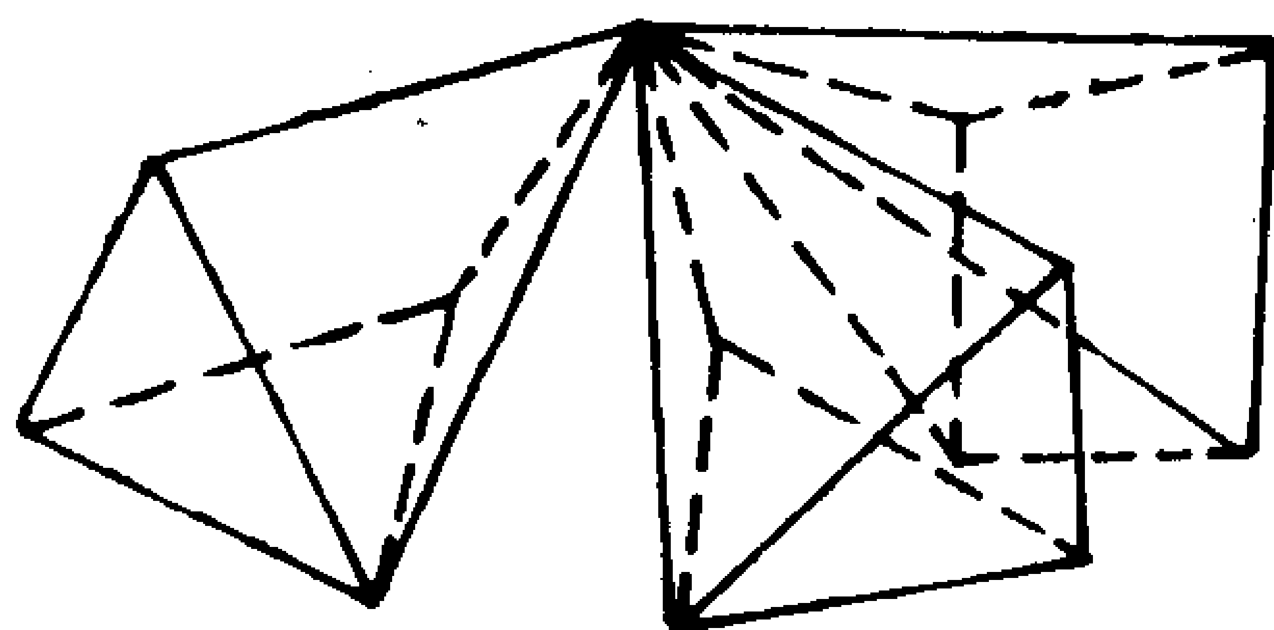


(6)

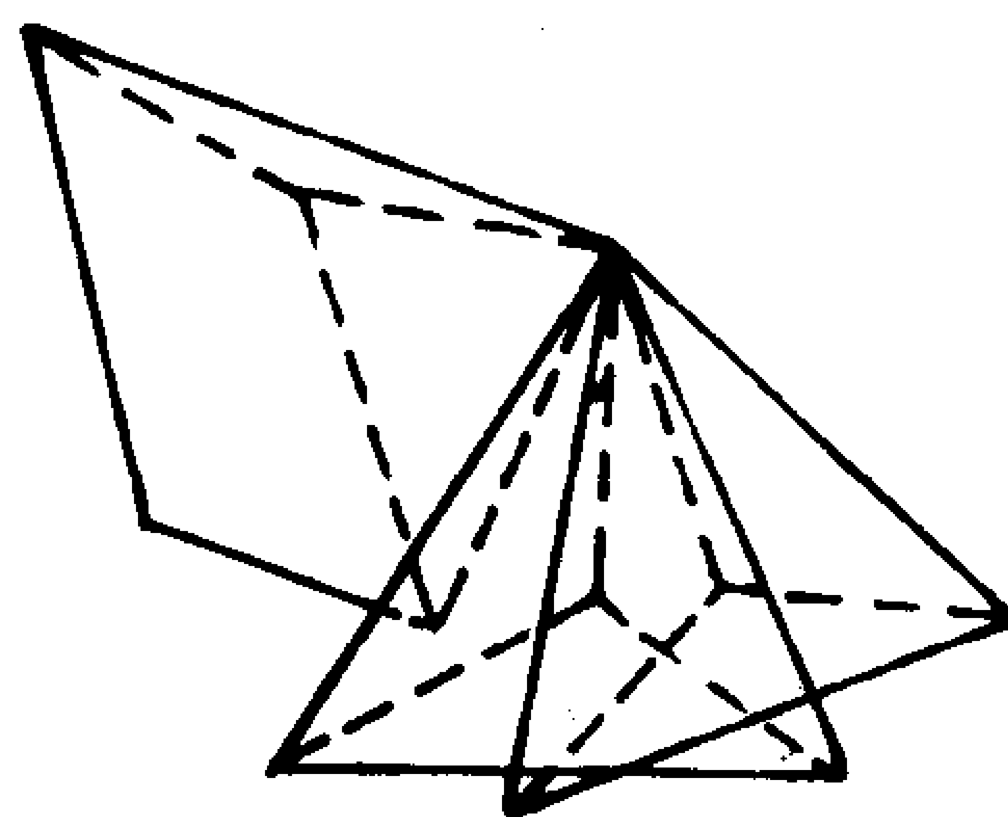


(7)

乙



(8)



(9)

乙

以上 $n=3$、4、5 的锥体各取若干个，这些锥体有公共棱锥顶点且侧棱相等时，所有顶点构成空间一阶祖氏集(为正三角形绕一顶点旋转的特例).

如图乙$_{(8)}$、乙$_{(9)}$.

由命题 5 及以上诸例，易得

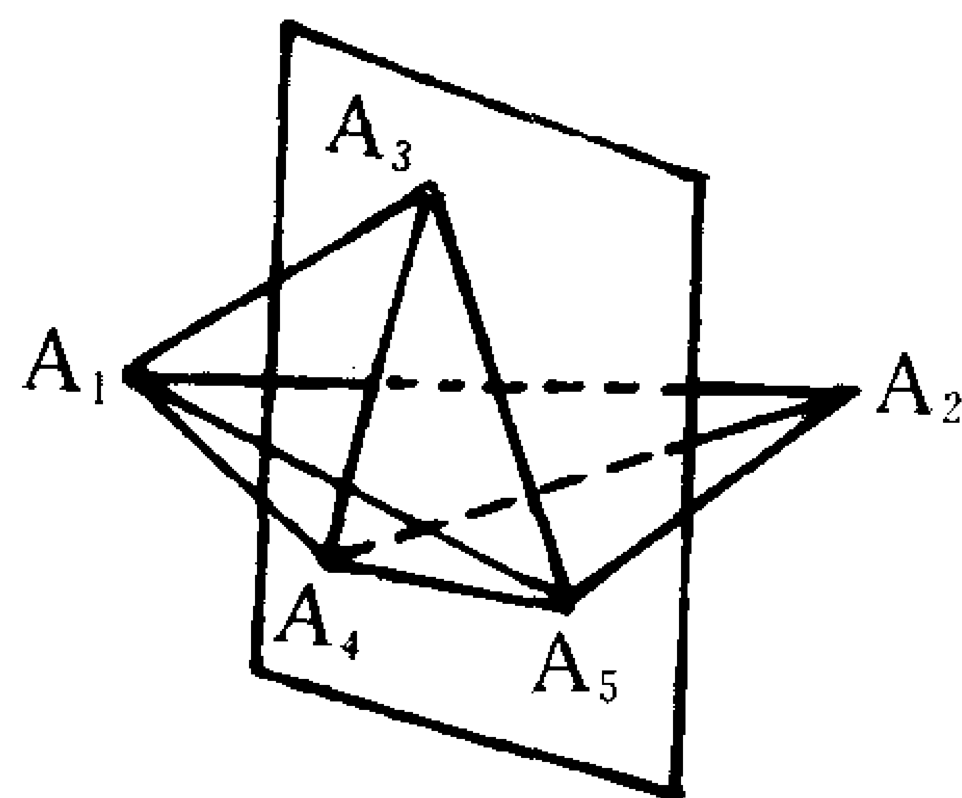
命题 6 一阶空间祖氏有限 $n(n\in N, n\geqslant 3)$ 点集皆存在.

命题 7 二阶空间祖氏有限 $n(n\in N, n\geqslant 4)$ 点集皆存在.

那么三阶及其以上各阶的空间祖氏有限点集存在吗?

命题 8 三阶及其以上各阶的空间祖氏有限集不存在.

证明 由定义，该点集中任意两点(不妨设为 A_1、A_2)的中垂面上至少有该点集中的三点，显然这些点不同于 A_1、A_2. 不妨设为 A_3, A_4, A_5，这样至少要新增 A_1A_3、A_1A_4 等 9 条线段，而这每条线段的中垂面上要满足有该点集的至少 3 点，需新增点，这样又要新增线段，其中，新增非平行线段的中垂面必不同，又会新增点，如此下去，该点集发散，不可能为有限集. □



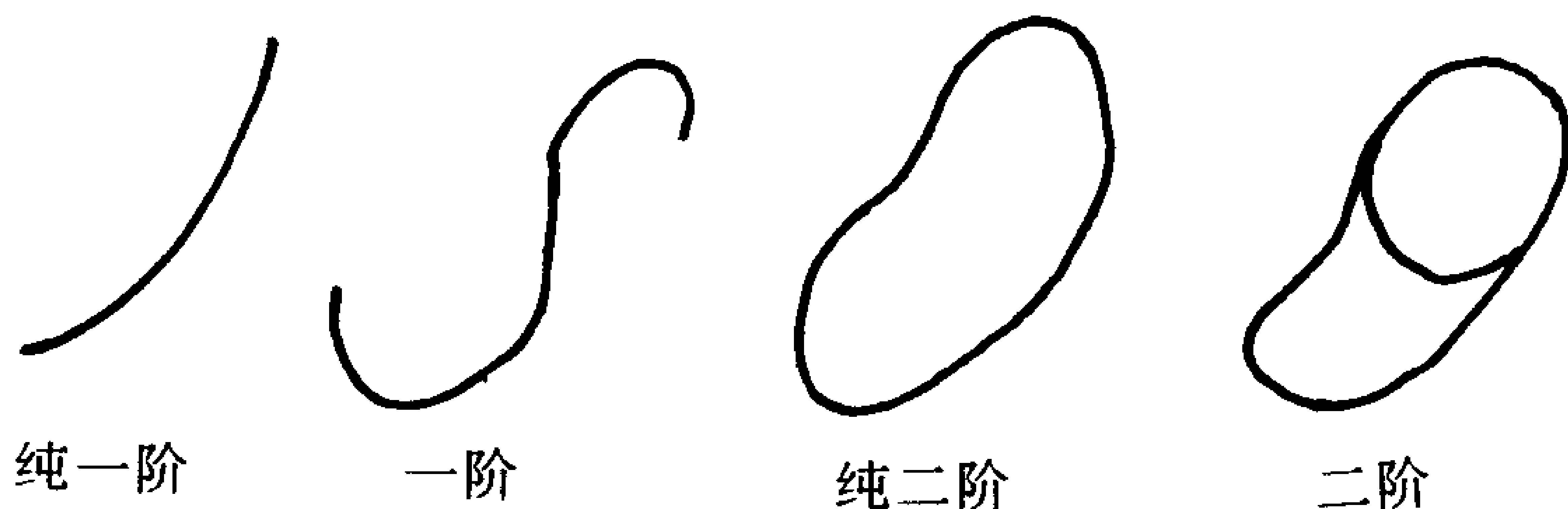
对空间祖氏无限集，我们还有:

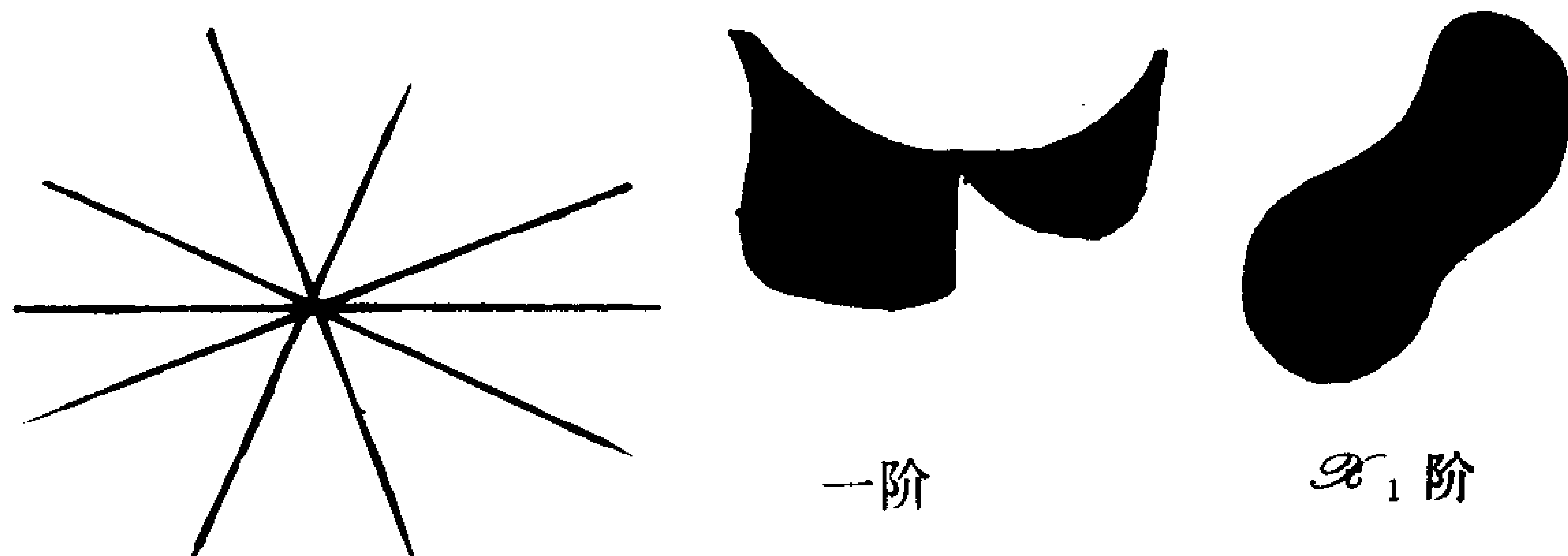
空间直线(射线、线段)上的有理点的中点必为相应直线(射线、线段)上的有理点构成空间纯一阶祖氏 $\mathscr{X}_0$ 点集;类似地，空间有理数集 Q^2、Q^3 都构成空间纯 $\mathscr{X}_0$ 阶祖氏 $\mathscr{X}_0$ 点集.

将命题 3 中一般 $k(1\leqslant k\leqslant \mathscr{X}_0)$ 阶的构造方法，拿到空间来构造，可得空间(纯)k 阶祖氏 $\mathscr{X}_0$ 点集.

空间任一条连续曲线，其上的点构成空间一阶或二阶祖氏 $\mathscr{X}_0$ 点集.

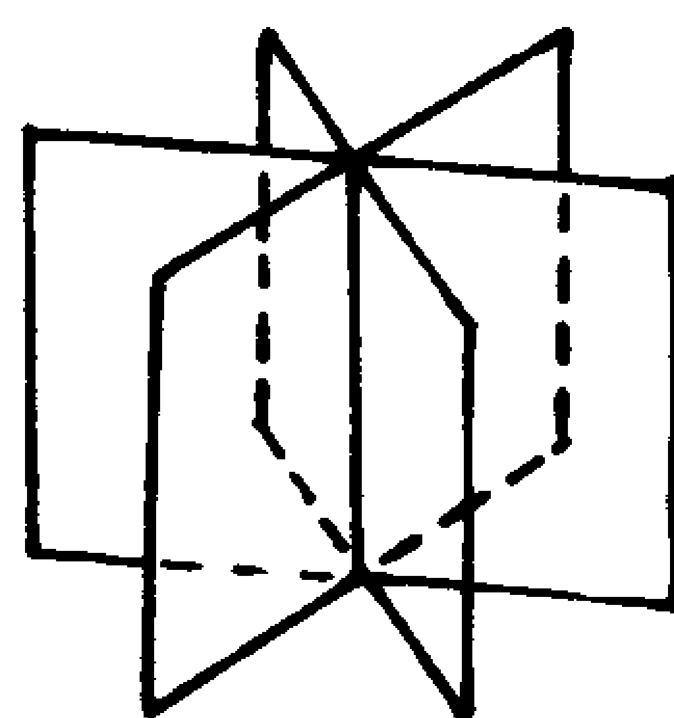
空间过一点的直线束，其上的点构成空间一阶祖氏 $\mathscr{X}_1$ 点集.



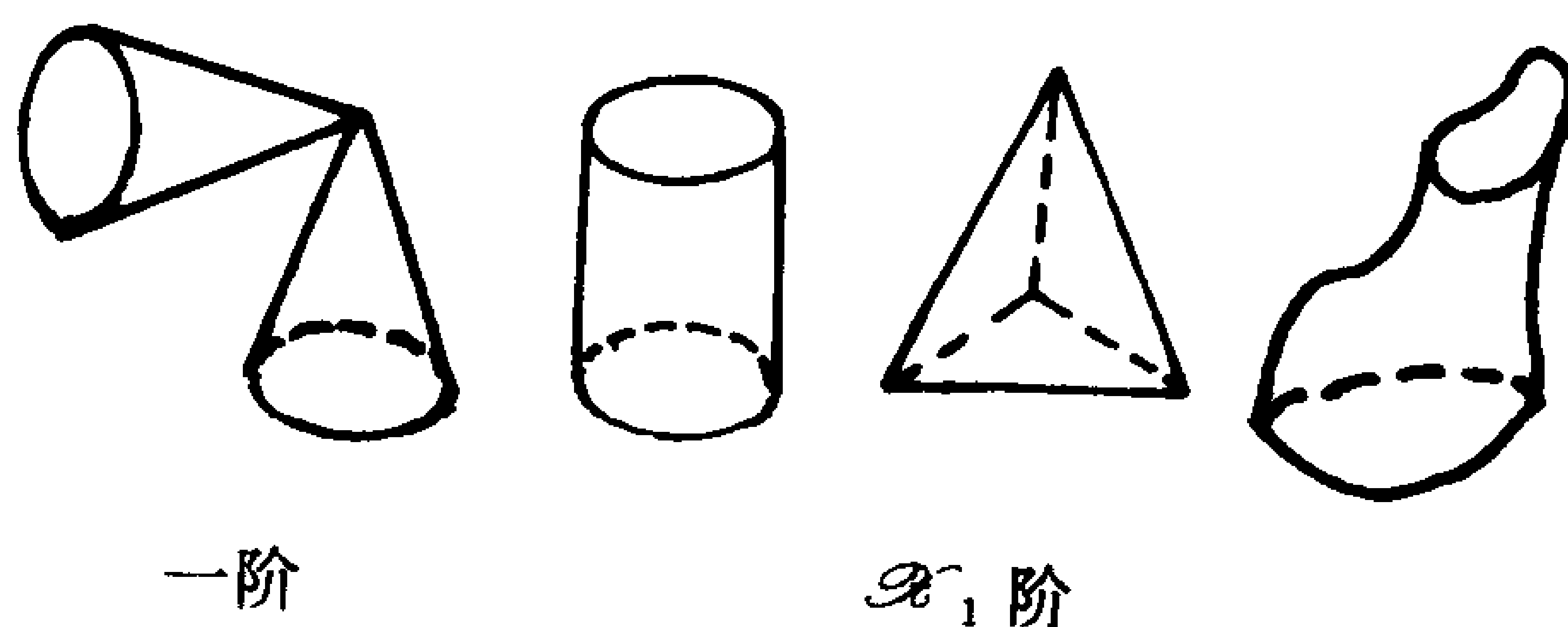


空间任一连通曲面，其上的点构成空间一阶或 $\mathscr{X}_1$ 阶祖氏 $\mathscr{X}_1$ 点集.

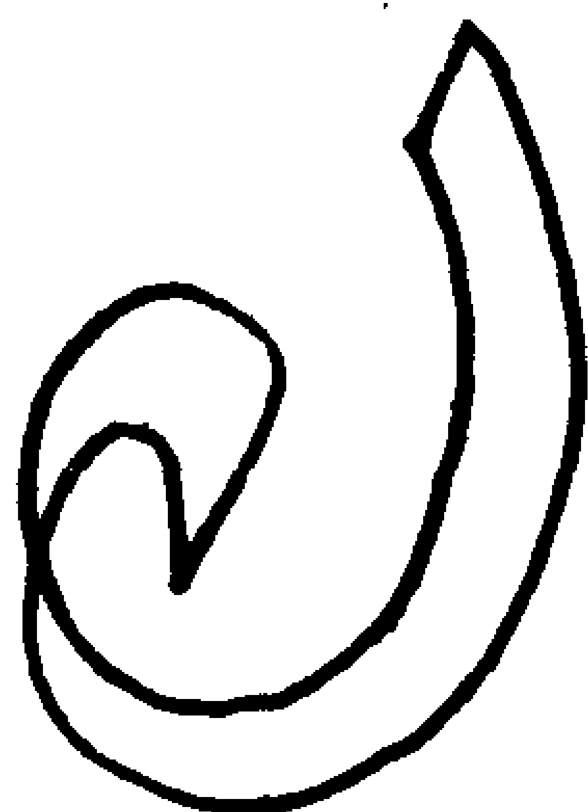
空间过一直线的平面束，其上的点构成空间纯 $\mathscr{X}_1$ 阶祖氏 $\mathscr{X}_1$ 点集.

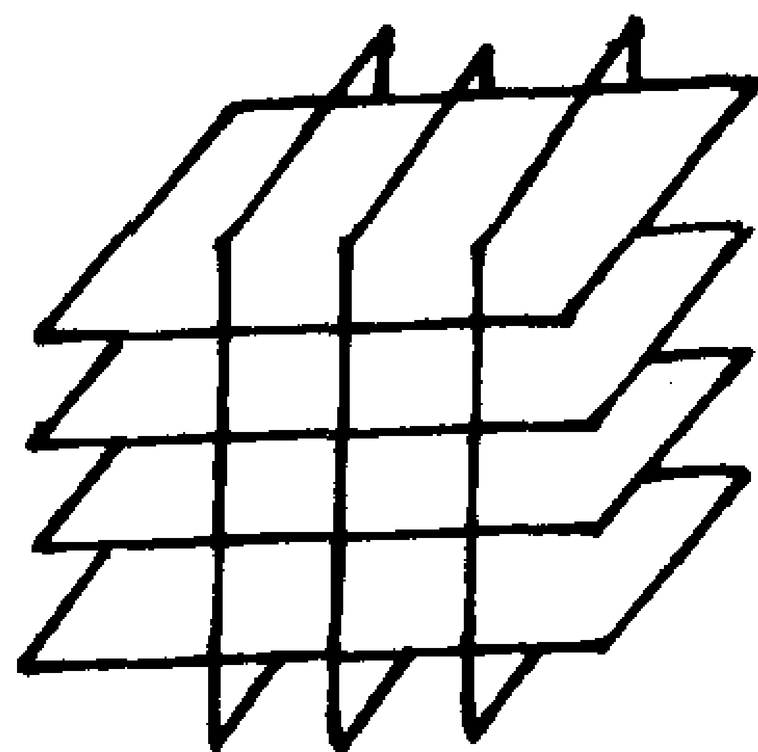


空间任一连通体，其上的点构成一阶或 $\mathscr{X}_1$ 阶空间祖氏 $\mathscr{X}_1$ 点集.



空间螺旋曲面，其上的点构成空间纯 $\mathscr{X}_1$ 阶 $\mathscr{X}_1$ 点集.





两束各至少有几条平行直线的相交直线束，其上的点构成空间 n 阶祖氏 $\mathscr{X}_1$ 点集.

由命题 5 及以上各例，易得：

命题 9　空间一阶至 $\mathscr{X}_0$ 阶的祖氏 $\mathscr{X}_0$ 点集皆存在.

命题 10　空间一阶至 $\mathscr{X}_1$ 阶的祖氏 $\mathscr{X}_1$ 点集皆在在.

编者注　所谓“平面二阶祖冲之点集”的存在性问题是由 Croft 提出的，并由 Kelly 首先解决，见[6].

参考文献

[1]　徐琳，祖冲之点集初探，《中学数学》(武汉)，1991 年第 6 期，29 — 30.

[2]　岳建良，祖冲之十点集，《中学数学教学参考》，1991 年第 5 期.

[3]　岳建良，罗增儒，“祖冲之点集”存在性的扇形解决，《数学通讯》，1991 年第 4 期，32，37.

[4]　徐琳，关于祖冲之点集的一点探讨，《中国中学教师优秀论文集》，第一卷，首都师范大学出版社，1994 年，286—290.

[5]　黄拔萃，祖冲之点集，《中学数学教学参考》，1991 年第 12 期，8 — 9，17.

[6]　H. T. Croft，K. J. Falconer，R. K. Guy，Unsolved Problems in Geometry，Springer — Verlag New York，1991，157.

短文集锦

第二类 Fibonacci 三角形的存在性

江苏溧阳职业高级中学　江　明

陈计[1]介绍了 Fibonacci 三角形(边长为 Fibonacci 数,面积为整数)的研究进展. 文[1]的猜想是:不存在以 F_n, F_{n+k}, F_{n+k} 为边长的 Fibonacci 三角形. 袁明豪[2]证明了当 $k=2$ 时上述猜想正确. 本文中,我们将证明这一猜想对 $n=3j\pm 1$ 是成立的.

引理 1　$j\in N$ 时,(1)F_{3j-2} 和 F_{3j-1} 均为奇数,F_{3j} 为偶数;(2)$F_{6j-3}=2(2p-1), p\in N; F_{6j}=8q, q\in N$.

证明　(1)$j=1$ 时,$F_1=1, F_2=1, F_3=2$,所以结论成立. 假设 $j=k$ 时结论成立,即 F_{3k-2}, F_{3k-1} 为奇数,F_{3k} 为偶数,那么 $j=k+1$ 时,$F_{3(k+1)-2}=F_{3k+1}=F_{3k}+F_{3k-1}=$ 偶数 $+$ 奇数 $=$ 奇数,

$F_{3(k+1)-1}=F_{3k+2}=F_{3k+1}+F_{3k}=$ 奇数 $+$ 偶数 $=$ 奇数,

$F_{3(k+1)}=F_{3k+3}=F_{3k+2}+F_{3k+1}=$ 奇数 $+$ 奇数 $=$ 偶数.

由数学归纳法原理可知结论对 $j\in N$ 都成立.

(2) 由 $F_{n+2}=F_{n+1}+F_n$ 易得 $F_{n+6}=8F_{n+1}+5F_n$,取 $n=6j-3$,得 $F_{6(j+1)-3}=8F_{6j-2}+5F_{6j-3}$,及 $n=6j$,得 $F_{6(j+1)}=8F_{6j+1}+5F_{6j}$.

注意到 $F_3=2\times 1, F_6=8, F_{6j-2}$ 和 F_{6j+1} 均为奇数,应用数学归纳法不难证得结论.

引理 2　整边直角三角形的三边为 a、b、c,且 $c^2=a^2+b^2$,则 c 为偶数时 a、b 均为偶数.

证明　设 $c=2r(r\in N)$,并设 $p,q\in N$,

1) 若 a、b 为一奇一偶不妨设为 $2p-1$ 和 $2q$，

则 $a^2+b^2=4(p^2-p+q^2)+1$ 为奇数，而 $c^2=4r^2$ 为偶数，故不可能.

2) 若 a、b 均为奇数，设为 $2p-1$ 和 $2q-1$，

则 $a^2+b^2=4(p^2-p+q^2-q)+2$ 不为 4 的倍数，而 $c^2=4r^2$ 为 4 的倍数，故亦不可能.

综上讨论得 a、b 只可能均为偶数. □

定理 1 当 $k\in N$ 时，不存在以 $(F_{3j-1},F_{3j+k-1},F_{3j+k-1})$ 或 $(F_{3j-2},F_{3j+k-2},F_{3j+k-2})$ 为边长的 Fibonacci 三角形.

证明 设 h 为底边上的高，对 Heron 三角形而言，h 必为整数，且 $F_{3j-1}^2=4F_{3j+k-1}^2-4h^2$ 及 $F_{3j-2}^2=4F_{3j+k-2}^2-4h^2$ 成立，

由引理 1(1) 得上两式左端均为奇数的平方即仍是奇数，而右端都是偶数，故不能成立，产生矛盾. □

定理 2 当 $j\in N$ 时，不存在以 (F_{6j-3},F_{6j},F_{6j}) 为边长的 Fibonacci 三角形.

证明 设 h 为底边上的高，对 Heron 三角形而言 h 必为整数，且有 $4h^2=4F_{6j}^2-F_{6j-3}^2$ 即 $F_{6j}^2=h^2+(\frac{1}{2}F_{6j-3})^2$. (＊)

由引理 1(2) 知 $F_{6j}=8p,\frac{1}{2}F_{6j-3}=2q-1,(p、q\in N)$ 再由 (＊) 和引理 2 知 $C=F_{6j}=8p$ 为偶数，必有 $a=h$ 和 $b=\frac{1}{2}F_{6j-3}$ 均为偶数，产生矛盾. □

参考文献

[1] 陈计，斐波那契三角形，《数学通讯》，1994 年第 5 期，41 － 42.

[2] 袁明豪，关于 Fibonacci 三角形的一个结果，《数学通讯》，1994 年第 11 期，17 － 19.

Diophantus 方程 $x^3 + y^4 = z^4$ 和 $x^4 + y^4 = z^3$

武汉大学数学系　　曾登高

熟知，$n = 3$、4 时的 Fermat 问题首先分别由 Euler、Legendre 给出证明．最近，汤健儿[2] 又讨论了方程 $x^3 + y^3 = z^2$ 与 $x^3 + y^3 = z^4$，本文我们将讨论方程 $x^3 + y^4 = z^4$ 和 $x^4 + y^4 = z^3$ 的解，从而完善了丢番图方程 $x^a + y^b = z^c$ 在 $3 \leqslant a, b, c \leqslant 4$ 时的结论．

本文中的字母均表整数，无解是指无整数解，方程中 $(x, y, z) = 1$．

定理 1　方程 $x^3 + y^4 = z^4$ 无非平凡解．

定理 2　方程 $x^4 + y^4 = z^3$ 无非平凡解．

为证明简捷，我们引入丢番图方程理论中的几个结果：

引理 1[3]　若 $(x, y) = 1, xy \neq 0$，则方程 $3x^4 + 10x^2y^2 + 3y^4 = 3z^2$ 无解．

引理 2[4]　若 $(x, y) = 1, xy \neq 0$，则方程 $x^4 - 3y^4 = z^2$ 无解．

引理 3　方程 $x^2 + y^2 = z^3, (x, y, z) = 1$ 的全部解可表为

$$\pm x = t^3 - 3ts^2, \pm y = 3t^2s - s^3, z = s^2 + t^2,$$

其中 s、t 满足 $(s, t) = 1$．

证明　将 $x^2 + y^2 = z^3$ 化成复数域的方程

$$(x + yi)(x - yi) = z^3.$$

设 $(x + yi, x - yi) = d$（d 为复数），则 $d \mid 2$．

$d = 2$ 时，$2 \mid x, 2 \mid y$，这与 $(x, y) = 1$ 矛盾．

$d = 1 \pm i$ 时，$\dfrac{x + yi}{1 \pm i} = \dfrac{(x \pm y) + (\mp x + y)i}{2}$，这也与 $(x,$

$y) = 1$ 矛盾，故 $d = 1$，由于复数域上有素因数分解的唯一性，故有

$$x + yi = \lambda(t - si)^3,$$

λ 是复数域 $Q\sqrt{-1}$ 的单位数，即 $\lambda = \pm 1$ 或 $\pm i$，易知 λ 可并入 $(t - si)^3$ 中，故不妨设 $\lambda = 1$，从而有

$$\pm x = t^3 - 3ts^2, \pm y = 3t^2 s - s^3, z = s^2 + t^2, (s,t) = 1.$$

□

定理 1 的证明 $x^3 = z^4 - y^4 = (z^2 - y^2)(z^2 + y^2)$，
因 $(z^2 - y^2, z^2 + y^2) = 1$ 或 2，故可讨论如下：

1) $(z^2 - y^2, z^2 + y^2) = 1$ 时，

$$\begin{cases} x = ts \\ y^2 = \dfrac{t^3 - s^3}{2} \\ z^2 = \dfrac{t^3 + s^3}{2}, \end{cases} \qquad s、t \text{ 均为奇数}, (s,t) = 1.$$

即

$$\begin{cases} t + s = a_1 z_1^2 \\ t^2 - ts + s^2 = a_2 z_2^2 \\ t - s = a_3 y_1^2 \\ t^2 + ts + s^2 = a_4 y_2^2, \end{cases} \qquad (z_1, z_2) = (y_1, y_2) = 1.$$

$\because (t + s, t^2 - st + s^2) = 1$ 或 3，$(t - s, t^2 + st + s^2) = 1$ 或 3.
$\therefore a_1 a_2, a_3 a_4 = 2$ 或 18.
$\because s、t$ 为奇数，$\therefore t^2 - ts + s^2、t^2 + ts + s^2$ 均为奇数.
$\therefore y_2、z_2、a_2、a_4$ 为奇数，$\therefore a_2, a_4 = 1$ 或 3，$a_1, a_3 = 2$ 或 6. 若做变换 $s' = -s$，则易知 a_1 和 a_3、a_2 和 a_4 对调后的情况相同，又 $\because 3 \mid (t + s) \Leftrightarrow 3 \nmid (t - s)$，故 $a_1、a_2、a_3、a_4$ 的取值只能为

$$(a_1, a_2, a_3, a_4) = (2,1,2,1); (2,1,6,3).$$

i) $(a_1, a_2, a_3, a_4) = (2,1,2,1)$ 时

$$2ts = (t^2 + ts + s^2) - (t^2 - st + s^2) = y_2^2 - z_2^2 \equiv 0 \pmod 8.$$

这与 $s、t$ 均为奇数矛盾.

ii) $(a_1, a_2, a_3, a_4) = (2,1,6,3)$ 时，

由 $4z_1^4 = (t+s)^2 = 3y_2^2 - \dfrac{36y_1^4 - 3y_2^2}{3} = 4y_2^2 - 12y_1^4$ 知

$z_1^4 + 3y_1^4 = y_1^2.$

同理有 $z_1^4 + 27y_1^4 = z_2^2$，两式相乘有

$$z_1^8 + 30y_1^4 z_1^4 + 81y_1^8 = y_2^2 z_2^2,$$

即
$$3(z_1^2)^4 + 10(3y_1^2 z_1^2)^2 + 3(3y_1^2)^4 = 3(y_2 z_2)^2,$$

由引理 1 即知无解.

2) $(z^2 - y^2, z^2 + y^2) = 2$ 时，$\because 2 \mid x$，$\therefore 2 \nmid y, z$；

$\therefore y^2 + z^2 \equiv 2 \pmod 8$，故而只有

$$\begin{cases} x = 2st \\ y^2 + z^2 = 2t^3 \\ z^2 - y^2 = 4s^3, \end{cases} \qquad (s,t) = 1.$$

$\because (z - y, z + y) = 2$，$\therefore$ 有 $\begin{cases} y + z = 2s_1^3 \\ z - y = 2s_2^3. \end{cases}$

从而 $2t^3 = y^2 + z^2 = (s_1^3 + s_2^3)^2 - (s_1^3 - s_2^3)^2 = 2(s_1^6 + s_2^6)$，

即 $t^3 = (s_1^2)^3 + (s_2^2)^3$，此即 $n = 3$ 时的 Fermat 问题，故无解. □

定理 2 的证明 由引理 3 我们有

$$x^2 = |a^3 - 3ab^2|; y^2 = |3a^2 b - b^3|, \qquad (a,b) = 1,$$

由于 x、y 可变换，故不妨设 $a > b$，则 $y^2 = b(3a^2 - b^2)$，$(b, 3a^2 - b^2) = 1$ 时，$3a^2 - b^2 = y_1^2$，两边取模 3 即推出矛盾，故而 $(b, 3a^2 - b^2) = 3$，即

$$\begin{cases} b = 3y_1^2 \\ 3a^2 - b^2 = 3y_2^2. \end{cases}$$

1) $a^2 > 3b^2$ 时，由 $x^2 = a(a^2 - 3b^2)$ 及 $(a, a^2 - 3b^2) = 1$ 知

$$\begin{cases} a = x_1^2 \\ a^2 - 3b^2 = x_2^2. \end{cases}$$

故 $x_1^4 - 3y_1^4 = y_2^2$，这由引理 2 即知无解.

2) $a^2 < 3b^2$ 时，由 $x^2 = a(3a^2 - b^2)$ 及 $(a, a^2 - 3b^2) = 1$ 知 $3b^2 - a^2 = x_1^2$，两边取模 3 即推出矛盾. □

我们考虑方程 $x^a + y^b = z^c (x,y,z) = 1, 3 \leqslant a,b,c \leqslant 4$，由 x、y 可互换及 $x^3 = -(-x)^3$ 知只须考虑

$(a,b,c) = (3,3,3); (3,3,4); (3,4,4); (4,4,3); (4,4,4)$.

根据本文的研究和以前的结果我们就得到

推论 丢番图方程 $x^a + y^b = z^c$，$(x,y,z) = 1, 3 \leqslant a,b,c \leqslant 4$ 无非平凡解.

参考文献

[1] 汤健儿，$n = 3$ 时的费尔马问题，《数学通报》，1965 年第 2 期，42—44.

[2] 汤健儿，不定方程 $x^3 + y^3 = z^2$ 和 $x^3 + y^3 = z^4$，《数学的实践与认识》，1993 年第 1 期，90 — 94.

[3] T. N. Sinha, Some quartic equations with only trivial integer solutions, Math. Student, 43(1975), 61 — 64.

[4] L. J. Mordell, The diophantine equation $x^4 + my^4 = z^2$, Q. J. Math. (2), 18(1967), 1 — 6.

[5] L. J. Mordell, Diophantine equations, Academic Press, London and New York, 1969, 301 — 304.

[6] 曹珍富，《丢番图方程引论》，哈尔滨工业大学出版社，1989 年.

一道征解题的加强

中国科技大学数学系　　余红兵

《数学通讯》1992年第9期"问题征解"的第99题是：设$n \geqslant 1$，证明不定方程

$$\sum_{k=1}^{n} a_k^3 = \left(\sum_{k=1}^{n} a_k\right)^2$$

仅有一组互不相同的正整数解$\{1,2,\cdots,n\}$.

本文中，我们首先证明一个更强的结论，然后给出有关的背景评论.

定理　对任意互不相同的正整数$a_1, a_2, \cdots, a_n$，有不等式

$$\sum_{k=1}^{n} a_k^3 \geqslant \left(\sum_{k=1}^{n} a_k\right)^2,$$

等号成立的充分必要条件是$\{a_1, a_2, \cdots, a_n\} = \{1,2,\cdots,n\}$.

证明　用数学归纳法.

$n = 1$时结论显然成立，若结论对n已成立，考虑$n+1$个互不相同的正整数$a_1, \cdots, a_n, a_{n+1}$，不妨设$1 \leqslant a_1 < \cdots < a_n < a_{n+1}$. 由归纳假设，

$$\sum_{k=1}^{n} a_k^3 \geqslant \left(\sum_{k=1}^{n} a_k\right)^2. \tag{1}$$

又显然$a_n \leqslant a_{n+1} - 1$，故

$$\begin{aligned} a_{n+1}^2 + 2a_{n+1}\left(\sum_{k=1}^{n} a_k\right) &\leqslant a_{n+1}^2 + 2a_{n+1}[1 + 2 + \cdots + (a_{n+1} - 1)] \\ &= a_{n+1}^2 + (a_{n+1}^3 - a_{n+1}) = a_{n+1}^3. \end{aligned} \tag{2}$$

由(1)、(2)即得出

$$\sum_{k=1}^{n+1} a_k^3 = \sum_{k=1}^{n} a_k^3 + a_{n+1}^3$$

$$\geqslant \left(\sum_{k=1}^{n} a_k\right)^2 + a_{n+1}^2 + 2a_{n+1}\left(\sum_{k=1}^{n} a_k\right)$$

$$= \left(\sum_{k=1}^{n+1} a_k\right)^2, \tag{3}$$

综合(1)、(2) 成立等号的条件，易知当且仅当 $a_k = k(1 \leqslant k \leqslant n + 1)$ 时，不等式(3) 取得等号．□

评注　1989 年全国高中数学联赛中提出过下面的问题(第一试第五题)：

设无穷正数数列$\{a_n\}(n \geqslant 1)$，对 $n \geqslant 1$ 满足

$$\sum_{k=1}^{n} a_k^3 = \left(\sum_{k=1}^{n} a_k\right)^2,$$

则 $a_n = n\ (n \geqslant 1)$.

这个问题中不必假定 a_n 为正整数，它与文首一题具有相同的特色：从某种意义上讲，等式

$$\sum_{k=1}^{n} k^3 = \left(\sum_{k=1}^{n} k\right)^2$$

是唯一的．

上面说的两个问题较为容易．LeVeque 曾研究过另一种稍难(或许也更有意义) 的“唯一性” 问题，他证明了(见[1])

如果正整数 a, b 及 $m \geqslant 2$ 使得等式

$$\sum_{k=1}^{n} k^a = \left(\sum_{k=1}^{n} k^b\right)^m \tag{4}$$

对所有正整数 n 成立，则 $a = 3, b = 1$ 及 $m = 2$.

LeVeque 的论证(并不容易) 是由(4) 式对 $n = 2$ 成立来导出结论的，一个自然的问题(似乎并未获得解决) 是

问题　如果仅假设(4) 对某个 $n > 3$ 成立，是否能推出同样的结果？

笔者能够证明(见[2]),若(4) 对无穷多个 n 成立,则必有 $a = 3, b = 1$ 及 $m = 2$.

参考文献

[1] W. J. LeVeque, On the equation $a^x - b^y = 1$, Amer. J. Math., 74 (1952), 325 − 331.

[2] 余红兵, A note on a theorem of W. J. LeVeque,《数学研究与评论》, 1994 年第 4 期, 537 − 538.

Blanuša — Mitrinovic 问题的讨论

杭州商学院数学教研室　朱　灵

(一) 引　　言

D. Blanuša[3] 与 D. S. Mitrinović[1] 分别在 1949 年、1968 年提出了以下两个公开问题：

问题 1　确定那些具有下列性质的代数函数 $A_k(x)$，$k=2,3,\cdots$：

$$\frac{\log x}{x-1} \leqslant A_k(x) \qquad (x>0),$$

$$A_k(x) \sim x^{-\frac{1}{k}} \qquad (x \to 0^+),$$

$$xA_k(x) \sim x^{\frac{1}{k}} \qquad (x \to +\infty),$$

$$A_k(x) - \frac{\log x}{x-1} \sim a_k(x-1)^{(2k-2)} \qquad (x \to 1),$$

其中 a_k 与 x 无关.

问题 2　寻找代数函数 $A_k(x)(k=2,3,\cdots)$ 满足对于 $x>0$，$\frac{\log x}{x-1} \leqslant A_k(x)$ 且 $A_m(x) \geqslant A_n(x)(2 \leqslant m \leqslant n)$.

早在 1949 年，J. Karamata[2] 和 D. Blanuša[3] 给出 $A_2(x)$，$A_3(x)$ 和 $A_4(x)$ 的形式：

$$A_2(x) = \frac{1}{\sqrt{x}}, \qquad A_3(x) = \frac{1+\sqrt[3]{x}}{x+\sqrt[3]{x}},$$

$$A_4(x) = \frac{7+16t+7t^2}{7t-t^2+18t^3-t^4+7t^5}, \text{其中 } t=\sqrt[4]{x}.$$

D. Blanuša 指出：对于 $x>0$，有 $A_2(x) \geqslant A_3(x) \geqslant A_4(x)$.

关于问题 1，文[4] 中已给出详细的讨论．本文解决了 Mitrinović 提出的问题 2，还顺便用一函数单调性建立系列平均不等式.

(二) 一个定理

定理 令

$$G(\alpha)=\int_a^b x^{\alpha-1}dx \Big/ \int_a^b x^{\alpha}dx\,(a\neq b,a,b>0), \tag{1}$$

则 $G(\alpha)$ 是关于 α 的严格单调减少函数.

证明 事实上，若我们能证明：对于任何 $\alpha<\beta$，有

$$\int_a^b x^{\beta-1}dx\cdot\int_a^b x^{\alpha}dx<\int_a^b x^{\alpha-1}dx\cdot\int_a^b x^{\beta}dx,$$

则就完成了定理证明.

现令 $D=\int_a^b x^{\beta}dx\cdot\int_a^b x^{\alpha-1}dx-\int_a^b x^{\alpha}dx\cdot\int_a^b x^{\beta-1}dx$,

自然地 $D=\int_a^b x^{\beta}dx\cdot\int_a^b y^{\alpha-1}dy-\int_a^b y^{\alpha}dy\cdot\int_a^b x^{\beta-1}dx$,

也就是 $D=\int_a^b\int_a^b x^{\beta-1}y^{\alpha-1}(x-y)dxdy.$ (2)

同理有 $D=\int_a^b\int_a^b y^{\beta-1}x^{\alpha-1}(y-x)dxdy.$ (3)

由(2) 和(3)，我们有

$$\begin{aligned}2D&=\int_a^b\int_a^b(x-y)(x^{\beta-1}y^{\alpha-1}-x^{\alpha-1}y^{\beta-1})dxdy\\&=\int_a^b\int_a^b x^{\alpha-1}y^{\alpha-1}(x-y)(x^{\beta-\alpha}-y^{\beta-\alpha})dxdy>0,\end{aligned}$$

因此 $D>0$，由此定理获证. □

（三）"问题 2"的解决

在(1)式中，令 α 依次是 $-\frac{1}{k}(k=2,3,\cdots)$ 和 0，根据定理有

结果：$G(0)<G(-1/k) \quad (k=2,3,\cdots)$，

而且 $G(-1/m)>G(-1/n) \quad (2\leqslant m<n)$，

这里 $G(0)=(\log b-\log a)/(b-a)$，

$G(-1/k)=(k-1)(b^{1/k}-a^{1/k})/[a^{1/k}b^{1/k}(b^{(k-1)/k}-a^{(k-1)/k})]$.

然后令 $a=1, 1\neq b=x>0$，而且记

$$A_k(x)=G(-1/k),$$

则得

$$A_k(x)=(k-1)\frac{x^{\frac{1}{k}}-1}{x-x^{\frac{1}{k}}}, \quad (k=2,3,\cdots), \tag{4}$$

因此，马上有结果：

$$\frac{\log x}{x-1}<A_k(x), \quad (k=2,3,\cdots),$$

同时，$A_m(x)>A_n(x), \quad (2\leqslant m<n)$.

上述(4)式的 $A_k(x)(k=2,3,\cdots)$ 就是 Mitrinović 先生在"问题 2"中要我们寻找的代数函数.

至此，"问题 2"已顺利解决.

（四）系列平均不等式的建立

由定理，我们有

推论 令

$$F(\alpha)=\int_a^b x^\alpha dx\Big/\int_a^b x^{\alpha-1}dx \quad (a\neq b, a,b>0), \tag{5}$$

则 $F(\alpha)$ 是关于 α 的严格单调增加函数.

在(5)式中分别令

$$a=-2,-\frac{1}{2},0,\frac{1}{2},1,$$

且 $a \neq b, a, b > 0$，则由推论有

$$F(-2) < F(-\frac{1}{2}) < F(0) < F(\frac{1}{2}) < F(1), \qquad (6)$$

而 $$F(-2)=\frac{2}{\frac{1}{a}+\frac{1}{b}},\ F(-\frac{1}{2})=\sqrt{ab},\ F(0)=\frac{b-a}{\ln b-\ln a},$$

$$F(\frac{1}{2})=\frac{a+\sqrt{ab}+b}{3},\ F(1)=\frac{a+b}{2},$$

因此(6)式实际上为

$$\frac{2}{\frac{1}{a}+\frac{1}{b}} < \sqrt{ab} < \frac{b-a}{\ln b-\ln a} < \frac{a+\sqrt{ab}+b}{3} < \frac{a+b}{2}. \qquad (7)$$

这样，我们借助于一个函数的单调性，就一下子确立了调和平均、几何平均、对数平均、Heron 平均和算术平均之间的关系.

参考文献

[1] D. S. Mitrinorić, Problem 5626, Amer. Math. Monthly, 75(1968), 911 − 912.

[2] J. Karamata, Problem1, Bull. Soc. Math. Phys. Serbie, 1(1949), 77 − 78.

[3] D. Blanuša, Problem13, Bull. Soc. Math. Phys. Serbie, 1(1949), 156 − 157.

[4] I. Lazarević, A. lupas, On the approximation of the logarithmic function by sequences of algebraic functions (Ⅱ), Univ. Beograd. Publ. Elektrotehn. Fak. Ser. Mat. Fiz, 1982, 62 − 73.

一个三角形不等式的证明

福建永春县华侨中学　余丹田

1994年3月，杨学枝老师提出如下问题：

问题　设a、b、c为$\triangle ABC$的三边长，证明或否定：

$$12\sum\frac{a}{b+c}\geqslant 18+\sum\left(\frac{b-c}{a}\right)^2.$$

本文中，我们给出了这个不等式的一种证法.

设$a\geqslant b\geqslant c$，$a=k_1c$，$b=k_2c$，$k_1\geqslant k_2\geqslant 1$，

$$12\sum\frac{a}{b+c}-18=12\sum\frac{2a-(b+c)}{2(b+c)}$$

$$=12\left[\frac{(c-a)+(c-b)}{2(a+b)}+\frac{(a-b)+(a-c)}{2(b+c)}+\frac{(b-a)+(b-c)}{2(a+c)}\right]$$

$$=6(a-c)\left(\frac{1}{b+c}-\frac{1}{a+b}\right)+6(b-c)\left(\frac{1}{a+c}-\frac{1}{a+b}\right)+6(a-b)\left(\frac{1}{b+c}-\frac{1}{a+c}\right)$$

$$=\frac{6(a-c)^2}{(b+c)(a+b)}+\frac{6(b-c)^2}{(a+c)(a+b)}+\frac{6(a-b)^2}{(b+c)(a+c)}.$$

因为$b+c>a$，所以$k_2+1>k_1$，

$$\frac{6(b-c)^2}{(a+c)(a+b)}=\frac{6(b-c)^2}{\left(1+\frac{1}{k_1}\right)\left(1+\frac{k_2}{k_1}\right)a^2}$$

$$\geqslant\frac{3(b-c)^2}{2a^2}\geqslant\frac{(b-c)^2}{a^2}.$$

$$\frac{6(a-c)^2}{(b+c)(a+b)}=\frac{6(a-c)^2}{\left(1+\frac{1}{k_2}\right)\left(1+\frac{k_1}{k_2}\right)b^2}$$

$$\geqslant\frac{6(a-c)^2}{\left(1+\frac{1}{k_2}\right)\left(2+\frac{1}{k_2}\right)b^2}\geqslant\frac{(a-c)^2}{b^2}.$$

若能证明

$$\frac{6(a-c)^2}{(b+c)(a+b)}+\frac{6(a-b)^2}{(b+c)(a+c)}\geqslant\frac{(a-c)^2}{b^2}+\frac{(a-b)^2}{c^2},$$

则 $12\sum\frac{a}{b+c}\geqslant 18+\sum\left(\frac{b-c}{a}\right)^2$ 成立.

引理 若 a、b、c 为 $\triangle ABC$ 的三边长，且 $a\geqslant b\geqslant c$，则

$$\frac{(a-c)^2}{b^2}\geqslant\frac{(a-b)^2}{c^2}.$$

证明 因为 $k_2^2-k_1k_2+k_1-1\geqslant 0$. （$\varDelta=k_1^2-4k_1+4\geqslant 0$）

所以 $k_1-1\geqslant k_1k_2-k_2^2$,

$$\frac{k_1-1}{k_2}\geqslant k_1-k_2.$$

即 $1>\frac{a-c}{b}\geqslant\frac{a-b}{c}\geqslant 0.$

所以 $\frac{(a-c)^2}{b^2}\geqslant\frac{(a-b)^2}{c^2}.$ □

由引理，

$$\frac{6(a-c)^2}{(b+c)(a+b)}+\frac{6(a-b)^2}{(a+c)(b+c)}-\frac{(a-c)^2}{b^2}$$

$$=\left[\frac{6}{\left(1+\frac{1}{k_2}\right)\left(1+\frac{k_1}{k_2}\right)}-1\right]\cdot\frac{(a-c)^2}{b^2}$$

$$+\frac{6}{(k_1+1)(k_2+1)}\cdot\frac{(a-b)^2}{c^2}$$

$$\geqslant\left[\frac{6k_2^2}{(k_2+1)(2k_2+1)}-1+\frac{6}{(k_2+2)(k_2+1)}\right]$$

$$\cdot\frac{(a-b)^2}{c^2}.$$

设 $f(x)=\frac{6x^2}{(x+1)(2x+1)}+\frac{6}{(x+2)(x+1)}-1,\quad(x\geqslant1)$

$$f'(x)=\frac{12x(2x+1)(x+1)-6x^2(4x+3)}{(2x+1)^2(x+1)^2}-\frac{6(2x+3)}{(x+1)^2(x+2)^2}$$

$$=\frac{18(x^4+2x^3-2x-1)}{(x+1)^2(x+2)^2(2x+1)^2}\geqslant0.$$

即 $f(x)$ 单调递增. 但 $f(1)=1, f(x)\geqslant1$, 所以

$$\frac{6(a-c)^2}{(b+c)(a+b)}+\frac{6(a-b)^2}{(a+c)(b+c)}-\frac{(a-c)^2}{b^2}\geqslant\frac{(a-b)^2}{c^2},$$

从而 $12\sum\frac{a}{b+c}\geqslant18+\sum\left(\frac{b-c}{a}\right)^2$ 成立.

一个几何不等式的加强(一)

福建福州市第二十四中学　　杨学枝

陈计[1]给出了在同一个三角形中,边长 a、b、c 与其外接圆半径 R、内切圆半径 r 之间关系的两个很好的不等式:

$$\frac{11\sqrt{3}}{5R+11r} \leqslant \frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{1}{c} \leqslant \frac{1}{\sqrt{3}}\left(\frac{5}{4R}+\frac{7}{8r}\right),$$

当且仅当此三角形为正三角形时,上式两边的等号成立.

本文将进一步加强上述不等式,得到以下

定理 1　设 $\triangle ABC$ 的三边长为 a、b、c,其外接圆半径与内切圆半径分别为 R 与 r,则

$$\frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{1}{c} \leqslant \frac{\sqrt{(R+r)(R+2r)}}{2Rr}, \tag{1}$$

当且仅当 $\triangle ABC$ 为正三角形时,(1) 式取等号.

定理 2　设 $\triangle ABC$ 的三边长为 a、b、c,其外接圆半径与内切圆半径分别为 R 与 r,则

$$\frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{1}{c} \geqslant \frac{243\sqrt{3}}{110R+266r}, \tag{2}$$

当且仅当 $\triangle ABC$ 为正三角形时,(2) 式取等号.

为证明上述两个定理,我们先给出以下几个引理.

引理 1　设 $\triangle ABC$ 的三边长为 a、b、c,其外接圆半径与内切圆半径分别为 R 与 r,记 $a+b+c=6\sqrt{3}y\cdot r$,$R=2x\cdot r$,则

$$\frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{1}{c}=\frac{27y^2+8x+1}{24\sqrt{3}xy\cdot r}. \tag{3}$$

(3) 式的证明可参见文[2].

引理 2 在 $\triangle ABC$ 中，同引理 1 条件有

$$\text{i)}\ 27y^2 \leqslant 8x^2 + 20x - 1 + 8(x-1)\sqrt{x(x-1)};\quad(4)$$

$$\text{ii)}\ 27y^2 \geqslant 8x^2 + 20x - 1 - 8(x-1)\sqrt{x(x-1)},\quad(5)$$

当且仅当 $\triangle ABC$ 为等腰三角形，且底边长不大于腰长时，(4) 式取等号，腰长不大于底边长时，(5) 式取等号.

(4)、(5) 两式是两个十分有用的关于三角形的不等式. 其证明可参见文[2]，不难验证其取等号条件.

引理 3 在 $\triangle ABC$ 中，同引理 1 条件，记 $u = 27y^2, f(u) = u + \dfrac{(8x+1)^2}{u}$，则

$$\text{i)}\ f(u) \leqslant f(8x^2 + 20x - 1 + 8(x-1)\sqrt{x(x-1)});\quad(6)$$

$$\text{ii)}\ f(u) \geqslant f(8x^2 + 20x - 1 - 8(x-1)\sqrt{x(x-1)});\quad(7)$$

(6)、(7) 两式取等号条件分别与(4)、(5) 两式同.

应用引理 2 并注意 $x \geqslant 1$，易证(6)、(7) 两式.

引理 4 在 $\triangle ABC$ 中，同引理 1 条件，另 $m \in R^+$，则

$$2\sqrt{x(x-1)} \leqslant \left(m + \frac{1}{m}\right)x - m,\quad(8)$$

当且仅当 $x = \dfrac{m}{m^2-1}$ 时，(8) 式取等号.

证明 由 $\left(m + \dfrac{1}{m}\right)x - m - 2\sqrt{x(x-1)} = \left[\sqrt{m(x-1)} - \sqrt{\dfrac{x}{m}}\right]^2 \geqslant 0$，即知(8) 式成立. □

下面我们来证明上述两个定理.

定理 1 的证明

$$\left(\frac{1}{a} + \frac{1}{b} + \frac{1}{c}\right)^2 = \left(\frac{27y^2 + 8x + 1}{24\sqrt{3}\,xyr}\right)^2 \text{（据引理 1）}$$

$$= \frac{1}{64x^2r^2}\left[27y^2 + \frac{(8x+1)^2}{27y^2} + 2(8x+1)\right]$$

$$\leqslant \frac{1}{64x^2r^2}\left[8x^2+20x-1+8(x-1)\sqrt{x(x-1)}\right.$$

$$\left.+\frac{(8x+1)^2}{8x^2+20x-1+8(x-1)\sqrt{x(x-1}}+2(8x+1\right]$$

(据引理 3 中的(6) 式)

$$=\frac{1}{64x^2r^2}\left[8x^2+36x+1+8(x-1)\sqrt{x(x-1)}\right.$$

$$\left.+\frac{8x^2+20x-1-8(x-1)\sqrt{x(x-1)}}{8x+1}\right]$$

$$=\frac{4x^2+19x+4+4(x-1)\sqrt{x(x-1)}}{4x(8x+1)\cdot r^2}$$

$$=\frac{4x^2+6x+2}{16x^2\cdot r^2}-\frac{(x-1)[8x^2-4x-1-8x\sqrt{x(x-1)}]}{8x^2(8x+1)\cdot r^2}$$

$$=\frac{4x^2+6x+2}{16x^2\cdot r^2}-\frac{x-1}{8x^2[8x^2-4x-1+8x\sqrt{x(x-1)}]\cdot r^2}$$

$$\leqslant\frac{4x^2+6x+2}{16x^2\cdot r^2}(注意到\ x\geqslant 1!)$$

$$=\frac{(2x+1)(2x+2)}{16x^2r^2}=\frac{(R+r)(R+2r)}{4R^2\cdot r^2},$$

即得

$$\frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{1}{c}\leqslant\frac{\sqrt{(R+r)(R+2r)}}{2Rr},$$

并从证明中可知，当且仅当 $\triangle ABC$ 为正三角形时，(1) 式取等号. □

由于 $R\geqslant 2r$，不难证得

$$\frac{\sqrt{(R+r)(R+2r)}}{2Rr}\leqslant\begin{cases}\dfrac{\sqrt{R(R+4r)}}{2Rr}; \\ \dfrac{1}{\sqrt{3}}\left(\dfrac{5}{4R}+\dfrac{7}{8r}\right),\end{cases}$$

因此，可分别由定理 1 得到

推论 1 在 $\triangle ABC$ 中，同定理 1 条件，则

$$\frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{1}{c}\leqslant\frac{\sqrt{R(R+4r)}}{2Rr},\tag{9}$$

当且仅当 $\triangle ABC$ 为正三角形时,(9) 式取等号.

推论 2 在 $\triangle ABC$ 中,同定理 1 条件,则

$$\frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{1}{c}\leqslant\frac{1}{\sqrt{3}}\left(\frac{5}{4R}+\frac{7}{8r}\right),\tag{10}$$

当且仅当 $\triangle ABC$ 为正三角形时,(10) 式取等号.

(9) 式即为文[1]中周才凯老师给出的结果,(10) 式即为本文开头提到的一个不等式,显然,它较之更强.

为明确(2) 式的来源,以及获得较(2) 式更为丰富的信息,对定理 2,我们采用探索式证明方法.

设参数 p、$q\in R^+$,使之满足

$$\frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{1}{c}\geqslant\frac{(p+q)\sqrt{3}}{pR+2qr},\tag{①}$$

下面我们来寻找这种 p、q 值,由于

$$\left(\frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{1}{c}\right)^2=\left(\frac{27y^2+8x+1}{24\sqrt{3}\,xy\cdot r}\right)^2$$

(据引理 1)

$$=\frac{1}{64x^2\cdot r^2}\left[27y^2+\frac{(8x+1)^2}{27y^2}+2(8x+1)\right]$$

$$\geqslant\frac{1}{64x^2\cdot r^2}\left[8x^2+20x-1-8(x-1)\sqrt{x(x-1)}\right.$$

$$\left.+\frac{(8x+1)^2}{8x^2+20x-1-8(x-1)\sqrt{x(x-1)}}+2(8x+1)\right]$$

(据引理 3 中的(7) 式)

$$=\frac{1}{64x^2\cdot r^2}\left[8x^2+36x+1-8(x-1)\sqrt{x(x-1)}\right.$$

$$\left.+\frac{8x^2+20x-1+8(x-1)\sqrt{x(x-1)}}{8x+1}\right]$$

$$=\frac{4x^2+19x+4-4(x-1)\sqrt{x(x-1)}}{4x(8x+1)\cdot r^2}$$

$$= \frac{3}{4x \cdot r^2} + \frac{(x-1)[4x-1-4\sqrt{x(x-1)}]}{4x(8x+1) \cdot r^2};$$

又由于

$$\left[\frac{(p+q) \cdot \sqrt{3}}{R+2qr}\right]^2 = \frac{3}{4x \cdot r^2} - \frac{3(x-1)(p^2x-q^2)}{4x(px+q)^2 \cdot r^2},$$

由此可知,要使 ① 式成立,只需使

$$\frac{4x-1-4\sqrt{x(x-1)}}{8x+1} + \frac{3(p^2x-q^2)}{(px+q)^2} > 0. \qquad ②$$

以下分两种情况,探讨 ② 式成立的条件.

情况 1:若 $p^2x \geqslant q^2$,则

$$\frac{3(p^2x-q^2)}{(px+q)^2} \geqslant 0.$$

又由 $x \geqslant 1$,有

$$\frac{4x-1-4\sqrt{x(x-1)}}{8x+1} = \frac{1}{4x-1+4\sqrt{x(x-1)}} > 0,$$

故知在 $p^2x \geqslant q^2$ 情况下 ② 式成立.

情况 2:若 $p^2x < q^2$,据引理 4,设 $m > 0$,则有

$$\frac{4x-1-4\sqrt{x(x-1)}}{8x+1} \geqslant \frac{4x-1-2(m+\frac{1}{m})x+2m}{8x+1}$$

$$= \frac{(2m^2-m)-2(m-1)^2x}{m(8x+1)}.$$

因此,在这种情况下,要使 ② 成立,只需

$$\frac{(2m^2-m)-2(m-1)^2x}{m \cdot (8x+1)} + \frac{3(p^2x-q)}{(px+q)^2} \geqslant 0,$$

即去分母,经整理后得到的

$$2(m-1)^2p^2x^3 - [(2m^2+23m)p - 4(m-1)^2pq]x^2 + [-3mp^2 - 2(2m^2-m)pq + 2(m^2+10m+1)q^2]x - 2(m^2 - 2m)q^2 \leqslant 0.$$

上式经改写得到

$$(p^2x-q^2) \cdot [2(m-1)^2x^2 - 2(m^2-4m+1)x + 2(m^2$$

$-2m)]-\{[(-2m^2+31m-2)p^2-4(m-1)^2pq-2(m-1)^2q^2]x^2-[2(-m^2+14m)q^2-2(2m^2-m)pq-(2m^2-m)p^2]x\}\leqslant 0.$ ③

由于我们假设 $p^2x-q^2<0$，又由 $x\geqslant 1$ 易知 $(m-1)^2x^2-(m^2-4m+1)x+(m^2-2m)\geqslant 0$，因此，③ 式中

$$(p^2x-q^2)[2(m-1)^2x^2-2(m^2-4m+1)x+2(m^2-2m)]\leqslant 0.$$

由此可知，如果我们取适当值 $m>0$，使得下式成立：

$$(-2m^2+31m-2)p^2-4(m-1)^2pq-2(m-1)^2q^2$$
$$=2(-m^2+14m)q^2-2(2m^2-m)pq-(2m^2-m)p^2\geqslant 0, \quad ④$$

那么 ③ 式中左端的花括号内的值不为负，因此，此时 ③ 式成立.

由 ④ 可得到

$$(15m-1)p^2+(3m-2)pq-(12m+1)q^2=0,$$

即

$$(p+q)[(15m-1)p-(12m+1)q]=0,$$

由于 p、$q\in R^+$，因此

$$(15m-1)p-(12m+1)q=0,$$

即

$$q=\frac{15m-1}{12m+1}p. \quad ⑤$$

同时，由 ④ 还得到

$$2(-m^2+14m)q^2-2(2m^2-m)pq-(2m^2-m)p^2\geqslant 0.$$

注意到 $m>0$，并将 ⑤ 代入，经整理得

$$1458m^3-6804m^2+874m-27\leqslant 0. \quad ⑥$$

易知函数 $f(m)=1458m^3-6804m^2+874m-27$. 当 $m>0$ 时为增函数，且算得 $f(4.53)<0$，$f(4.54)>0$，由此知方程 $f(m)=0$ 在 $(4.53,4.54)$ 上必有一正根，设此正根为 m_0，则 m_0 显然满足 ⑤、⑥ 式，即取 p、q，满足

$$q=\frac{15m_0-1}{12m_0+1}p$$

时，② 式成立，从而 ① 式也成立. 若将 ① 式中的 p、q 值换作 m_0 得到

$$\frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{1}{c}\geqslant\frac{27\sqrt{3}\,m_0}{(12m_0+1)R+2(15m_0-1)r}.$$

若取 m_1，使得 $\frac{1}{15}<m_1\leqslant m_0$，则 m_1 必满足 ⑤、⑥ 两式，且易证

$$\frac{27\sqrt{3}\,m_0}{(12m_0+1)R+(15m_0-1)r}\geqslant\frac{27\sqrt{3}\,m_1}{(12m_1+1)R+2(15m_1-1)r},$$

因此，总有

$$\frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{1}{c}\geqslant\frac{27\sqrt{3}\,m_1}{(12m_1+1)R+2(15m_1-1)r}. \qquad ⑦$$

取 $m_1=\frac{9}{2}$ 代入 ⑦ 式，即得(2) 式. 由上述证明过程可知，当且仅当 $\triangle ABC$ 为正三角形时 ⑦ 式取等号，从而(2) 也取等号. □

由 ⑦ 我们可以得到一连串不等式，如

$$\frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{1}{c}$$

$$\geqslant\frac{243\sqrt{3}}{110R+266r}\geqslant\frac{108\sqrt{3}}{49R+118r}\geqslant\frac{11\sqrt{3}}{5R+12r}.$$

由此可知，(2) 式是本文开头所提到的其中一个不等式的加强.

参考文献

[1] 陈计，关于一个几何不等式的探讨(一)，《福建中学数学》，1993 年第 6 期，10 — 11.

[2] 杨学枝，一类三角不等式的统一证法，《数学竞赛》(19)，湖南教育出版社，1994 年，24 — 40.

一个几何不等式的加强(二)

浙江宁波市贵驷中学　陈　琦

石世昌在文[1]中,将$\triangle ABC$中的常见不等式

$$\frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{1}{c}\leqslant\frac{\sqrt{3}}{2r} \tag{①}$$

加强为

$$\sqrt{3}\left(\frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{1}{c}\right)\leqslant\frac{1}{r}+\frac{1}{R}. \tag{②}$$

这是刘健在文[2]末提出的猜想之一,黄西灵在文[3]中,提出考虑如下的不等式:

$$\sqrt{3}\left(\frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{1}{c}\right)$$
$$\leqslant\frac{1}{r}+\frac{1}{R}+\frac{1}{k}\left(\frac{2}{R}-\frac{1}{r}\right). \tag{③}$$

令$(A,B,C)=(14.94°,82.53°,82.53°)$,可知:

$k>7.69464417$.

陈计在文[4]中已证:当$k=8$时,③式成立.由$R\geqslant 2r$知:k越小,③式越强.本文中,我们用完全初等的方法来证明:当$k=7.7$时,③式也成立.

定理　设$\triangle ABC$的三边长为a,b,c,外接圆和内切圆的半径为R和r,则

$$\sqrt{3}\left(\frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{1}{c}\right)\leqslant\frac{67R+97r}{77Rr}, \tag{④}$$

等号成立当且仅当$\triangle ABC$是正三角形.

证明　设s为$\triangle ABC$的半周长,由三角形恒等式

$$\frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{1}{c}=\frac{s^2+r^2+4Rr}{4sRr},$$

④ 等价于

$$77\sqrt{3}(s^2+r^2+4Rr)\leqslant 4s(67R+97r),$$

即

$$H(s^2)\equiv 17787(s^2+r^2+4Rr)^2-16s^2(67R+97r)^2$$

$$=17787s^4-s^2(71824R^2+65672Rr+114970r^2)$$

$$+17787(4Rr+r^2)^2\leqslant 0. \quad ⑤$$

$\triangle ABC$ 的垂心 H，外心 O 和内心 I 构成的 $\triangle OIH$ 的面积 $S_{\triangle OIH}$ 由 Lemoine 公式给出：

$$16S^2_{\triangle OIH}=(b-c)^2(c-a)^2(a-b)^2/(2r)^2$$

$$=-s^4+2s^2(R^2+10Rr-r^2)-r(4R+r)^3,$$

所以，要证 ⑤ 式，只须证：

$$G(s^2)\equiv H(s^2)+284592S^2_{\triangle OIH}$$

$$=s^2(-676R^2+290068Rr-150544r^2)$$

$$-71148Rr(4R+r)^2\leqslant 0. \quad ⑥$$

当 $R/r\geqslant(72517+\sqrt{5233273353})/338=428\cdot575\cdots$ 时，显然有 $G(s^2)\leqslant 0$.

当 $4\leqslant R/r<(72517+\sqrt{5233273353})/338$ 时，用文[4]的不等式(17)得

$$12s^2\leqslant 49R^2+38Rr+52r^2, \quad ⑦$$

从而

$$3G(s^2)\leqslant 3G[(49R^2+38Rr+52r^2)/12]$$

$$=(49R^2+38Rr+52r^2)(-169R^2+72517Rr-37636r^2)$$

$$-213444Rr(4R+r)^2$$

$$=-8281R^4+131807R^3r-804858R^2r^2+2127272Rr^3$$

$$-1957072r^4$$

$$=-(R-2r)(8281R^3-115245R^2r+574368Rr^2$$

$$-978536r^3)$$

$$= -(R-2r)[(R-2r)(8281R^2 - 82121Rr + 245884r^2) + 5000r^2] < 0, \qquad ⑧$$

其中,最后一个不等号是因为:$82121^2 - 4 \times 8281 \times 245884 = -1400802975 < 0$.

当 $3r \leqslant R < 4r$ 时,用文[4]的不等式(23):

$$6s^2 \leqslant 25R^2 + 16Rr + 30r^2, \qquad ⑨$$

得

$$\frac{3}{2}G(s^2) \leqslant \frac{3}{2}G[(25R^2 + 16Rr + 30r^2)/6]$$
$$= (25R^2 + 16Rr + 30r^2)(-169R^2 + 72517Rr - 37636r^2) - 106772Rr(4R + r)^2$$
$$= -4225R^4 + 102669R^3r - 639474R^2r^2 + 1466612Rr^3 - 1129080r^4$$
$$= -(R-2r)(4225R^3 - 94219R^2r + 451036Rr^2 - 564540r^3)$$
$$= -(R-2r)[4225R(R-4r)^2 - 47045r(R-3r) \cdot (R-4r) - 13374Rr(R-4r) + 625Rr^2] < 0. \qquad ⑩$$

当 $2r \leqslant R < 3r$ 时,用文[4]的不等式(19):

$$2s^2 \leqslant 9R^2 + 2Rr + 14r^2, \qquad ⑪$$

得

$$\frac{1}{2}G(s^2) \leqslant \frac{1}{2}G[(9R^2 + 2Rr + 14r^2)/2]$$
$$= (9R^2 + 2Rr + 14r^2)(-169R^2 + 72517Rr - 37636r^2) - 35574Rr(4R + r)^2$$
$$= -1521R^4 + 83131R^3r - 48064R^2r^2 + 904392Rr^3 - 52690r^4$$
$$= -(R-2r)(1521R^3 - 80089R^2r + 320470Rr^2 - 263452r^3)$$
$$= -(R-2r)[1521R^2(R-2r) - 64094(R-2r)$$

$$\cdot (R-3r)-12953r(R^2-9r^2)+4535r^3] \leqslant 0. \quad ⑫$$

□

最后，我们提出 ② 式的指数推广方向：

猜想　当 $0 < m \leqslant 1$ 时，在任意 $\triangle ABC$ 中有

$$\frac{1}{a^{2m}}+\frac{1}{b^{2m}}+\frac{1}{c^{2m}} \leqslant \frac{1}{3^{m-1}(2-m)}\left[\frac{1-m}{R^{2m}}+\frac{1}{(2r)^{2m}}\right]. \quad ⑬$$

当 $m=1$ 时，⑬ 式为 Walker 不等式：

$$\frac{1}{a^2}+\frac{1}{b^2}+\frac{1}{c^2} \leqslant \frac{1}{4r^2}; \quad ⑭$$

当 $m=\frac{1}{2}$ 时，⑬ 式化为 ② 式；当 $m=\frac{1}{4}$ 时，为

$$\left(\frac{1}{\sqrt{a}}+\frac{1}{\sqrt{b}}+\frac{1}{\sqrt{c}}\right)^2 \leqslant \frac{3\sqrt{3}}{49}\left(\frac{2\sqrt{2}}{\sqrt{r}}+\frac{3}{\sqrt{R}}\right)^2. \quad ⑮$$

利用 ④ 式及 $\left(\frac{1}{\sqrt{bc}}+\frac{1}{\sqrt{ca}}+\frac{1}{\sqrt{ab}}\right)^2 \leqslant 3\left(\frac{1}{bc}+\frac{1}{ca}+\frac{1}{ab}\right)$ $=\frac{3}{2Rr}$ 容易证明 ⑮ 式.

参考文献

[1]　石世昌，一个几何不等式的加强，《福建中学数学》，1993 年第 4 期，7.

[2]　刘健，几个新的三角形不等式，《数学竞赛》，第 15 辑，湖南教育出版社，1992 年，80 — 100.

[3]　黄西灵，关于一个几何不等式的探讨(三)，《福建中学数学》，1993 年第 6 期，11.

[4]　陈计，从三角形的圆心距谈起，《数学竞赛》，第 19 辑，湖南教育出版社，1994 年，82 — 87.

关于Fermat－Torriccelli点的几个不等式

浙江杭州第十四中学　吴跃生

1967年，H. W. Guggenheimer 提出如下

命题1　设 P 为 $\triangle ABC$ 内一点，记 $PA=u, PB=v, PC=w, BC=a, CA=b, AB=c$，则

$$u+v+w<a+b+c. \tag{1}$$

1989年，单壿、刘亚强[1] 指出不等式

$$\frac{1}{m_a}+\frac{1}{m_b}+\frac{1}{m_c}\geqslant\frac{3\sqrt{3}}{s} \tag{2}$$

不成立，并将其改进为

命题2　$\frac{1}{m_a}+\frac{1}{m_b}+\frac{1}{m_c}>\frac{5}{s}$，　　(3)

其中，a,b,c 为 $\triangle ABC$ 的三边长，其对应边上的中线长为 m_a, m_b, m_c，半周长 $s=\frac{1}{2}(a+b+c)$.

1991年，安振平[2] 证明了

命题3　$\frac{1}{h_a}+\frac{1}{h_b}+\frac{1}{h_c}\geqslant\frac{3\sqrt{3}}{s}$，　　(4)

$$\frac{1}{w_a}+\frac{1}{w_b}+\frac{1}{w_c}\geqslant\frac{3\sqrt{3}}{s}, \tag{5}$$

其中 h_a, h_b, h_c 分别是边 a,b,c 上的高，w_a, w_b, w_c 分别是 $\angle A, \angle B, \angle C$ 的平分线的长，$s=\frac{1}{2}(a+b+c)$.

由命题2，[2] 还提出如下猜想：设 P 是 $\triangle ABC$ 内一点，AP、BP、CP 的延长线分别交三边于 A'、B'、C'，记 $AA'=x, BB'=y$，

$CC' = z$,证明或否定:

$$\frac{1}{x}+\frac{1}{y}+\frac{1}{z}>\frac{5}{s}. \tag{6}$$

1992 年,周德丰[3] 指出(6) 不成立,并将其改进为

命题 4 $\frac{1}{x}+\frac{1}{y}+\frac{1}{z}>\frac{3}{s}.$ (7)

综上所述,对 $\triangle ABC$ 内一点 P,当 P 是 $\triangle ABC$ 的垂心或内心时,不等式的下确界为 $\frac{3\sqrt{3}}{s}$;当 P 是 $\triangle ABC$ 的重心时,不等式的下确界为 $\frac{5}{s}$;当 P 是 $\triangle ABC$ 内任一点时,不等式的下确界仅为 $\frac{3}{s}$.

如所知,设 P 是 $\triangle ABC$(内角均小于 120°) 内一点,且使 $\angle APB=\angle BPC=\angle CPA=120°$,则称点 P 是 $\triangle ABC$ 的 Fermat — Torriccelli 点. 本文将讨论类似于(1) ~ (7) 的几个 Fermat — Torriccelli 点的性质.

定理 1 设点 P 是 $\triangle ABC$ 的 Fermat — Torriccelli 点,三边为 a,b,c,记 $PA=u,PB=v,PC=w$,则有

(i) $u+v+w\leqslant\frac{\sqrt{3}}{3}(a+b+c)$; (8)

(ii) $uv+vw+wu\leqslant\frac{1}{3}(ab+bc+ca)$; (9)

(iii) $u^2+v^2+w^2\geqslant\frac{1}{3}(a^2+b^2+c^2)$. (10)

证明 (i) 由平均值不等式,有

$$c=\sqrt{u^2+uv+v^2}\geqslant\sqrt{3\left(\frac{u+v}{2}\right)^2}=\frac{\sqrt{3}}{2}(u+v),$$

同理 $a\geqslant\frac{\sqrt{3}}{2}(v+w)$, $6\geqslant\frac{\sqrt{3}}{2}(w+u)$.

$$\therefore\ a+b+c\geqslant\sqrt{3}(u+v+w).$$

即 $u+v+w\leqslant\frac{\sqrt{3}}{3}(a+b+c)$.

(ii) 注意到 GI 4.5,

$$ab+bc+ca \geqslant 4\sqrt{3}\Delta.$$

又 ∵ $$\Delta=\frac{\sqrt{3}}{4}(uv+vw+wu),$$

∴ $$uv+vw+wu \leqslant \frac{1}{3}(ab+bc+ca).$$

(iii) 注意到 $\triangle ABC$ 内到各顶点的距离的平方和最小的点是 $\triangle ABC$ 的重心，故有

$$u^2+v^2+w^2 \geqslant \left(\frac{2}{3}m_a\right)^2+\left(\frac{2}{3}m_b\right)^2+\left(\frac{2}{3}m_c\right)^2$$

$$=\frac{4}{9}(m_a^2+m_b^2+m_c^2).$$

又由中线长恒等式

$$m_a^2+m_b^2+m_c^2=\frac{3}{4}(a^2+b^2+c^2)$$

知 $$u^2+v^2+w^2 \geqslant \frac{1}{3}(a^2+b^2+c^2).$$ □

定理2 设 P 是 $\triangle ABC$ 的 Fermat − Torriccelli 点，延长 AP、BP、CP 分别交对边于 A'，B'，C'，记 $AA'=x$，$BB'=y$，$CC'=z$，则有

(i) $$x+y+z \leqslant \sqrt{3}s, \tag{11}$$

(ii) $$\frac{1}{x}+\frac{1}{y}+\frac{1}{z} \geqslant \frac{3\sqrt{3}}{s}, \tag{12}$$

其中 $s=\frac{1}{2}(a+b+c)$ 是 $\triangle ABC$ 的半周长.

证明 (i) ∵ $\angle APB=\angle CPA=120°$,

∴ $\angle A'PB=\angle A'PC=60°$.

利用角平分线长公式及调和平均 —— 算术平均不等式，得

$$PA'=\frac{2vw}{v+w}\cos 60°=\frac{vw}{v+w} \leqslant \frac{1}{4}(v+w).$$

∴ $$x=PA+PA'=u+\frac{1}{4}(v+w).$$

同理 $$y \leqslant v+\frac{1}{4}(w+u), \quad z \leqslant w+\frac{1}{4}(u+v).$$

$$\therefore \quad x + y + z \leqslant \frac{3}{2}(u + v + w).$$

又由定理 1(i),即得

$$x + y + z \leqslant \frac{\sqrt{3}}{2}(a + b + c) = \sqrt{3}s.$$

(ii) $\because \sqrt{3}s(\frac{1}{x} + \frac{1}{y} + \frac{1}{z})$

$$\geqslant (x + y + z)(\frac{1}{x} + \frac{1}{y} + \frac{1}{z}) \geqslant 9,$$

$$\therefore \quad \frac{1}{x} + \frac{1}{y} + \frac{1}{z} \geqslant \frac{3\sqrt{3}}{s}.$$

上式表明,对于 Fermat − Torricelli 点,$\frac{1}{x} + \frac{1}{y} + \frac{1}{z}$ 的下确界仍为$\frac{3\sqrt{3}}{s}$. □

顺便指出,定理 1 中,由(ii)、(iii) 可知(i)、(ii) 已是较精细的不等式,进一步,我们提出如下

猜想 证明或否定

$$(u + v + w)^2 \leqslant ab + bc + ca.$$

参考文献

[1] 单墫,刘亚强,介绍一个几何不等式,《中等数学》,1989 年第 6 期,9 − 11.

[2] 安振平,几个三角形不等式的推广,《数学通讯》,1991 年第 8 期,21 − 24.

[3] 周德丰,一个三角形不等式猜想的改进,《数学通讯》,1992年第7期,22 − 23.

关于 Fermat 点的几个不等式的证明

浙江慈溪市浒山中学　沈惆英
浙江慈溪市掌起中学　陈传孟

近几年来，文[1—4]给出了关于 Fermat 点的一系列不等式，从而解决了涉及三角形内任意一点到三顶点距离和的有关不等式. 但方法各异且不够简洁，今给出统一的证明方法.

引理 1　在 $\triangle ABC$ 中，$a \geqslant b \geqslant c$ 且 $A \leqslant 120°$. x、y、z 分别表示 Fermat 点 F 到 A、B、C 的距离，则

$$x + y + z \geqslant \sqrt{a^2 + bc}. \tag{1}$$

证明

$$\begin{aligned} x + y + z &= \sqrt{\frac{1}{2}(a^2 + b^2 + c^2 + 4\sqrt{3}\,\Delta)} \\ &= \sqrt{\frac{1}{2}(a^2 + a^2 + 2bc\cos A + 2\sqrt{3}\,bc\sin A)} \\ &= \sqrt{a^2 + bc\cos A + \sqrt{3}\,bc\sin A} \\ &= \sqrt{a^2 + 2bc\sin(A + 30°)}. \end{aligned}$$

$$\because 60° \leqslant A \leqslant 120°, \quad \therefore \sin(A + 30°) \geqslant \frac{1}{2},$$

从而不等式(1)成立. □

引理 2　在 $\triangle ABC$ 中，$a \geqslant b \geqslant c$. x、y、z 分别表示 Fermat 点 F 到 A、B、C 的距离. 若 $a^2 \leqslant 3bc$，则

$$x + y + z \geqslant 2\sqrt{bc}\sin(\theta + 30°), \tag{2}$$

$30° \leqslant \theta \leqslant 60°$，其中　$\theta = \arcsin \dfrac{a}{2\sqrt{bc}}$.

证明　由　$\dfrac{1}{3}a^2 \leqslant bc \leqslant a^2$，

即 $$\frac{1}{2}\leqslant\frac{a}{2\sqrt{bc}}\leqslant\frac{\sqrt{3}}{2},\quad 故\ 30^\circ\leqslant\theta\leqslant 60^\circ.$$

而 $$\sin\frac{A}{2}=\sqrt{\frac{(s-b)(s-c)}{bc}}=\sqrt{\frac{(a+b-c)(a-b+c)}{4bc}}$$

$$\leqslant\frac{a}{2\sqrt{bc}}=\sin\theta,$$

且$\frac{A}{2}$,θ 为锐角,故$\frac{A}{2}\leqslant\theta$,即 $A\leqslant 2\theta$.

因此 $$90^\circ\leqslant A+30^\circ\leqslant 2\theta+30^\circ\leqslant 150^\circ,$$

故 $$\sin(A+30^\circ)\geqslant\sin(2\theta+30^\circ).$$

于是有 $$\begin{aligned}x+y+z&=\sqrt{a^2+2bc\sin(A+30^\circ)}\\&\geqslant\sqrt{4bc\sin^2\theta+2bc\sin(2\theta+30^\circ)}\\&=\sqrt{2bc}\sqrt{1-\cos 2\theta+\sin(2\theta+30^\circ)}\\&=\sqrt{2bc}\sqrt{1-\sin(90^\circ+2\theta)+\sin(2\theta+30^\circ)}\\&=\sqrt{2bc}\sqrt{1-2\sin 30^\circ\cos(60^\circ+2\theta)}\\&=\sqrt{2bc}\sin(30^\circ+\theta).\end{aligned}$$ □

命题 1[3] 在 $\triangle ABC$ 中,x、y、z 分别表示 Fermat 点到 A、B、C 的距离,则

$$(x+y+z)^3>4abc. \tag{3}$$

证明 不失普遍性,设 $a\geqslant b\geqslant c$,则 $A\geqslant 60^\circ$. 如果 $A>120^\circ$,则

$$\begin{aligned}(x+y+z)^3&=(b+c)^3=(b+c)(b+c)^2\\&>a\cdot 4bc=4abc.\end{aligned}$$

如果 $A\leqslant 120^\circ$,不等式(3) 可加强为

$$(x+y+z)^3\geqslant\frac{8}{\sqrt{3}}abc.$$

事实上

1° 若 $a^2>3bc$,则

$$x+y+z\geqslant\sqrt{a^2+bc}$$

$$= \sqrt{\frac{1}{3}a^2 + \frac{1}{3}a^2 + \frac{1}{3}a^2 + bc}$$

$$\geqslant \sqrt{4\sqrt[4]{\frac{1}{3^3}a^6bc}},$$

故 $\qquad (x+y+z)^3 \geqslant 2^3 \times 3^{-\frac{9}{8}}a^{\frac{9}{4}}b^{\frac{3}{8}}c^{\frac{3}{8}}.$

由于 $\qquad a^2 > 3bc, \therefore a^{\frac{5}{4}} > 3^{\frac{5}{8}}b^{\frac{5}{8}}c^{\frac{5}{8}},$

因此 $\qquad (x+y+z)^3 > \frac{8}{\sqrt{3}}abc.$

$2°$ 若 $a^2 \leqslant 3bc$，由于

$\because \qquad x+y+z \geqslant 2\sqrt{bc}\sin(\theta+30°);$

$\qquad\qquad a = 2\sqrt{bc}\sin\theta,$

因此，只要证明

$$\sin^3(\theta+30°) \geqslant \frac{2\sin\theta}{\sqrt{3}}$$

$$\Leftrightarrow \frac{\sqrt{3}}{2}\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\sin\theta + \frac{1}{2}\cos\theta\right)^3 \geqslant \sin\theta(\sin^2\theta + \cos^2\theta)$$

$$\Leftrightarrow \frac{\sqrt{3}}{2}\left(\frac{\sqrt{3}}{2}t + \frac{1}{2}\right)^3 \geqslant t(t^2+1) \quad (\text{其中 } t = \operatorname{tg}\theta)$$

$$\Leftrightarrow 9t^3 + 9\sqrt{3}t^2 + 9t + \sqrt{3} \geqslant 16t^3 + 16t$$

$$\Leftrightarrow 7t^3 - 9\sqrt{3}t^2 + 7t - \sqrt{3} \leqslant 0$$

$$\Leftrightarrow (t-\sqrt{3})(7t^2 - 2\sqrt{3}t + 1) \leqslant 0.$$

$$\because 30° \leqslant \theta \leqslant 60°, \therefore t - \sqrt{3} \leqslant 0;$$

而 $7t^2 - 2\sqrt{3}t + 1$ 恒为正，故上式显然成立. □

命题 2[2] 在 $\triangle ABC$ 中，x、y、z 分别是 Fermat 点 F 到 A、B、C 的距离，则

$$x+y+z \geqslant \sqrt{2ab+2bc+2ac-a^2-b^2-c^2}. \qquad (4)$$

证明 不妨设 $a \geqslant b \geqslant c$.

如果 $A > 120°$，那么 $\quad x+y+z = b+c.$

故欲证(4)，只需证

$$(b+c)^2 \geqslant 2ab+2bc+2ac-a^2-b^2-c^2,$$

即证 $a^2-2(b+c)a+2b^2+2c^2 \geqslant 0$,

即证 $(a-b-c)^2+(b-c)^2 \geqslant 0$,

此式显然成立；

如果 $A<120°$,

1° 若 $a^2>3bc$，则 $x+y+z \geqslant \sqrt{a^2+bc}$,

欲证(4)，只需证

$$a^2+bc \geqslant 2ab+2bc+2ac-a^2-b^2-c^2,$$

即证 $2a^2-2a(b+c)+b^2+c^2-bc \geqslant 0$

$$\Leftrightarrow a^2-2a(b+c)+(b+c)^2+a^2-3bc \geqslant 0$$

$$\Leftrightarrow (a-b-c)^2+a^2-3bc \geqslant 0,$$

此式显然成立.

2° 若 $a^2 \leqslant 3bc$,

$\because (4a\sqrt{bc}-a^2)-(2ab+2bc+2ac-a^2-b^2-c^2)$

$$=(b-c)^2-2a(\sqrt{b}-\sqrt{c})^2$$

$$=(\sqrt{b}-\sqrt{c})^2[(\sqrt{b}+\sqrt{c})^2-2a],$$

又 $\because (\sqrt{b}+\sqrt{c})^2 \geqslant 4\sqrt{bc} \geqslant 4\sqrt{\frac{1}{3}a^2}=\frac{4}{\sqrt{3}}a>2a$,

$\therefore \quad 4a\sqrt{bc}-a^2 \geqslant 2ab+2bc+2ac-a^2-b^2-c^2$,

故欲证(4)，只要证

$$2\sqrt{bc}\sin(\theta+30°) \geqslant \sqrt{4a\sqrt{bc}-a^2}$$

$$=\sqrt{8bc\sin\theta-4bc\sin^2\theta},$$

即证 $\sin(\theta+30°) \geqslant \sqrt{2\sin\theta-\sin^2\theta}=\sqrt{1-(1-\sin\theta)^2}$

$$\Leftrightarrow \sin^2(\theta+30°)+(1-\sin\theta)^2 \geqslant 1, \tag{5}$$

$\because 30° \leqslant \theta \leqslant 60°$, $\therefore \cos(\theta+30°) \geqslant 0$,

故 $(5) \Leftrightarrow 1-\sin\theta \geqslant \cos(\theta+30°)$

$$\Leftrightarrow 1 \geqslant \sin\theta + \sin(60° - \theta)$$
$$= 2\sin 30°\cos(\theta - 30°) = \cos(\theta - 30°),$$

此式显然成立. □

在文[4]中,给出了 Janous 不等式

$$\left(\frac{1}{a} + \frac{1}{b} + \frac{1}{c}\right)(m_a + m_b + m_c) > \frac{15}{2} \tag{6}$$

的初等证明.

设 M 为 $\triangle ABC$ 的重心,则上式等价于

$$\left(\frac{1}{a} + \frac{1}{b} + \frac{1}{c}\right)(MA + MB + MC) > 5. \tag{7}$$

文[1]把它加强为:

命题3 在 $\triangle ABC$ 中,x、y、z 分别表示 Fermat 点 F 到 A、B、C 的距离,则

$$(x + y + z)\left(\frac{1}{a} + \frac{1}{b} + \frac{1}{c}\right) > 5. \tag{8}$$

证明 陈计在文[4]中证明了不等式

$$\left(\frac{1}{a} + \frac{1}{b} + \frac{1}{c}\right)\sqrt{2ab + 2bc + 2ac - a^2 - b^2 - c^2} > 5. \tag{9}$$

由命题 2,得

$$x + y + z \geqslant \sqrt{2ab + 2bc + 2ac - a^2 - b^2 - c^2},$$

因此 $\left(\frac{1}{a} + \frac{1}{b} + \frac{1}{c}\right)(x + y + z) > 5.$

参考文献

[1] 单墫,刘亚强,介绍一个几何不等式,《中等数学》,1989 年第 6 期,9—11.

[2] 刘健,三个新的三角形不等式,《数学月刊》(中学理科版),1993 年第 8 期,14.

[3] 陈计,征解问题 30 的评注,《数学通讯》,1992 年第 9 期,39—40.

[4] 陈计,Janous 不等式的初等证明,《数学通讯》,1991 年第 11 期,11—14.

双圆 n 边形中的不等式

浙江镇海石化总厂技校　钱义光

如果一个多边形既有外接圆又有内切圆，则称此多边形为双圆多 边形．对于双圆 n 边形的双圆半径不等式，文[1 － 2] 已作了较详细 的讨论．本文试图对双圆半径及圆心距间的不等式作些探索．

命题 1　设 R、r 分别为三角形的外接圆与内切圆的半径，d 为圆心距．则对 $m \geqslant 2$ 有

$$R^m \geqslant d^m + 2^m r^m.$$

证明　对 R、r、d 三者有关系式

$$R^2 = d^2 + 2R \cdot r \quad 与 \quad R \geqslant 2r.$$

从而有　$R^2 \geqslant d^2 + 2^2 r^2$.

故对 $m \geqslant 2$ 有

$$R^m \geqslant (d^2 + 4r^2)^{\frac{m}{2}} \geqslant d^m + 2^m r^m. \qquad \square$$

注记　命题 1 对 $m = 1$ 的情况是不成立的，例取一个锐角为 30° 的直角三角形，不妨取斜边为 2，这时　$R = 1, r = (\sqrt{3} - 1)/2, d = (\sqrt{6} - \sqrt{2})/2$，显然有

$$1 < (\sqrt{6} - \sqrt{2})/2 + 2 \times (\sqrt{3} - 1)/2.$$

命题 2　设 R、r 分别是双圆四边形的外接圆与内切圆的半径，d 为圆心距．则对 $m \geqslant 2$ 有

$$R^m \geqslant d^m + 2^{m/2} r^m.$$

证明　对 R、r、d 有著名的 Fuss 公式

$$\frac{1}{(R-d)^2}+\frac{1}{(R+d)^2}=\frac{1}{r^2},$$

从而有 $\frac{1}{r^2}\geqslant\frac{2}{(R-d)(R+d)}$.

$\therefore\quad R^2\geqslant d^2+2r^2.$

于是,对 $m\geqslant 2$,有

$$R^m\geqslant(d^2+2r^2)^{\frac{m}{2}}\geqslant d^m+2^{\frac{m}{2}}r^m.$$

问题 设 R、r 分别是双圆 n 边形的外接圆与内切圆半径,d 为圆心距.求使下式成立的最小 m:

$$R^m\geqslant d^m+r^m\sec^m\frac{\pi}{n}.$$

当 $m=2$ 时,证明见[3].

另外,杨世国[4] 在 1990 年还提出了一个与此有关的

猜想 $R^2\geqslant\overline{OG}^2+r^2\sec^2\frac{\pi}{n}$,

其中 O,G 分别为双圆 n 边形的外心与重心.

类似于本文的指数推广问题似乎更为困难.

参考文献

[1] 陈计,李广兴,多边形中的不等式,《湖南数学通讯》,1989 年第 3 期,32 − 33.

[2] 刘健,双圆 n 边形的双圆半径不等式,《湖南数学通讯》,1988 年第 2 期,16 − 17.

[3] 柳锋祥,不等式 $R\geqslant r\sec\frac{\pi}{n}$ 的加强,《中学数学教学参考》,1994 年第 8 期,35 − 36.

[4] 杨世国,关于四边形 Euler 不等式的加强推广(研究简讯 5),《湖南数学通讯》,1990 年第 4 期,41 − 42.

猜想不等式 $R^2 \geqslant r^2\sec^2\frac{\pi}{n}+\overline{IO}^2$ 的证明

汕头大学数学所　王　振

1990 年，陈计[1] 发表了下面的

猜想　凸 n 边形的覆盖圆 O 的半径为 R，内含圆的半径为 r，则有不等式

$$R^2 \geqslant r^2\sec^2\frac{\pi}{n}+\overline{IO}^2. \tag{1}$$

1992 年，Henderson[2] 猜测有更强的不等式

$$R^2 \geqslant rR\sec\frac{\pi}{n}+d^2, \tag{2}$$

其中 $d=\overline{OI}$. 但是，他只能证明 $n=3$ 与 $n=4$ 的情形．若(2) 成立，则 $R\geqslant r\sec\frac{\pi}{n}$，从而(1) 成立．

本文中，我们来证明陈计的猜想不等式(1).

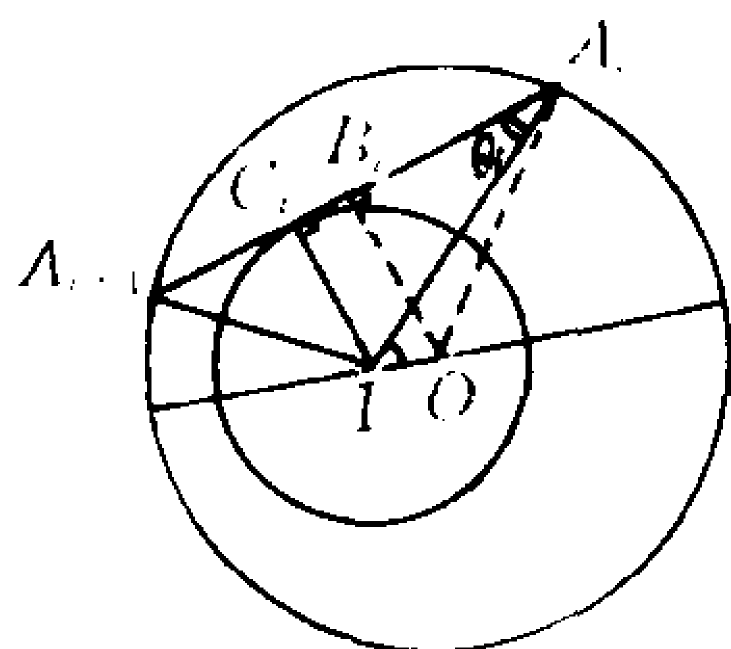
证明　不妨设凸 n 边形 $A_1A_2\cdots A_n$ 内接于覆盖圆 O. 否则，若 A_i 不在覆盖圆上，延长 IA_i 交 $\odot O$ 于 A_i'，则以 A_i' 代替 A_i 的 n 边形仍有内含圆 I.

记 I 到 A_iA_{i+1} 的距离为 d_i，则不妨取 $r=\min\limits_{1\leqslant j\leqslant n}(d_j)$.

由于当 R 及 d 固定时，r 取最大值时必有 $d_1=d_2=\cdots=d_n$，[否则，设 $d_i=\min d_j<d_{i+1}$，由于 $\angle A_{i+1}A_iI\neq\frac{\pi}{2}$，(否则 $\angle A_{i+1}A_iI=\frac{\pi}{2}$，$d_{i-1}<IA_i=d_i$，这与 $d_i=\min d_j$ 矛盾)，所以我们可以让 A_{i+1} 在 $\odot O$ 上沿着使 $\left|\angle A_{i+1}A_iI-\frac{\pi}{2}\right|$ 减少的方向作微小移动，但保持 $d_{i+1}>d_i$；而 $d_i=A_iI\sin\angle A_{i+1}A_iI$ 在移动中显然增

大．这样，我们最多作 $n-1$ 次上述步骤即可使 $\min d_j$ 增加，从而 r 增大]. 因此，下面我们只须对双心 n 边形来证明不等式(1).

如图，设双心 n 边形 $A_1A_2\cdots A_n$ 的顶角之半为 θ_i 边 A_iA_{i+1} 上的中点为 B_i，切点为 C_i，$\angle A_iIO=\varphi_i$，$i=1,2,\cdots,n$.



考虑有向线段 C_iB_i. 一方面

$$C_iB_i=d\cos(\varphi_i-\theta_i),$$

另一方面

$$C_iB_i=\frac{1}{2}(C_iA_i-A_{i+1}C_i)=\frac{r}{2}(\mathrm{ctg}\theta_i-\mathrm{ctg}\theta_{i+1}).$$

从而

$$2d\cos(\varphi_i-\theta_i)=r(\mathrm{ctg}\theta_i-\mathrm{ctg}\theta_{i+1}),\qquad(3)$$

$i=1,2,\cdots,n$.

在 $\triangle A_iIO$ 中，$IA_i=r\csc\theta_i$，由余弦定理得

$$2dr\cos\varphi_i=r^2\csc\theta_i-(R^2-d^2)\sin\theta_i.\qquad(4)$$

现在，我们回到(3)式：

$$\begin{aligned}&r^2(\mathrm{ctg}\theta_i-\mathrm{ctg}\theta_{i+1})\\&=2dr\sin\varphi_i\sin\theta_i+2dr\cos\varphi_i\cos\theta_i\\&=2dr\sin\varphi_i\sin\theta_i+r^2\mathrm{ctg}\theta_i-\frac{R^2-d^2}{2}\sin2\theta_i,\end{aligned}$$

即

$$\begin{aligned}&2dr\sin\varphi_i\sin\theta_i\\&=\frac{R^2-d^2}{2}\sin2\theta_i-r^2\mathrm{ctg}\theta_{i+1};\end{aligned}\qquad(5)$$

注意到 $\varphi_{i+1}-\varphi_i=\pi-(\theta_i+\theta_{i+1})$，

$$\begin{aligned}&r^2(\mathrm{ctg}\theta_i-\mathrm{ctg}\theta_{i+1})=-2dr\cos(\varphi_{i+1}+\theta_{i+1})\\&=2dr\sin\varphi_{i+1}\sin\theta_{i+1}-2dr\cos\varphi_{i+1}\cos\theta_{i+1}\\&=2dr\sin\varphi_{i+1}\sin\theta_{i+1}-r^2\mathrm{ctg}\theta_{i+1}+\frac{R^2-d^2}{2}\sin2\theta_{i+1},\end{aligned}$$

即

$$2dr\sin\varphi_{i+1}\sin\theta_{i+1}$$

$$= r^2\operatorname{ctg}\theta_i - \frac{R^2 - d^2}{2}\sin 2\theta_{i+1}, i = 1,2,\cdots,n, \tag{6}$$

将指标 i 换为 $i-1$ 得

$$2dr\sin\varphi_i\sin\theta_i$$

$$= r^2\operatorname{ctg}\theta_{i-1} - \frac{R^2 - d^2}{2}\sin 2\theta_i, \tag{6'}$$

与(5)比较可得

$$(R^2 - d^2)\sin 2\theta_i = r^2(\operatorname{ctg}\theta_{i-1} + \operatorname{ctg}\theta_{i+1}), \tag{7}$$

$i = 1,2,\cdots,n$,求和得

$$(R^2 - d^2)\sum_{i=1}^{n}\sin 2\theta_i = 2r^2\sum_{i=1}^{n}\operatorname{ctg}\theta_i. \tag{8}$$

由于 θ_i 为锐角,$\sum_{i=1}^{n}\theta_i = \frac{n-2}{2}\pi$,且 $\sin x$ 在 $(0,\pi)$ 上是凹函数,$\operatorname{ctg}x$ 在 $\left(0,\frac{\pi}{2}\right)$ 上是凸函数,所以由 Jensen 不等式知

$$\sum_{i=1}^{n}\sin 2\theta_i \leqslant n\sin\frac{2\pi}{n}, \sum_{i=1}^{n}\operatorname{ctg}\theta_i \geqslant n\operatorname{tg}\frac{\pi}{n},$$

代入(8)式得

$$R^2 - d^2 \geqslant r^2\sec^2\frac{\pi}{n}.$$

□

编者注 上述证明是作者 1992 年 9 月来信中给出的.

参考文献

[1] Ji Chen, Problem 1580*, Crux Math., 16(1990), 240.

[2] G. P. Henderson, Partial solution to problem 1580*, Crux Math., 18(1992), 76－80.

四面体中的两个不等式

湖南益阳师范专科学校　　胡耀宗

本文把线段比转化为体积之比，从而巧妙地得出四面体中的两个不等式.

定理　设 P 是四面体 $A-BCD$ 内任意一点，AP、BP、CP、DP 分别交面 BCD、CDA、DAB、ABC 于 A'、B'、C'、D'，又设

$$T=\frac{PA'}{AA'}\cdot\frac{PB'}{BB'}+\frac{PA'}{AA'}\cdot\frac{PC'}{CC'}+\frac{PA'}{AA'}\cdot\frac{PD'}{DD'}+\frac{PB'}{BB'}\cdot\frac{PC'}{CC'}+\frac{PB'}{BB'}\cdot\frac{PD'}{DD'}+\frac{PC'}{CC'}\cdot\frac{PD'}{DD'},$$

则 $T\leqslant\frac{3}{8}$；当 P 位于以四面体四个中截面所围成的几何体内时，$T\geqslant\frac{1}{4}$.

证明　设四面体 $P-BCD$、$P-CDA$、$P-DAB$、$P-ABC$ 及 $A-BCD$ 的体积分别为 V_1、V_2、V_3、V_4 和 V，则 $V=V_1+V_2+V_3+V_4$.

因为四面体 $P-BCD$ 与 $A-BCD$ 共底面 $\triangle BCD$，所以有 $\frac{PA'}{AA'}=\frac{V_1}{V}$，

$$T=\frac{\sum\limits_{1\leqslant i<j\leqslant 4}V_iV_j+3\sum\limits_{1\leqslant i<j\leqslant 4}V_iV_j}{4V^2}$$

$$\leqslant\frac{\frac{3}{2}(V_1^2+V_2^2+V_3^2+V_4^2)+3\sum\limits_{1\leqslant i<j\leqslant 4}V_iV_j}{4V^2}$$

$$= \frac{3}{8V^2}(V_1^2 + V_2^2 + V_3^2 + V_4^2 + 2\sum_{1 \leqslant i < j \leqslant 4} V_i V_j)$$

$$= \frac{3}{8V^2}(V_1 + V_2 + V_3 + V_4)^2 = \frac{3}{8},$$

即 $T \leqslant \frac{3}{8}$,

当且仅当 P 为四面体重心时取等号.

当 P 位于中截面 LMN 内或以下时 $V_1 \leqslant \frac{1}{2}V$,

$\therefore \quad V_2 + V_3 + V_4 \geqslant V_1$. ($L$、$M$、$N$ 分别为棱 AB、AC、AD 中点) 故当 P 位于以四面体 $A-BCD$ 四个中截面所围成的几何体内时, $V_1V_2 + V_1V_3 + V_1V_4 \geqslant V_1^2$.

$$\therefore \quad 4\sum_{1 \leqslant i < j \leqslant 4} V_i V_j \geqslant V_1^2 + V_2^2 + V_3^2 + V_4^2 + 2\sum_{1 \leqslant i < j \leqslant 4} V_i V_j$$

$$= (V_1 + V_2 + V_3 + V_4)^2 = V^2,$$

得 $\frac{\sum_{1 \leqslant i < j \leqslant 4} V_i V_j}{V^2} \geqslant \frac{1}{4}$,即 $T \geqslant \frac{1}{4}$,

当且仅当 P 为任一条棱的中点时取等号. □

猜想

$$\frac{1}{PA' \cdot PB'} + \frac{1}{PA' \cdot PC'} + \frac{1}{PA' \cdot PD'} + \frac{1}{PB' \cdot PC'} + \frac{1}{PB' \cdot PD'} + \frac{1}{PC' \cdot PD'}$$

$$\geqslant 4\left(\frac{1}{AA' \cdot BB'} + \frac{1}{AA' \cdot CC'} + \frac{1}{AA' \cdot DD'} + \frac{1}{BB' \cdot CC'} + \frac{1}{BB' \cdot DD'} + \frac{1}{CC' \cdot DD'}\right).$$

参考文献

[1] 胡耀宗,关于四面体的一个不等式,《中学教研》(数学版),1994 年第 7－8 期,54－55.

再论四面体的一个猜想

湖南教育学院数学系　冷岗松
中国科技大学数学系　万振东
湖南省长沙市第一中学　唐立华

设四面体 $A_1A_2A_3A_4$ 的外接球半径与内切球半径分别为 R、r，$A_1A_2A_3A_4$ 内任一点 P 到面 $A_2A_3A_4$、$A_1A_3A_4$、$A_1A_2A_4$、$A_1A_2A_3$ 的距离分别为 d_1,d_2,d_3,d_4，刘健在文[1]中猜测成立如下不等式：

$$\frac{1}{d_1^2}+\frac{1}{d_2^2}+\frac{1}{d_3^2}+\frac{1}{d_4^2}\geqslant 3\left(\frac{1}{r^2}+\frac{3}{R^2}\right).$$

我们在文[2]中证明了刘健的上述猜想是不成立的，并提出了刘健猜想的修正形式，即再次猜测成立不等式

$$\frac{1}{d_1^2}+\frac{1}{d_2^2}+\frac{1}{d_3^2}+\frac{1}{d_4^2}\geqslant 2\left(\frac{1}{r^2}+\frac{9}{R^2}\right). \tag{1}$$

最近，我们在文[3]的启发下，利用文[3]的结果，证明了不等式(1)，从而完善了对刘健猜想的讨论.

定理　设四面体 $A_1A_2A_3A_4$ 的外接球半径与内切球半径分别为 R、r，$A_1A_2A_3A_4$ 内一点 P 到面 $A_2A_3A_4$，$A_1A_3A_4$，$A_1A_2A_4$，$A_1A_2A_3$ 的距离分别为 d_1,d_2,d_3,d_4，则

$$\frac{1}{d_1^2}+\frac{1}{d_2^2}+\frac{1}{d_3^2}+\frac{1}{d_4^2}\geqslant 2\left(\frac{1}{r^2}+\frac{9}{R^2}\right),$$

其中等号当且仅当 $A_1A_2A_3A_4$ 为正四面体且 P 为其中心时成立.

为证定理，需用到[3]中建立的

引理[3]　设四面体 $A_1A_2A_3A_4$ 的体积为 V，各侧面 $A_2A_3A_4$，$A_1A_3A_4$，$A_1A_2A_4$，$A_1A_2A_3$ 的面积分别为 S_1,S_2,S_3,S_4，则

$$(S_1+S_2+S_3+S_4)^2-2(S_1^2+S_2^2+S_3^2+S_4^2)\geqslant 18\sqrt[3]{3}\,V^{\frac{4}{3}},$$

当 $A_1A_2A_3A_4$ 是正四面体时等号成立.

下面是**定理的证明**：

设四面体 $PA_2A_3A_4, PA_1A_3A_4, PA_1A_2A_4, PA_1A_2A_3$ 的体积分别为 V_1, V_2, V_3, V_4，则 $V = \sum_{i=1}^{4} V_i$，这时

$$V^2 \cdot \sum_{i=1}^{4} \frac{1}{d_i^2} = \frac{1}{9}\Big(\sum_{i=1}^{4} V_i\Big)^2\Big(\sum_{i=1}^{4} \frac{S_i^2}{V_i^2}\Big)$$

$$= \frac{1}{9}\Bigg[\Big(\sum_{i=1}^{4} V_i^2\Big)\Big(\sum_{i=1}^{4} \frac{S_i^2}{V_i^2}\Big) + 2\sum_{1\leqslant i<j\leqslant 4}\Big(\frac{V_i}{V_j}S_j^2 + \frac{V_j}{V_i}S_i^2\Big) + 2\sum_{i=1}^{4}\left(\frac{\sum\limits_{\substack{k<l\\ k,l\neq i}} V_k V_l}{V_i}\right)S_i^2\Bigg] \triangleq \frac{1}{9}(Q_1 + 2Q_2 + 2Q_3). \qquad (2)$$

由 Cauchy 不等式知

$$Q_1 = \Big(\sum_{i=1}^{4} V_i^2\Big)\Big(\sum_{i=1}^{4} \frac{S_i^2}{V_i^2}\Big) \geqslant \Big(\sum_{i=1}^{4} S_i\Big)^2,$$

由算术 — 几何平均值不等式知

$$Q_2 \geqslant 2\sum_{1\leqslant i<j\leqslant 4} S_i S_j,$$

$$Q_3 \geqslant 3\sum_{i=1}^{4}\left(\frac{\sqrt[3]{\prod\limits_{j\neq i} V_j^2}}{V_i^2}\right)S_i^2 \geqslant 12\sqrt[4]{\prod_{i=1}^{4} S_i^2} = 12\sqrt{\prod_{i=1}^{4} S_i}.$$

再根据引理和已知的结果[4]：

$$\prod_{i=1}^{4} S_i \geqslant 3^{\frac{8}{3}}\Big(\frac{3}{4}\Big)^2 V^{\frac{8}{3}}, \qquad (3)$$

由(2) 便得

$$V^2 \cdot \sum_{i=1}^{4} \frac{1}{d_i^2} \geqslant \frac{1}{9}\Big[\Big(\sum_{i=1}^{4} S_i\Big)^2 + 4\sum_{1\leqslant i<j\leqslant 4} S_i S_j + 24 \cdot \sqrt{\prod_{i=1}^{4} S_i}\Big]$$

$$= \frac{1}{9}\Big[\Big(\sum_{i=1}^{4} S_i\Big)^2 + 2\Big(\sum_{i=1}^{4} S_i\Big)^2 - 2\Big(\sum_{i=1}^{4} S_i^2\Big) + 24 \cdot \sqrt{\prod_{i=1}^{4} S_i}\Big]$$

$$\geqslant \frac{1}{9}\Big[2\Big(\sum_{i=1}^{4} S_i\Big)^2 + 18\sqrt[3]{3}V^{\frac{4}{3}} + 24 \times 3^{\frac{4}{3}} \cdot \Big(\frac{3}{4}\Big) \cdot V^{\frac{4}{3}}\Big]$$

$$= \frac{1}{9}\left[2\left(\sum_{i=1}^{4}S_i\right)^2 + 72\sqrt[3]{3}V^{\frac{4}{3}}\right],$$

所以
$$\sum_{i=1}^{4}\frac{1}{d_i^2} \geqslant \frac{2}{9}\frac{\left(\sum_{i=1}^{4}S_i\right)^2}{V^2} + \frac{8\sqrt[3]{3}}{V^{\frac{2}{3}}}. \tag{4}$$

再注意到熟知的结果[4]

$$V = \frac{1}{3}\left(\sum_{i=1}^{4}S_i\right)r,$$

$$V \leqslant \frac{8\sqrt{3}}{27}R^3, \tag{5}$$

由(4)便得

$$\sum_{i=1}^{4}\frac{1}{d_i^2} \geqslant \frac{2}{9}\left(\frac{3}{r}\right)^2 + \frac{8\sqrt[3]{3}\times 9}{(8\sqrt{3})^{\frac{2}{3}}R^2} = 2\left(\frac{1}{r^2} + \frac{9}{R^2}\right).$$

还需指出(3),(5)等号当且仅当 $A_1A_2A_3A_4$ 为正四面体时成立,综合上面的论证便知定理中的不等式当且仅当 $A_1A_2A_3A_4$ 为正四面体且 P 为其中心时等号成立,定理证毕. □

最后,取 P 为四面体 $A_1A_2A_3A_4$ 的内心,由定理便得 E^3 中的 Euler 不等式 $R \geqslant 3r$,因此定理可看作是 Euler 不等式的一种推广.

参考文献

[1] 刘健,一个几何不等式的简证、加强与其它,《中学教研》(数学版),1993 年第 11 期,19 — 21.

[2] 冷岗松,唐立华,关于四面体的一个猜想,《数学竞赛》(23),湖南教育出版社,1994 年.

[3] 陈计,王振,Neuberg — Pedoe 不等式的四面体推广,《数学通讯》,1994 年第 2 期,22 — 24.

[4] 匡继昌,《常用不等式》,湖南教育出版社(第二版),1993 年,296 — 297.

一个相似三角形问题

福建省南平市第一中学　黄德芳

已知 $\triangle ABC$ 的三边分别为 a、b、c，相应的角分别为 α、β、γ，分别过 A、B、C 向形外（或形内）作直线 AA'、BB'、CC'，它们分别与 AB、BC、CA 均成 θ 的夹角，所作三条直线相交于 A'、B'、C'（如图 1），以下我们研究 $\triangle A'B'C'$ 的一些性质.

1. 设在 $\triangle ABC$ 外且分别与 CA、AB、BC 所张的角分别为 α、β、γ 的圆分别为 C_1、C_2、C_3. 在 $\triangle A'AC$ 中，由外角定理得

$$\angle A' = \angle B'AC - \angle A'CA = (\alpha + \theta) - \theta = \alpha,$$

同理 $\angle B' = \beta$，$\therefore \triangle A'B'C' \backsim \triangle ABC$.

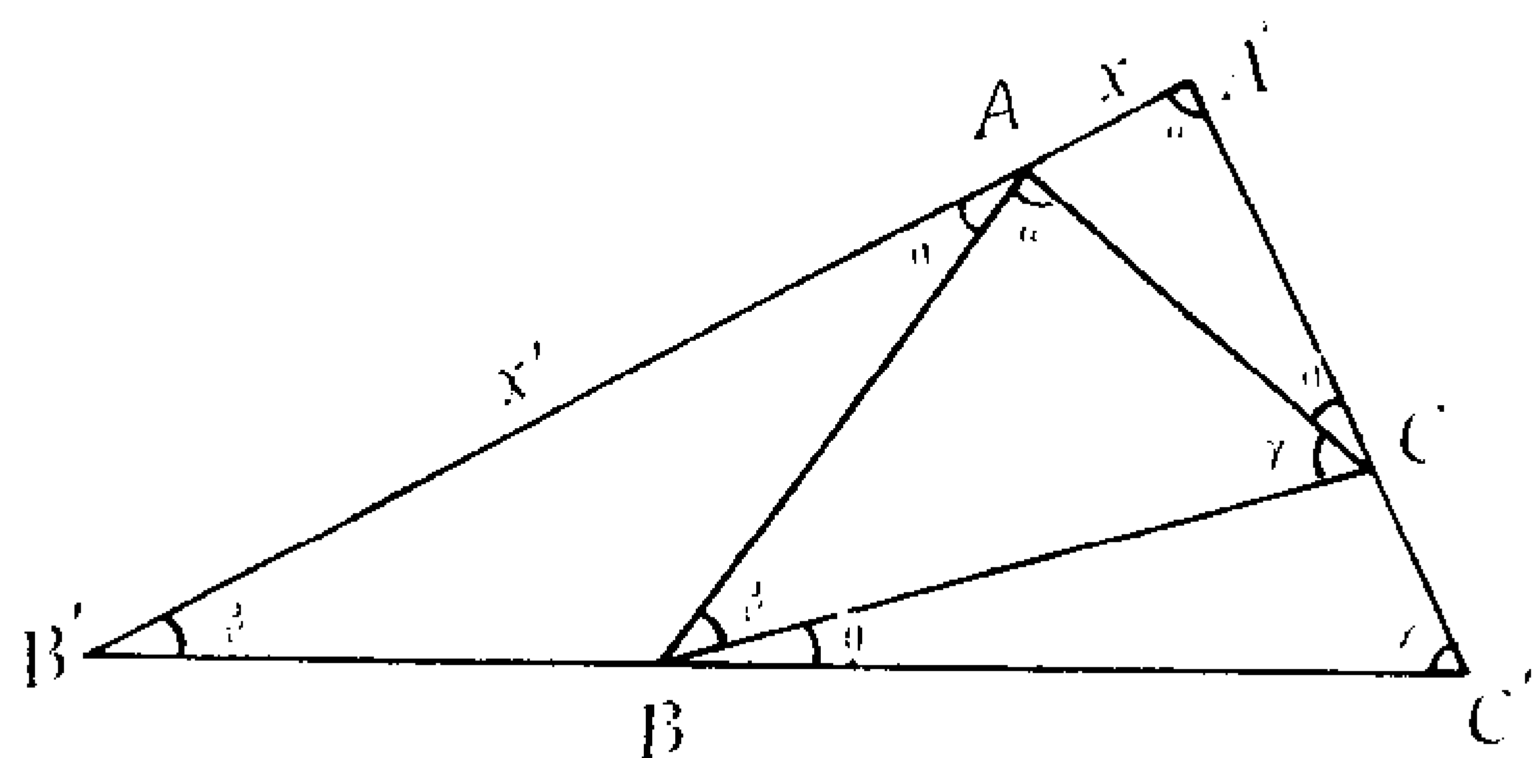


图　1

这样一来，凡按本文开头所说的方法作出的 $\triangle A'B'C'$ 之顶点 A'、B'、C' 都分别在圆 C_1、C_2、C_3 上. 反之，过 A 作 $A'B'$ 交 C_1、C_2 于 A'、B'，且 $B'B$ 与 $A'C$ 相交于 C^*，若 $\angle B'AB = \theta$，由 C_1、C_2 的构造，我们可以得到 $\angle A' = \alpha$. $\angle B = \beta$，$\angle CBC^* = \theta$，进而又有 $\angle B'C^*A' = \gamma$，$\angle A'CA = \theta$. 因此 $C^* \in C_3$（我们仍用 C' 记 C^*）. 于是过 A 点任做 $A'B'$ 分别交 C_1、C_2 于 A'、B'，那么 $B'B$、$A'C$ 必相交于 C_3 上的一点 C'，且 $\angle B'AB = \angle A'CA = \angle C'BC = \theta$.

综上所述，按本文开头所说的方法作出的 $\triangle A'B'C'$ 有

性质 1　$\triangle A'B'C' \backsim \triangle ABC$，且 A'、B'、C' 的轨迹分别是圆

C_1、C_2、C_3.

2. 设 $AA'=x, AB'=x'$，由正弦定理得 $x=\frac{b\sin\theta}{\sin\alpha}, x'=\frac{c\sin(\beta+\theta)}{\sin\beta}$，由于 $\triangle A'B'C' \backsim \triangle ABC$，设其相似比为 $K(\theta)$，于是

$$K(\theta)=\frac{x+x'}{c}=\frac{b\sin\theta}{c\sin\alpha}+\frac{\sin(\beta+\theta)}{\sin\beta},$$

令 $\frac{b}{c\sin\alpha}=m, \frac{1}{\sin\beta}=n$，则

$$\begin{aligned}K(\theta)&=m\sin\theta+n\sin(\beta+\theta)=(m+n\cos\beta)\sin\theta+n\sin\beta\cos\theta\\&=\sqrt{(m+n\cos\beta)^2+(n\sin\beta)^2}\sin(\theta+\varphi)\\&=\sqrt{m^2+2mn\cos\beta+n^2}\sin(\theta+\varphi),\end{aligned}$$

其中 $\operatorname{tg}\varphi=\frac{n\sin\beta}{m+n\cos\beta}$. 由 m、n 之值，我们进一步得到

$$\begin{aligned}\operatorname{tg}\varphi&=\frac{n\sin\beta}{m+n\cos\beta}=\frac{1}{\frac{b}{c\sin\alpha}+\frac{\cos\beta}{\sin\beta}}=\frac{c\sin\alpha\sin\beta}{b\sin\beta+c\sin\alpha\cos\beta}\\&=\frac{\sin\alpha\sin\beta\sin\gamma}{\sin^2\beta+\sin\alpha\sin\gamma\cos\beta}=\frac{2\sin\alpha\sin\beta\sin\gamma}{\sin^2\alpha+\sin^2\beta+\sin^2\gamma},\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}m^2+2mn\cos\beta+n^2&=\left(\frac{b}{c\sin\alpha}\right)^2+\frac{2b\cos\beta}{c\sin\alpha\sin\beta}+\frac{1}{\sin^2\beta}\\&=\frac{\sin^2\beta}{\sin^2\alpha\sin^2\gamma}+\frac{2\sin\beta(\sin^2\alpha+\sin^2\gamma-\sin^2\beta)}{\sin\alpha\sin\beta\sin\gamma\cdot 2\sin\alpha\sin\gamma}+\frac{1}{\sin^2\beta}\\&=\frac{1}{\sin^2\alpha}+\frac{1}{\sin^2\beta}+\frac{1}{\sin^2\gamma},\end{aligned}$$

于是我们得到

性质 2
$$K(\theta)=\sqrt{\frac{1}{\sin^2\alpha}+\frac{1}{\sin^2\beta}+\frac{1}{\sin^2\gamma}}\sin(\theta+\varphi), \tag{1}$$

$$\operatorname{tg}\varphi=\frac{2\sin\alpha\sin\beta\sin\gamma}{\sin^2\alpha+\sin^2\beta+\sin^2\gamma}. \tag{2}$$

3. 当 $\triangle ABC$ 给定时，由性质 2 可知 φ 的值也随之而定.

(1) 当 $\theta+\varphi=0$，即 $\theta=-\varphi$ 时，$K(-\varphi)=0$，也就是说按本文开头所说的方式作出的 $\triangle A'B'C'$（此时实际的作法是过 A、B、C

分别向三角形的形内作与相应的边成φ的夹角）即缩为一点 M，由文[1]、[2]可知，这个点 M 即为 $\triangle ABC$ 的一个勃罗卡点. 于是有

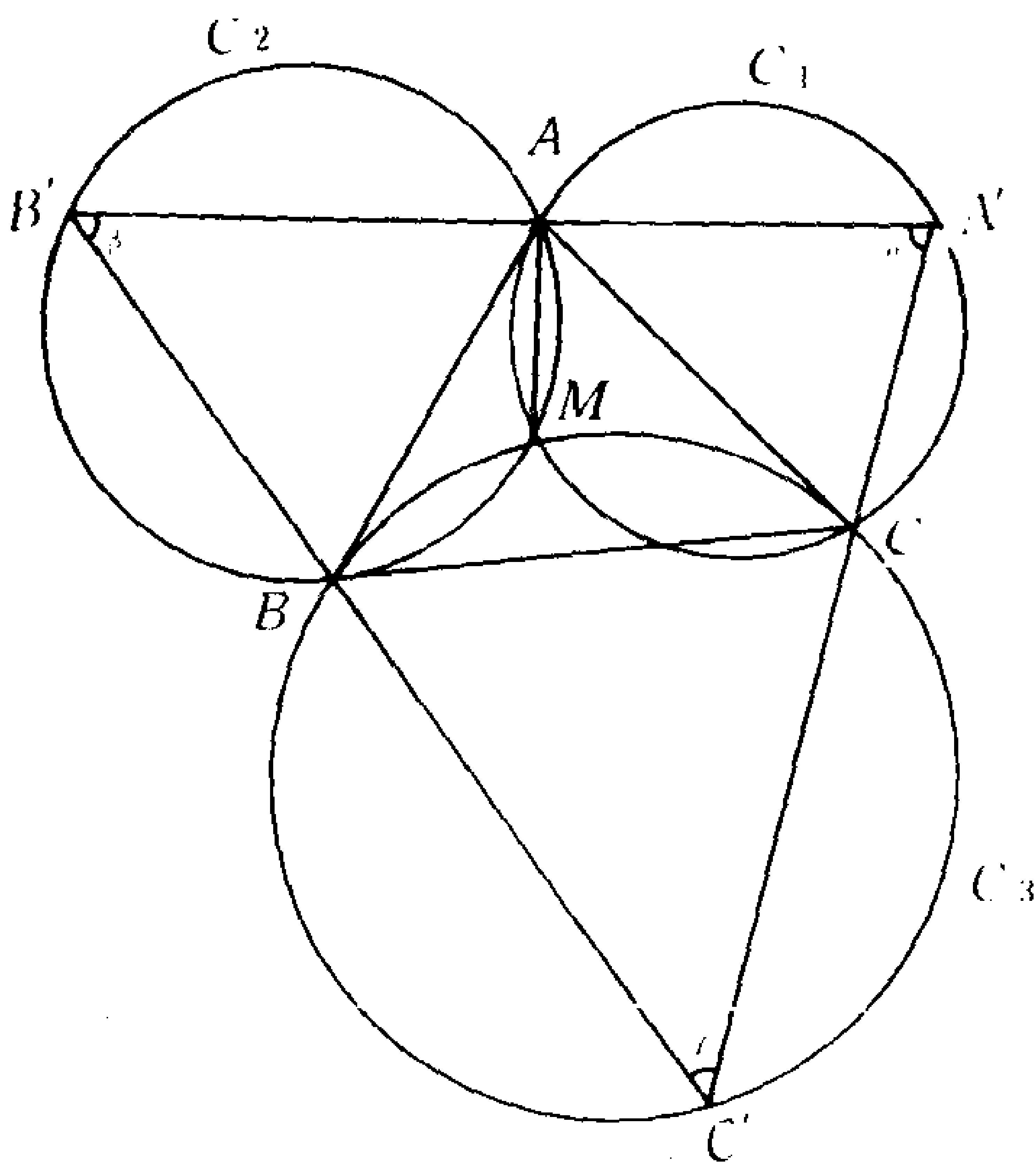


图 2

性质 3 当 $\theta = -\varphi$ 时 $\triangle A'B'C'$ 缩为一个勃罗卡点.

(2) 当 $\theta + \varphi = \dfrac{\pi}{2}$，即 $\theta = \dfrac{\pi}{2} - \varphi$时，由(1)式可知，按本文开头所说的方式作出的 $\triangle A'B'C'$ 是所有这些三角形中面积最大的一个，于是得到

性质 4 $\max S_{\triangle A'B'C'} = \left(\dfrac{1}{\sin^2\alpha} + \dfrac{1}{\sin^2\beta} + \dfrac{1}{\sin^2\gamma}\right) S_{\triangle ABC}$.

顺便指出，当 $\triangle ABC$ 的一个勃罗卡点 M 作出后，过 A 点作 $A'B' \perp AM$，$A'B'$ 分别交圆 C_1、C_2 于 A'、B'，且 BB' 与 $A'C'$ 相交于 C'，那么 $\triangle A'B'C'$ 即为性质 4 所描述的三角形（见图 2）.

参考文献

[1] 黄书绅，关于三角形中的一个特殊点，《数学通报》，1994 年第 2 期，24 — 25.

[2] 沈建平，勃罗卡点的一个计算公式，《数学通报》，1993 年第 3 期，23 — 24.

三角形中的一个几何点集

陕西咸阳电力技校　　王小勇

本文分析了三角形中的一个几何点集问题，发现在三角形中存在一个曲边三角形点集，过此曲边三角形内部每一点，可作三条线段平分三角形的周长；过此曲边三角形边界上每一点可作两条；过此曲边三角形之外每点可作一条，文中给出了所求线段的公式．根据公式即可用直尺圆规作出所求的线段．

这里，我们用(AB)表示不含两端点的线段AB，$(AB]$表示为不含端点A，但含端点B的线段AB.

引理1　如图1，如果AA_1，BB_1平分$\triangle ABC$之周长，那么连接CG并延长与AB交于C_1的线段CC_1亦平分$\triangle ABC$之周长.

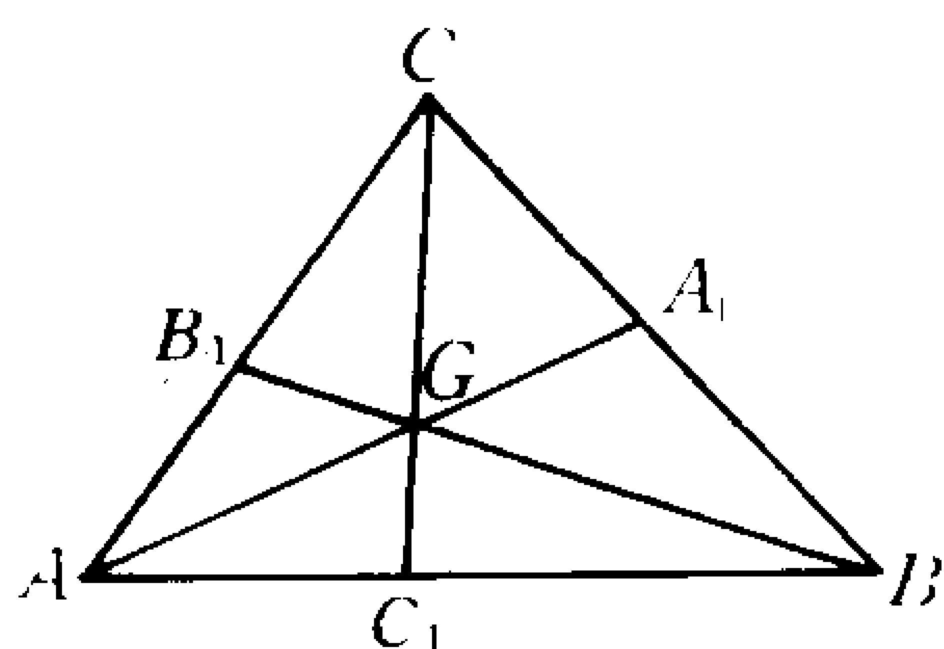


图　1

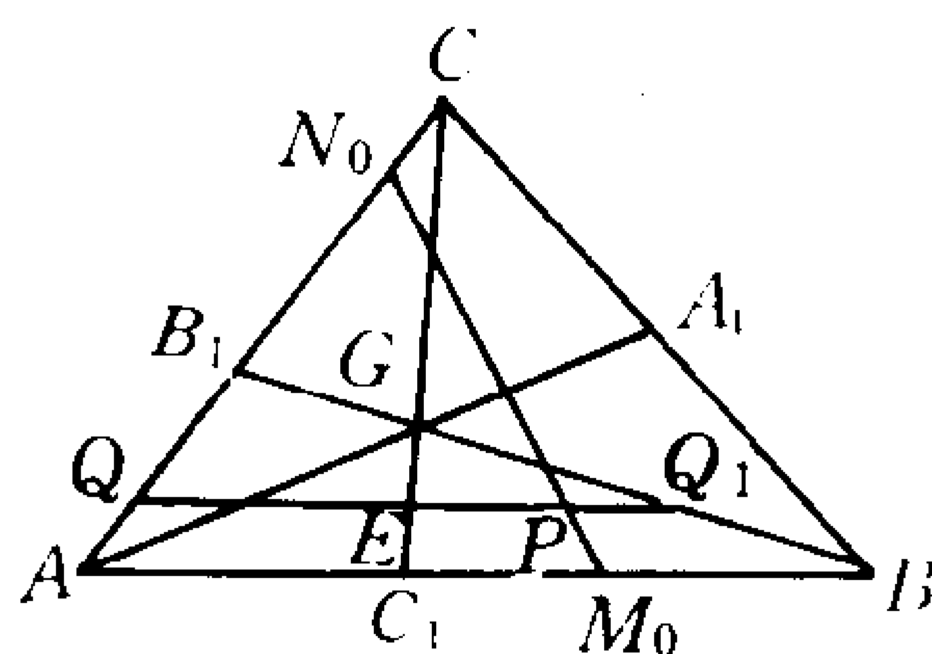


图　2

设三角形上已知点P不在点G上，过G点且平分三角形之周长的线段AA_1，BB_1，CC_1分三角形为六个小三角形（如图1），对于所讨论的问题，此六个小三角形地位完全平等，不妨设P位于$\triangle GC_1B$中.

设M_0N_0为过P点与AC交于N_0点与AB交于M_0点且平分

$\triangle ABC$之周长的线段(如图2),过P作$QPQ_1 \parallel AB$与AC交于Q点,与BB_1交于Q_1点,于是

$$\frac{PQ}{AM_0}=\frac{QN_0}{AN_0}=\frac{AN_0-AQ}{AN_0}, \text{即 } AM_0=\frac{PQ\cdot AN_0}{AN_0-AQ},$$

又 $AM_0+AN_0=t$ (t为$\triangle ABC$之半周长),

所以 $$\frac{PQ\cdot AN_0}{AN_0-AQ}+AN_0=t.$$

整理得到关于AN_0的一元二次方程:

$$AN_0^2-(AQ-PQ+t)\cdot AN_0+t\cdot AQ=0,$$

解此方程得

$$AN_0=\frac{(AQ-PQ+t)\pm\sqrt{(AQ-PQ+t)^2-4t\cdot AQ}}{2}. \quad (1)$$

反之,把上面的步骤倒推,易见由(1)所确定的点N_0满足$AM_0+AN_0=t$,又AN_0还须满足条件:

$$t-AB=AB_1\leqslant AN_0\leqslant AC,$$

即 $$2t-2\cdot AB\leqslant(AQ-PQ+t)+\sqrt{(AQ-PQ+t)^2-4t\cdot AQ}\leqslant 2\cdot AC, \quad (2)$$

$$2t-2\cdot AB\leqslant(AQ-PQ+t)-\sqrt{(AQ-PQ+t)^2-4t\cdot AQ}\leqslant 2\cdot AC. \quad (3)$$

利用等式$EQ=(1-\frac{AQ}{AC})\cdot(t-AC)$及$Q_1Q=(1-\frac{AQ}{t-AB})\cdot AB$,将不等式(2)化简为

$$EQ\leqslant PQ\leqslant Q_1Q.$$

所以,当P在$\triangle C_1BG$中($P\neq G$)时不等式(2)永远成立.即(1)式对应的根号前为加号的AN_0永远是所需求的解.

利用等式$AQ=(1-\frac{QQ_1}{AB})\cdot AB_1=(1-\frac{QQ_1}{AB})\cdot(t-AB)$将不等式(3)化简为

$$Q_1Q\leqslant PQ, \text{即 } P=Q_1 \text{ 在 } GB \text{ 上}.$$

当$(AQ-PQ+t)^2-4t\cdot AQ>0$时，由(3)知

$$AQ-PQ-t+2\cdot AB>0,\text{即}QQ_1<AQ+2\cdot AB-t.$$

把$QQ_1=AB(1-\frac{AQ}{t-AB})$代入得

$$AQ>\frac{(t-AB)^2}{t}.$$

所以 $BQ_1>\frac{t-AB}{t}\cdot BB_1$. 在$BB_1$上取点$B_0$使$BB_0=\frac{t-AB}{t}\cdot BB_1$，则 $BQ_1>BB_0$，即P在(GB_0)中.

反之，因AQ的函数(此时$P=Q_1$)

$$f(AQ)=(AQ-PQ+t)^2-4t\cdot AQ$$
$$=\left(\frac{t}{t-AB}\cdot AQ-t+AB\right)^2$$

仅当$AQ=\frac{(t-AB)^2}{t}$时有最小值0，此时$BQ_1=\frac{t-AB}{t}\cdot BB_1=BB_0$，故当$P=Q_1$，位于$(GB_0)$中时$f(AQ)>0$，即

$$(AQ-PQ+t)^2-4t\cdot AQ>0.$$

所以AN_0有两解的充要条件为P在(GB_0)上，由此得

引理2 在线段BB_1上取点B_0使$BB_0=\frac{t-AB}{t}\cdot BB_1$，当$P$位于$(GB_0)$中时，过$P$点存在两条线段与$(AB)$，$(AC]$相交且平分$\triangle ABC$之周长；过$\triangle GC_1B$的其它(不等于$G$)的点存在一条.

由(1)知，引理2中的线段可用圆规直尺作出，作法是初等的，故略去.

如图3类似于引理2的讨论可求出过P点且与AB，BC相交线段M_0N_0. 与(BC)所截线段BN_0为

$$BN_0=\frac{(BQ-PQ+t)\pm\sqrt{(BQ-PQ+t)^2-4t\cdot BQ}}{2},\quad(4)$$

且BN_0满足不等式

$$t-AB=A_1B\leqslant BN_0\leqslant BC.\quad(5)$$

图　3　　　　　　　　图　4

利用等式 $BQ=\left(1-\frac{QE}{t-BC}\right)\cdot BC$ 可将不等式(5)化简为 $Q_1Q\leqslant PQ$ 且 $QE\leqslant PQ$，所以不等式(5)不成立，BN_0 不存在.

引理3　若过 P 点的线段 MN 与 (AB)，(BC) 相交，则 MN 不能等分 $\triangle ABC$ 之周长.

如图4，同样可求得过 P 点且与 AC、BC 相交的线段 M_0N_0 在 BC 上所截线段 CN_0 为

$$CN_0=\frac{(CQ-PQ+t)\pm\sqrt{(CQ-PQ+t)^2-4t\cdot CQ}}{2}, \tag{6}$$

当 $(CQ-PQ+t)^2-4t\cdot CQ<0$ 时，CN_0 不存在，$(CQ-PQ+t)^2-4t\cdot CQ\geqslant 0$ 时 CN_0 存在的条件为：

$$t-AC=A_1C\leqslant CN_0\leqslant BC. \tag{7}$$

利用等式　$EQ=(1-\frac{CQ}{AC})\cdot(t-AC)$ 及 $Q_1Q=(1-\frac{CQ}{t-BC})\cdot BC$ 可将不等式(7)化简为 $EQ\leqslant PQ$，$Q_1Q\leqslant PQ$.

所以点 P 在 $\triangle C_1GB$ 中时不等式(7)永远成立，故 CN_0 存在的条件为

$$(CQ-PQ+t)^2-4t\cdot CQ\geqslant 0$$

(等号成立时 CN_0 仅有一解，不等号成立时 CN_0 有两解).

而满足 $(CQ-PQ+t)^2-4t\cdot CQ=0$ 的点 P 的集合是一段上凸的抛物线 Γ，Γ 与 BB_1 相切.(关于 Γ 的结构见后文)

引理4　过 Γ 下方任意点，没有平分 $\triangle ABC$ 周长且与 $(AC]$

和(BC)相交的线段；过Γ上任意点，有一条平分$\triangle ABC$周长且与$(AC]$和(BC)相交的线段；过Γ上方任意点有两条平分$\triangle ABC$周长且与$(AC]$，(BC)相交的线段.

如图 5 过A_0,B_0,C_0作引理 4 中的抛物线，组成一曲边三角形$A_0B_0C_0$，其中：

$$\frac{AA_0}{AA_1}=\frac{t-AC}{t},\frac{BB_0}{BB_1}=\frac{t-BA}{t},\frac{CC_0}{CC_1}=\frac{t-CB}{t}.$$

总结引理 1—— 引理 4 可得如下

定理 过曲边三角形内任意一点存在三条线段平分$\triangle ABC$的周长，过曲边三角形上任意一点存在两条，过$\triangle ABC$其余点存在一条.

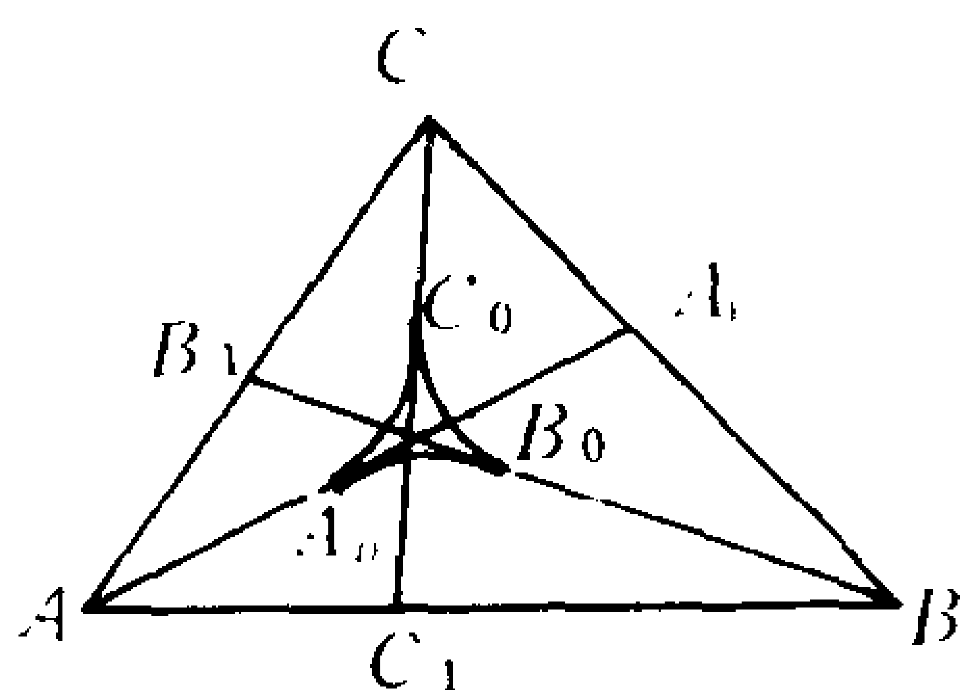


图 5

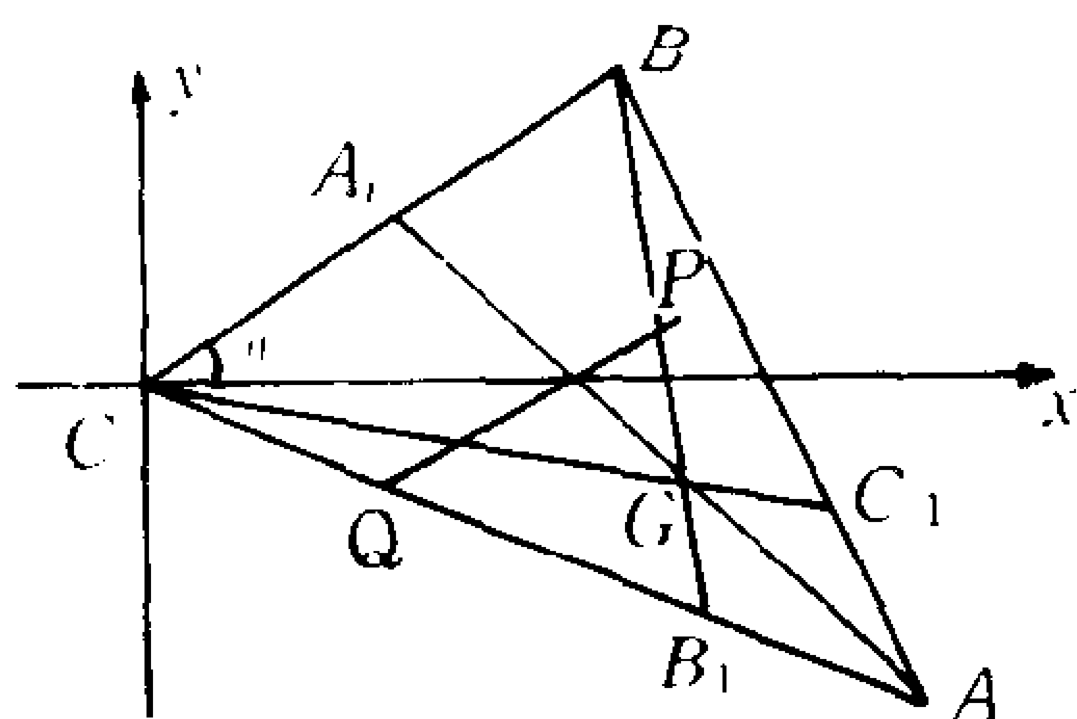


图 6

下面讨论Γ的结构．如图 6，以C为坐标原点，$\angle C$的平分线为x轴正向建立坐标系，设$A(b\cos\theta,-b\sin\theta)$，$B(a\cos\theta,a\sin\theta)$（$\theta=\frac{1}{2}\angle ACB$），$P(x_0,y_0)$，过$P$作$PQ\parallel BC$且交$AC$于$Q$，于是可得到$PQ$所在的直线方程为

$$y-y_0=\operatorname{tg}\theta(x-x_0),\tag{8}$$

AC所在的直线方程为

$$y=-x\operatorname{tg}\theta.\tag{9}$$

把(9)代入(8)可解得Q点的坐标为

$$\begin{cases} x_Q = \frac{1}{2}x_0 - \frac{1}{2}y_0\mathrm{ctg}\theta, \\ y_Q = -\frac{1}{2}x_0\mathrm{tg}\theta + \frac{1}{2}y_0. \end{cases}$$

于是

$$|CQ| = \frac{\csc\theta}{2}(x_0\mathrm{tg}\theta - y_0),$$

$$|PQ| = \frac{\csc\theta}{2}(x_0\mathrm{tg}\theta + y_0),$$

$$|CQ| - |PQ| = \frac{\csc\theta}{2}(x_0\mathrm{tg}\theta - y_0) - \frac{\csc\theta}{2}(x_0\mathrm{tg}\theta + y_0)$$

$$= -y_0\csc\theta.$$

所以，由$(|CQ| - |PQ| + t)^2 = 4t \cdot |CQ|$ 得

$$(t - y_0\csc\theta)^2 = 4t \cdot \frac{1}{2}\csc\theta(x_0\mathrm{tg}\theta - y_0),$$

化简整理得

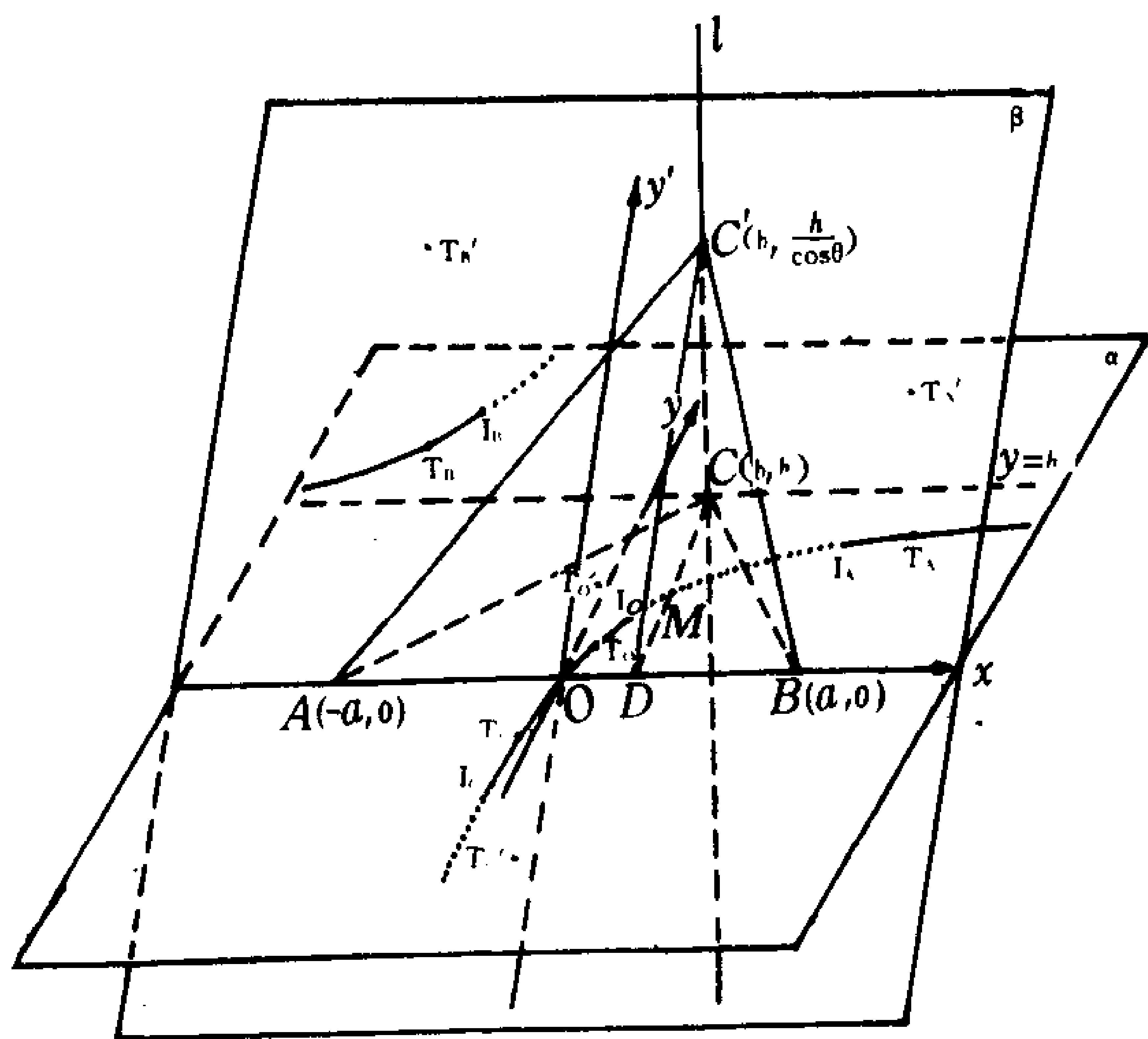
$$y_0^2 = 2t\sin\theta\mathrm{tg}\theta(x_0 - \frac{1}{2}t\cos\theta),$$

即 $P(x_0, y_0)$ 的轨迹是上面抛物线之一段，即为 Γ.

一个轨迹问题

江苏省如东县中学　**缪继高**

问题:“长轴平行于$\triangle ABC(AC \neq BC)$的边$AB$的$\triangle ABC$的所有内切椭圆和旁切椭圆的中心轨迹是同一双曲线的四段弧,并且AB边的中点,AB边上高线的中点以及$\triangle ABC$的内心和旁心都在这个双曲线上.”



本文给出这个轨迹问题的证明.

如图,在$\triangle ABC$所在平面α内以AB边所在直线为x轴,AB边的中垂线为y轴,建立直角坐标系.并记$\triangle ABC$的顶点坐标是$A(-a,0)$,$B(a,0)$,$C(b,h)$,这里不妨设$b>0$.

因椭圆可由圆通过平行投影得到,故考虑过点C作直线$l \perp \alpha$,在l上任取点C',设过A,B,C'的平面是β,且β与α成角$\theta(0^{\circ} \leqslant \theta < 90^{\circ})$.在$\beta$内作$C'D \perp AB$于$D$,连$CD$,则$\angle C'DC=\theta$.再在$\beta$内作轴$Oy' \perp Ox$,建立直角坐标系$xOy'$,其中任一点的坐标记为$(x,y')$,显然$y'=y/\cos\theta$.

于是可求得直线 AC' 的方程是

$$\frac{hx}{\cos\theta}-(b+a)y'+\frac{ah}{\cos\theta}=0,$$

直线 BC' 的方程是

$$\frac{hx}{\cos\theta}-(b-a)y'-\frac{ah}{\cos\theta}=0.$$

设 $\triangle ABC'$ 的内切圆圆心是 $T_0{}'$，三个旁切圆圆心分别是 $T_A{}'$，$T_B{}'$，$T_C{}'$（如图）．现在把这四点统一记为 $T'(x,y')$，则有

$$y'=\pm\frac{\dfrac{hx}{\cos\theta}-(b+a)y'+\dfrac{ah}{\cos\theta}}{\sqrt{\dfrac{h^2}{\cos^2\theta}+(b+a)^2}} \tag{1}$$

和

$$y'=\pm\frac{\dfrac{hx}{\cos\theta}-(b-a)y'-\dfrac{ah}{\cos\theta}}{\sqrt{\dfrac{h^2}{\cos^2\theta}+(b-a)^2}}. \tag{2}$$

这里 ① 和 ② 右端的符号有四种搭配方式，分别对应于 $T_O{}'$，$T_A{}'$，$T_B{}'$，$T_C{}'$ 所应满足的几何条件．

设 $T_O{}'$，$T_A{}'$，$T_B{}'$，$T_C{}'$ 在 α 中的射影分别是 T_O，T_A，T_B，T_C，则它们分别是 $\triangle ABC$ 的长轴平行于 AB 边的内切椭圆和旁切椭圆的中心，现在把它们统一记为 $T(x,y)$．易见，点 T 随着 θ 的变化而运动．

将 $y'=y/\cos\theta$ 代入 ① 和 ②，则得

$$\frac{y}{\cos\theta}\sqrt{\frac{h^2}{\cos^2\theta}+(b+a)^2}=\pm\left[\frac{hx}{\cos\theta}-\frac{(b+a)y}{\cos\theta}+\frac{ah}{\cos\theta}\right] \tag{3}$$

和

$$\frac{y}{\cos\theta}\sqrt{\frac{h^2}{\cos^2\theta}+(b-a)^2}=\pm\left[\frac{hx}{\cos\theta}-\frac{(b-a)y}{\cos\theta}-\frac{ah}{\cos\theta}\right]. \tag{4}$$

在 ③ 和 ④ 两边分别乘以 $\cos\theta$，然后两边平方后相减，即得

$$4aby^2=[hx-(b+a)y+ah]^2$$

$$-[hx-(b-a)y-ah]^2,$$

整理得

$$(x+b)(y-h)=-bh. \quad ⑤$$

此即点 T 的轨迹方程. 它表示中心在点$(-b,h)$,渐近线平行于坐标轴的双曲线. 但是 T 的轨迹仅是此双曲线的四段弧.

我们考虑两种极端情形. 首先当 C' 与 C 重合时,所论的点即为 $\triangle ABC$ 的内心和三个旁心. 而当 $CC'\to+\infty$ 时,可以认为 AC' $/\!/$ BC' $/\!/$ CC',于是 $AC'\perp\alpha$,$BC'\perp\alpha$,此时 T_O' 和 T_C' 在 α 中的射影是边 AB 的中点 O;但 T_A',T_B' 在 α 中的射影 T_A,T_B 却趋向无穷远,且向直线 $y=h$ 逼近.

根据以上分析,在 xOy 平面内,点 T 的轨迹是双曲线 ⑤ 的四段弧. 其中 T_O 的轨迹是由内心 I_O 到边 AB 的中点 O(不包括点 O)的一段弧;T_A 和 T_B 的轨迹是分别从旁心 I_A 和 I_B 出发并向直线 $y=h$ 逐渐无限逼近的两段弧;T_C 的轨迹是连结旁心 I_C 与边 AB 的中点 O(不包括点 O) 的一段弧.

除了点 O,I_O,I_A,I_B,I_C 都在双曲线 ⑤ 上之外,显然点 $M(b,\frac{h}{2})$ 的坐标亦适合 ⑤,即 $\triangle ABC$ 的 AB 边上高线的中点也在双曲线 ⑤ 上.

形如 ⑤ 的双曲线只须两个独立条件便可确定,我们证明了有六个特殊点在它上面,应当说是较强的结论.

至此,本文开头提出的问题得到了完全的证明.

凸 n 边形的顶点三角形问题

浙江富阳中学　　许康华

文[1]探讨了单位面积的平面凸图形内任给 n 个点，以这些点为顶点组成的 C_n^3 个三角形中，它们的面积的最小值，获得了两结果：

1.　单位面积的平面凸图形内任给 $n(n \geqslant 6)$ 个点，这些点组成的三角形中，至少有一个三角形的面积 $\leqslant \frac{1}{n}$.

2.　单位面积的平面凸图形内任给 $n(n \geqslant 10)$ 个点，这些点组成的三角形中，至少有一个三角形的面积 $\leqslant \frac{1}{n+2}$.

本文将对上述问题的特殊情况：单位面积的凸 n 边形的顶点组成的三角形中，它们面积的最小值，作些探讨并建立两个有意思的结果.

定理 1　由凸 n 边形的顶点组成的三角形中，面积最小的三角形只能是边三角形.

证明　当 $n=3$、4 时显然. 当 $n>4$ 时，分两种情况.

(i) 三角形恰有一条边是凸 n 边形 $A_0A_1A_2\cdots A_{n-1}$ 的边. 不妨设此边为 A_0A_1，如图 1. 设 A_k 是到 A_0A_1 距离最远的 n 边形的一顶点. 当 $2<i\leqslant k$ 时，仅 A_k 与 A_{k-1} 有可能在同一水平线上，除此情况之外，A_i 必在 A_{i-1} 的上方. 否则，可设 i_0 是 A_i 不在 A_{i-1} 上方的最小的 i，则线段 $A_{i_0}A_{i_0-2}$ 将在此凸 n 边形之外了，这与它的凸性矛盾. 同理可知，当 $k<i<n$ 时，除 A_kA_{k+1} 可能在同一水平线上外，A_{i-1} 必在 A_i 上方. 因此，当 $n>4$ 时，对任一 i，$2<i<n-1$，必有

$S_{\triangle A_0A_1A_i} > \min\{S_{\triangle A_0A_1A_2}, S_{\triangle A_0A_1A_{n-1}}\}$

$\geqslant \min\{S_{\triangle A_0A_1A_2}, S_{\triangle A_1A_2A_3}, \cdots, S_{\triangle A_{n-1}A_0A_1}\}$.

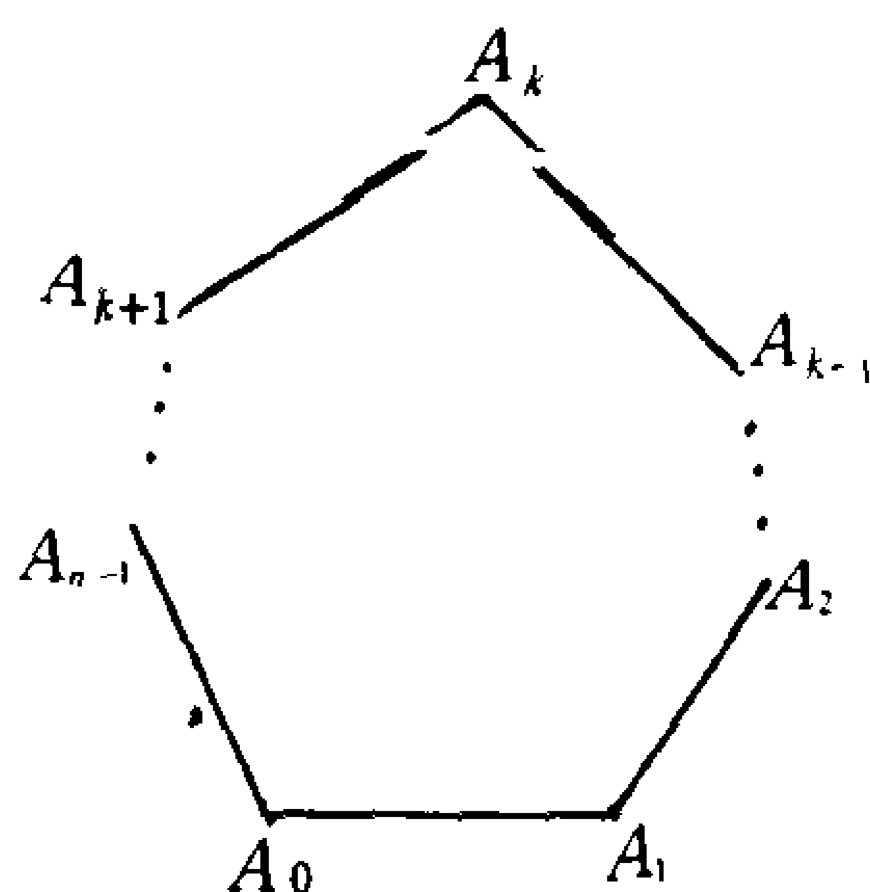


图 1

(ii) 三角形三边均非凸 n 边形 $A_0A_1A_2\cdots A_{n-1}$ 的边. 不妨设此三角形为 $\triangle A_0A_iA_j$，如图 2. 此时，考虑凸多边形 $A_0A_1A_2\cdots A_j$，因 $\triangle A_0A_iA_j$ 恰有一边 A_jA_0 为此凸多边形的边，由 (i) 知：$S_{\triangle A_0A_iA_j} > \min\{S_{\triangle A_0A_1A_2}, S_{\triangle A_1A_2A_3}, \cdots,$
$S_{\triangle A_{j-1}A_jA_0}, S_{\triangle A_jA_0A_1}\}$，
而上式右边花括号内用到的诸三角形至少有一边为原来凸 n 边形的边，从而再据(i) 即可得

$$S_{\triangle A_0A_iA_j} > \min\{S_{\triangle A_0A_1A_2}, S_{\triangle A_1A_2A_3}, \cdots, S_{\triangle A_{n-1}A_0A_1}\}.$$
□

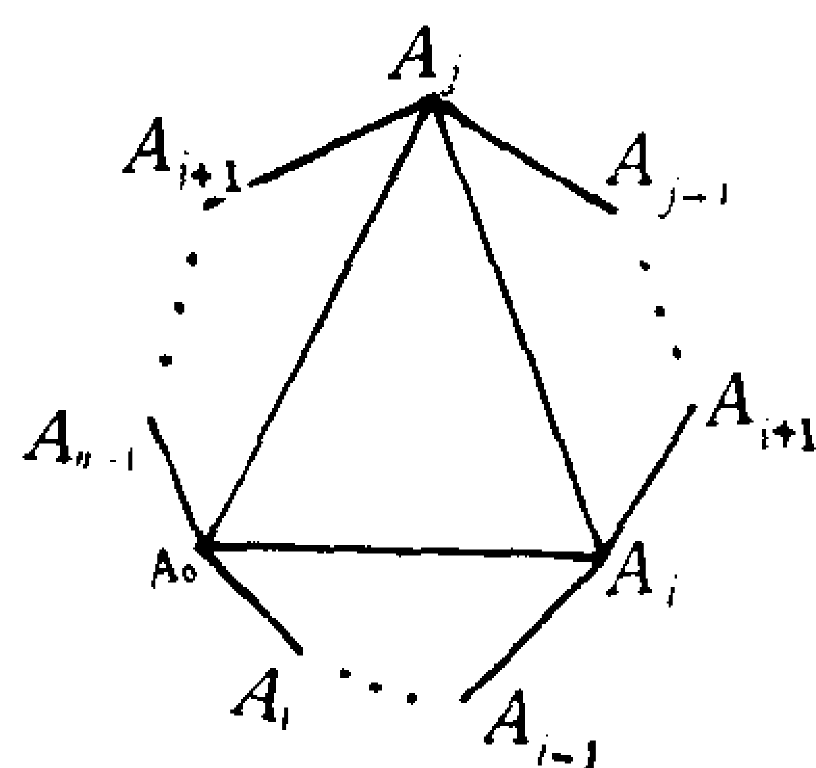


图 2

定理 2 用 P_n 表示一个单位面积的凸 n 边形，$f(P_n)$ 表示它的顶点三角形的最小面积，再记 P_n 全体所成的集为 α_n. 如果对任一给定的 P_n，当其 n 个边三角形面积不全相等时，那么必成立

$$f(P_n) < \rho_n = \sup_{P_n \in \alpha_n} f(P_n).$$

证明 由定理 1，面积等于 $f(P_n)$ 的一定是边三角形，现对此种三角形个数 $k(1 \leqslant k \leqslant n-1)$ 用数学归纳法.

(i) 当 $k=1$ 时，设单位面积凸 n 边形 $A_0A_1A_2\cdots A_{n-1}$ 面积最小的三角形为 $\triangle A_0A_1A_2$，如图 3. 在 A_0A_1 延长线上取与 A_1 邻近的 A_1' 点，连 $A_1'A_2$，过 A_1 作 $A_1A_2' \mathbin{/\mkern-6mu/} A_1'A_2$ 交 A_2A_3 于 A_2'，连 $A_1'A_2'$ 交 A_1A_2 于 P，A_0A_2 于 Q. 因四边形 $A_1A_1'A_2A_2'$ 为梯形或平行四边形，故 $S_{\triangle A_1A_1'P} = S_{\triangle A_2A_2'P}$，这样，我们若将原凸 n 边形两顶点 A_1, A_2 相应变为 A_1', A_2'，就得到另一个也是单位面积的凸 n 边形

$A_0A_1'A_2'A_3'\cdots A_{n-1}$，设其为 P_n'.

因 $S_{\triangle A_0A_1'A_2'} > S_{\triangle A_0A_1'Q}$

$= S_{四边形A_0A_1PQ} + S_{\triangle A_1A_1'P}$

$= S_{四边形A_0A_1PQ} + S_{\triangle A_2A_2'P}$

$> S_{\triangle A_0A_1A_2}$，

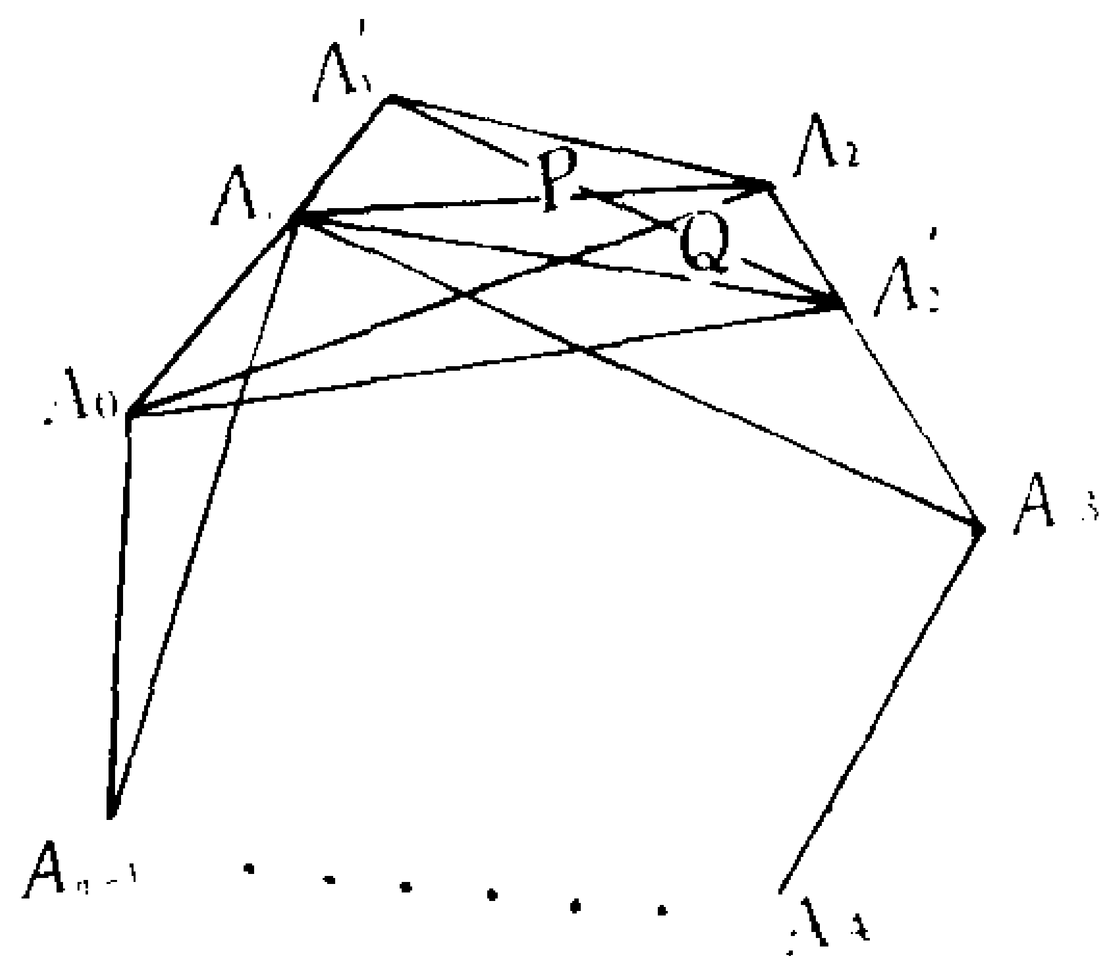


图 3

令 $\varepsilon = S_{\triangle A_0A_1'A_2'} - S_{\triangle A_0A_1A_2}$，如果让 A_1' 充分趋近于 A_1，就能使正数 ε 足够小，而因 A_1、A_2 变为 A_1'、A_2' 后，与 $\triangle A_0A_1A_2$ 相邻的两边三角形 $\triangle A_{n-1}A_0A_1$，$\triangle A_1A_2A_3$ 面积变化也足够小，其它边三角形显然不变. 因此，还能使 $\triangle A_0A_1'A_2'$ 成为 P_n' 的边三角形中面积最小者，据定理 1，知 $f(P_n') = S_{\triangle A_0A_1'A_2'}$，从而

$$f(P_n) < f(P_n') \leqslant \sup_{P_n\in\alpha_n} f(P_n).$$

(ii) 假设定理对 $\leqslant k-1(1\leqslant k\leqslant n-1)$ 的数成立，往证 k 的情形.

如果在这 k 个具有最小面积的边三角形中存在 $\triangle A_0A_1A_2$，与它相邻的两边三角形的面积都大于它的面积. 那么，照(i) 的处理，将单位凸 n 边形 $A_0A_1A_2\cdots A_{n-1}$ 变为单位凸 n 边形 $A_0A_1'A_2'A_3'\cdots A_{n-1}$ 后，只要 $\varepsilon = S_{\triangle A_0A_1'A_2'} - S_{\triangle A_0A_1A_2}$ 足够小，就能使另 $k-1$ 个最小面积的边三角形，在变动后，仍为 P_n' 的边三角形中仅有的面积最小者，据定理 1，P_n' 恰有此 $k-1$ 个最小面积的三角形，由归纳假设，结论成立.

如果这 k 个具有最小面积的边三角形，都是两两相邻出现. 因 $k<n$，故必存在一个三角形如 $\triangle A_0A_1A_2$，与其相邻的两边三角形中，仅有一个与其等面积，如图 3，不妨设 $S_{\triangle A_{n-1}A_0A_1} = S_{\triangle A_0A_1A_2} < S_{\triangle A_1A_2A_3}$. 那么，仍照(i) 的处理，将 P_n 变为 P_n'，易见 $S_{\triangle A_{n-1}A_0A_1'} >$

$S_{\triangle A_{n-1}A_0A_1}$，因此，只要 ε 足够小，就能使两最小面积边三角形 $\triangle A_0A_1A_2$，$\triangle A_{n-1}A_0A_1$ 面积变大，并使另 $k-2$ 个最小面积边三角形仍为 P_n' 的最小面积三角形，且使 P_n' 的最小面积三角形仅此 $k-2$ 个. 由归纳假设，结论成立. □

最后，根据定理1和定理2，为求 ρ_n 的值，我们提出如下两个问题.

问题 1 边三角形面积相等的凸 n 边形，它的面积与边三角形面积之间存在怎样的关系？

问题 2 如果单位凸 n 边形边三角形面积相等，那么是否当此凸 n 边形为仿射正 n 边形时，边三角形面积最大？即

$$\rho_n = \frac{4}{n}\sin^2\frac{\pi}{n}$$

是否能成立？

参考文献

[1] 何明秋，陈计，平面凸图形内 n 点问题，《中学教研》(数学版)，1993年第12期，23－24.

[2] 王振，陈计，征解问题 39 的评述(Ⅱ)，《数学通讯》，1992年第10期，41－42.

取整函数、组合数与三角函数

上海市杨浦区教育学院　　余应龙

(一) 实数 x 的取整函数与三角函数

函数$[x]$表示不大于实数 x 的最大整数,也称 x 的整数部分.与它有关的函数$\{x\}$表示 x 的小数部分,显然有

$$x=[x]+\{x\},0\leqslant\{x\}<1.$$

函数$\{x\}$是周期为1的周期函数,而周期性是三角函数的一个重要性质,所以函数$\{x\}$与三角函数之间可能有某种联系.下面我们来寻找这种联系.设

$$f(x)=\begin{cases}0 & (x\in Z)\\ \dfrac{\operatorname{arcctg}(\operatorname{ctg}\pi x)}{\pi} & (x\notin Z).\end{cases}$$

我们将证明,对于任何 $x\in R$,有 $f(x)=\{x\}$.

1. 当 $x\in Z$ 时,显然有$\{x\}=0$,所以 $f(x)=\{x\}$.

2. 当 $x\notin Z$ 时,由于$\dfrac{\operatorname{arcctg}(\operatorname{ctg}\pi x)}{\pi}$的周期是1,$\{x\}$的周期也是1,所以只要在(0,1)上证明$\dfrac{\operatorname{arcctg}(\operatorname{ctg}\pi x)}{\pi}=\{x\}$就可以了.由于 $0<x<1$,所以$\{x\}=x$,而此时 $0<\pi x<\pi$,于是$\dfrac{\operatorname{arcctg}(\operatorname{ctg}\pi x)}{\pi}=\dfrac{\pi x}{\pi}=x$,所以有$\dfrac{\operatorname{arcctg}(\operatorname{ctg}\pi x)}{\pi}=\{x\}$.

由此可知,对一切 $x\in R$,有 $f(x)=\{x\}$.由于 $x=[x]+\{x\}$,所以就得到

$$[x]=\begin{cases} x & (x\in Z) \\ x-\dfrac{\operatorname{arcctg}(\operatorname{ctg}\pi x)}{\pi} & (x\notin Z). \end{cases} \tag{1}$$

(1) 式就是取整函数$[x]$与三角函数的关系，特别是当 x 是有理数时，$[x]$ 与三角函数还有进一步的关系.

(二) 有理数的取整函数与三角函数的关系

当 $x\in Q$ 时，设 $x=\dfrac{n}{m}$，$m,n\in Z$，$m>0$，$(m,n)=1$. 下面我们先研究当 $m=2$ 时，$[\dfrac{n}{m}]$ 与三角函数的关系.

当 $m=2$ 时，容易证明

$$\left[\frac{n}{2}\right]=\frac{2n-1+(-1)^n}{4}. \tag{2}$$

由于$(-1)^n=\cos n\pi=\sin\dfrac{2n+1}{2}\pi$，所以(2)式也可看作是取整函数与三角函数的关系. 为了研究对一般的 $m\geqslant 2$，$[\dfrac{n}{m}]$ 与三角函数的关系，我们引进以下几个三角恒等式：

1. $\sum\limits_{i=1}^{n}\cos(\alpha+(i-1)\beta)$

$$=\frac{\sin\dfrac{2\alpha+(2n-1)\beta}{2}-\sin\dfrac{2\alpha-\beta}{2}}{2\sin\dfrac{\beta}{2}}\quad \left(\sin\frac{\beta}{2}\neq 0\right). \tag{3}$$

证明 $\because 2\sin\dfrac{\beta}{2}\cos(\alpha+(i-1)\beta)$

$$=\sin\left(\alpha+\left(i-\frac{1}{2}\right)\beta\right)-\sin\left(\alpha+\left(i-\frac{3}{2}\right)\beta\right),$$

$\therefore 2\sin\dfrac{\beta}{2}\sum\limits_{i=1}^{n}\cos(\alpha+(i-1)\beta)$

$$= \sum_{i=1}^{n}\sin\left(\alpha+\left(i-\frac{1}{2}\right)\beta\right)-\sum_{i=1}^{n}\sin\left(\alpha+\left(i-\frac{3}{2}\right)\beta\right)$$

$$= \sum_{i=1}^{n}\sin\left(\alpha+\left(i-\frac{1}{2}\right)\beta\right)-\sum_{i=0}^{n-1}\sin\left(\alpha+\left(i-\frac{1}{2}\right)\beta\right)$$

$$= \sin\left(\alpha+\left(n-\frac{1}{2}\right)\beta\right)-\sin\left(\alpha-\frac{1}{2}\beta\right),$$

两边除以 $2\sin\frac{\beta}{2}$，就得(3)式. □

特别当 $\beta=\alpha$ 时，(3)式就变为

$$\sum_{i=1}^{n}\cos i\alpha=\frac{\sin\frac{2n+1}{2}\alpha}{2\sin\frac{1}{2}\alpha}-\frac{1}{2}. \tag{4}$$

当 $\beta=2\alpha$ 时，(3)式就变为

$$\sum_{i=1}^{n}\cos(2i-1)\alpha=\frac{\sin 2n\alpha}{2\sin\alpha}. \tag{5}$$

2. 设 $r,s,m\in N,r<m,s<m$，则有

$$r+\sum_{j=1}^{s}\frac{\sin\frac{2r+1}{m}j\pi}{\sin\frac{j}{m}\pi}=s+\sum_{i=1}^{r}\frac{\sin\frac{2s+1}{m}i\pi}{\sin\frac{i}{m}\pi}. \tag{6}$$

证明 $\because i<m,j<m,\therefore\sin\frac{i}{m}\neq 0,\sin\frac{j}{m}\neq 0$，由(4)式得

$$\text{左边}=r+\sum_{j=1}^{s}(1+\sum_{i=1}^{r}2\cos\frac{ij}{m}\pi)$$

$$=r+s+\sum_{i=1}^{r}\sum_{j=1}^{s}2\cos\frac{ij}{m}\pi$$

$$=r+s+\sum_{i=1}^{r}\left(\frac{\sin\frac{2s+1}{m}i\pi}{\sin\frac{i}{m}\pi}-1\right)$$

$$=s+\sum_{i=1}^{r}\frac{\sin\frac{2s+1}{m}i\pi}{\sin\frac{i}{m}\pi},$$

这样就证明了(6)式. □

与(6)式类似，还有一个等式：

$$\sum_{i=1}^{r}\operatorname{ctg}\frac{i\pi}{m}+\sum_{j=1}^{s}\frac{\cos\frac{2r+1}{m}j\pi}{\sin\frac{j}{m}\pi}=\sum_{j=1}^{s}\operatorname{ctg}\frac{j\pi}{m}+\sum_{i=1}^{r}\frac{\cos\frac{2s+1}{m}i\pi}{\sin\frac{i}{m}\pi}.$$

请读者自行证明该等式.

利用(6)式，就容易求出$\left[\frac{n}{m}\right]$与三角函数的关系了. 这一关系就是

$$\left[\frac{n}{m}\right]=\frac{1}{m}\left[n-\frac{2m-2+(-1)^{n}+(-1)^{m+n}}{4}\right.$$
$$\left.+\sum_{i=1}^{\left[\frac{m}{2}\right]}\frac{\sin\frac{2n+1}{m}i\pi}{\sin\frac{i}{m}\pi}\right]. \tag{7}$$

证明 设$n=mq+r,q,r\in Z,0\leqslant r\leqslant m-1$，则$q=\left[\frac{n}{m}\right]$，且$\frac{2n+1}{m}=2q+\frac{2r+1}{m}$，所以

1. 当$r\neq 0$时，由(6)得

$$r+\sum_{j=1}^{\left[\frac{m}{2}\right]}\frac{\sin\frac{2n+1}{m}j\pi}{\sin\frac{j}{m}\pi}=r+\sum_{j=1}^{\left[\frac{m}{2}\right]}\frac{\sin\frac{2r+1}{m}j\pi}{\sin\frac{j}{m}\pi}$$

$$=\left[\frac{m}{2}\right]+\sum_{i=1}^{r}\frac{\sin\frac{2\left[\frac{m}{2}\right]+1}{m}i\pi}{\sin\frac{i}{m}\pi}.$$

i) 若 m 为奇数,则 $2\left[\frac{m}{2}\right]+1=m$,所以 $\sin\frac{2\left[\frac{m}{2}\right]+1}{m}i\pi=0$,于是

$$r+\sum_{j=1}^{\left[\frac{m}{2}\right]}\frac{\sin\frac{2n+1}{m}j\pi}{\sin\frac{j}{m}\pi}=\left[\frac{m}{2}\right]=\frac{m-1}{2}.$$

由于 $r=n-m\left[\frac{n}{m}\right]$,所以上式可化为

$$\left[\frac{n}{m}\right]=\frac{1}{m}\left(n-\frac{m-1}{2}+\sum_{j=1}^{\left[\frac{m}{2}\right]}\frac{\sin\frac{2n+1}{m}j\pi}{\sin\frac{j}{m}\pi}\right). \tag{8}$$

ii) 若 m 为偶数,则 $2\left[\frac{m}{2}\right]+1=m+1$,所以 $\sin\frac{2\left[\frac{m}{2}\right]+1}{m}i\pi$ $=\sin\frac{m+1}{m}i\pi=\sin(i\pi+\frac{i}{m}\pi)=(-1)^i\sin\frac{i}{m}\pi$,于是

$$r+\sum_{j=1}^{\left[\frac{m}{2}\right]}\frac{\sin\frac{2n+1}{m}j\pi}{\sin\frac{j}{m}\pi}=\left[\frac{m}{2}\right]+\sum_{i=1}^{r}(-1)^i$$

$$=\frac{m}{2}-\frac{1-(-1)^r}{2}=\frac{m-1+(-1)^n}{2}.$$

由于 $r=n-m\left[\frac{n}{m}\right]$,所以上式可化为

$$\left[\frac{n}{m}\right]=\frac{1}{m}\left(n-\frac{m-1+(-1)^n}{2}+\sum_{j=1}^{\left[\frac{m}{2}\right]}\frac{\sin\frac{2n+1}{m}j\pi}{\sin\frac{j}{m}\pi}\right). \tag{9}$$

因为 $\frac{(-1)^n+(-1)^{m+n}}{2}=\begin{cases}0 & (m\text{ 为奇数})\\(-1)^n & (m\text{ 为偶数})\end{cases}$,所以(8),(9)两式可合并为(7)式.

2. 当 $r=0$ 时,$n=mq$,无论 q 是奇数还是偶数,都有 $(-1)^n$

$+(-1)^{n+m}=(-1)^{qm}+(-1)^{(q+1)m}=1+(-1)^{m}$,又因为 $\sin\frac{2n+1}{m}j\pi=\sin\frac{j}{m}\pi$,所以(7)式的右边可化为

$$\begin{aligned}&\frac{1}{m}\left(n-\frac{2m-1+(-1)^{m}}{4}+\sum_{j=1}^{[\frac{m}{2}]}1\right)\\&=\frac{1}{m}\left(n-\frac{2m-1+(-1)^{m}}{4}+[\frac{m}{2}]\right).\end{aligned}$$

由(2)式可知 $\frac{2m-1+(-1)^{m}}{4}=[\frac{m}{2}]$,所以上式为 $\frac{n}{m}$. (7)式也成立. 由于 $m=1$ 时,(7)式也成立,所以(7)式对一切整数 m 和 $n(m>0)$ 成立.

当 $m=2,3,4,5,6,\cdots$ 时,(7)式就分别化为

$$[\frac{n}{2}]=\frac{1}{4}(2n-1+(-1)^{n}),$$

$$[\frac{n}{3}]=\frac{1}{3}\left(n-1+\frac{2}{\sqrt{3}}\sin\frac{2n+1}{3}\pi\right),$$

$$[\frac{n}{4}]=\frac{1}{8}\left(2n-3+(-1)^{n}+2\sqrt{2}\sin\frac{2n+1}{4}\pi\right),$$

$$[\frac{n}{5}]=\frac{1}{5}\left\{n-2+\frac{\sin\frac{2n+1}{5}\pi}{\sin\frac{\pi}{5}}+\frac{\sin\frac{2(2n+1)}{5}\pi}{\sin\frac{2}{5}\pi}\right\},$$

$$[\frac{n}{6}]=\frac{1}{12}\left\{\begin{aligned}&2n-5+(-1)^{n}+4\sin\frac{2n+1}{6}\pi\\&+\frac{4}{\sqrt{3}}\sin\frac{2n+1}{3}\pi\end{aligned}\right\},$$

$\cdots\cdots$. □

(三) 与有理数的取整函数有关的几个三角恒等式

将(7)式变形,我们就得到以下等式:

$$\sum_{i=1}^{[\frac{m}{2}]}\frac{\sin\frac{2n+1}{m}i\pi}{\sin\frac{i}{m}\pi}$$

$$=m[\frac{n}{m}]-n+\frac{2m-2+(-1)^{n}+(-1)^{m+n}}{4}. \tag{10}$$

由于(10)式的右边的值很容易计算,因此也就很容易求出左边的值.此外,我们还有一个与(10)式类似的等式:

$$\sum_{i=1}^{[\frac{m}{2}]}\frac{\sin\frac{2n}{m}i\pi}{\sin\frac{i}{m}\pi}=\sum_{k=1}^{n}\frac{\sin\frac{(2[\frac{m}{2}]+1)(2k-1)}{2m}\pi}{\sin\frac{2k-1}{m}\pi}-n. \tag{11}$$

证明 由(5)式得

$$\text{左边}=\sum_{i=1}^{[\frac{m}{2}]}\sum_{k=1}^{n}2\cos\frac{(2k-1)i}{m}\pi=\sum_{k=1}^{n}\sum_{i=1}^{[\frac{m}{2}]}2\cos\frac{(2k-1)i}{m}\pi,$$

再由(4)式得

$$\text{左边}=\sum_{k=1}^{n}\left(\frac{\sin\frac{(2[\frac{m}{2}]+1)(2k-1)}{2m}\pi}{\sin\frac{2k-1}{m}\pi}-1\right)$$

$$=\sum_{k=1}^{n}\frac{\sin\frac{(2[\frac{m}{2}]+1)(2k-1)}{2m}\pi}{\sin\frac{2k-1}{m}\pi}-n,$$

就得到(11)式.

$$\text{又由于}\frac{\sin\frac{2n+1}{m}i\pi}{\sin\frac{i}{m}\pi}+\frac{\sin\frac{2n-1}{m}i\pi}{\sin\frac{i}{m}\pi}=\frac{2\sin\frac{2ni}{m}\pi\cos\frac{i\pi}{m}}{\sin\frac{i}{m}\pi}$$

$$= 2\mathrm{ctg}\,\frac{i\pi}{m}\sin\frac{2ni}{m}\pi,$$

所以 $2\sum_{i=1}^{[\frac{m}{2}]}\mathrm{ctg}\,\frac{i\pi}{m}\cdot\sin\frac{2ni}{m}\pi$

$$= m[\frac{n}{m}] - n + \frac{2m-2+(-1)^n+(-1)^{n+m}}{4}$$

$$+ m[\frac{n-1}{m}] - n + 1 + \frac{2m-2-(-1)^n-(-1)^{m+n}}{4}$$

$$= m[\frac{n}{m}] + m[\frac{n-1}{m}] - 2n + m.$$

由于 $[\frac{n-1}{m}] = \begin{cases}[\frac{n}{m}] - 1 & (\text{当 } m \mid n \text{ 时}) \\ [\frac{n}{m}] & (\text{当 } m \nmid n \text{ 时})\end{cases}$，所以上式可化为

$$\sum_{i=1}^{[\frac{m}{2}]}\mathrm{ctg}\,\frac{i\pi}{m}\cdot\sin\frac{2ni}{m}\pi = \begin{cases}0 & (\text{当} m \mid n \text{ 时}) \\ m[\frac{n}{m}] - n + \frac{m}{2} & (\text{当} m \nmid n \text{ 时}).\end{cases} \tag{12}$$

类似地，由 $\dfrac{\sin\frac{2n+1}{m}i\pi}{\sin\frac{i}{m}\pi} - \dfrac{\sin\frac{2n-1}{m}i\pi}{\sin\frac{i}{m}\pi} = \dfrac{2\cos\frac{2ni}{m}\pi\sin\frac{i}{m}\pi}{\sin\frac{i}{m}\pi}$

$= 2\cos\dfrac{2ni}{m}\pi$ 可得

$$\sum_{i=1}^{[\frac{m}{2}]}\cos\frac{2ni}{m}\pi = \frac{m}{2}\left([\frac{n}{m}] - [\frac{n-1}{m}]\right) + \frac{(-1)^n + (-1)^{m+n} - 2}{4}. \tag{13}$$

(13) 式也可写成

$$\sum_{i=1}^{[\frac{m}{2}]}\cos\frac{2ni}{m}\pi = \begin{cases}[\frac{m}{2}] & (\text{当 } m \mid n \text{ 时}) \\ \frac{(-1)^n + (-1)^{m+n} - 2}{4} & (\text{当 } m \nmid n \text{ 时}).\end{cases} \tag{14}$$

比较(14)式与(4)式,可得

$$\frac{\sin\dfrac{\left(2[\frac{m}{2}]+1\right)n\pi}{m}}{\sin\dfrac{n}{m}\pi}=\frac{(-1)^n+(-1)^{m+n}}{2}$$

$$=\begin{cases}0 & (m\text{ 为奇数})\\(-1)^n & (m\text{ 为偶数}).\end{cases}\tag{15}$$

(四)与组合数有关的几个三角恒等式

1. 多倍角公式. 我们知道,$\cos 2\theta=2\cos^2\theta-1$,$\cos 3\theta=4\cos^3\theta-3\cos\theta$,$\cos 4\theta=8\cos^4\theta-8\cos^2\theta+1$,等等. 由此我们猜想,$\cos n\theta$ 也许可以用 $\cos\theta$ 的 n 次多项式表示,而且 $\cos^n\theta$ 的系数是 2^{n-1},n 是奇数时,$\cos\theta$ 的各次幂都是奇数;n 是偶数时,$\cos\theta$ 的各次幂都是偶数;且它们的系数的符号正负相间. 但各项的系数的绝对值是什么呢?实际上我们有以下等式:

$$2\cos n\theta=\sum_{k=0}^{[\frac{n}{2}]}(-1)^k\frac{n}{n-k}C_{n-k}^k(2\cos\theta)^{n-2k}.\tag{16}$$

我们用数学归纳法来证明(16)式.

当 $n=1$ 和 $n=2$ 时(16)式显然成立.

假定当 $n=l-1$ 和 $n=l$ 时(16)式成立. 当 $n=l+1$ 时,由 $\cos(l+1)\theta+\cos(l-1)\theta=2\cos\theta\cdot\cos l\theta$,得 $2\cos(l+1)\theta=2\cos\theta\cdot 2\cos l\theta-2\cos(l-1)\theta$,

所以,

$$2\cos(l+1)\theta=2\cos\theta\sum_{k=0}^{[\frac{l}{2}]}(-1)^k\frac{l}{l-k}C_{l-k}^k(2\cos\theta)^{l-2k}$$

$$-\sum_{k=0}^{[\frac{l-1}{2}]}(-1)^k\cdot\frac{l-1}{l-1-k}C_{l-1-k}^k(2\cos\theta)^{l-1-2k}.$$

i) 当 l 为偶数时，$[\frac{l}{2}]=[\frac{l+1}{2}]=[\frac{l-1}{2}]+1$，所以

$$2\cos(l+1)\theta=\sum_{k=0}^{[\frac{l}{2}]}(-1)^k\frac{l}{l-k}C_{l-k}^k(2\cos\theta)^{l-2k+1}$$

$$-\sum_{k=0}^{[\frac{l-1}{2}]}(-1)^k\frac{l-1}{l-1-k}C_{l-1-k}^k(2\cos\theta)^{l-1-2k}$$

$$=(2\cos\theta)^{l+1}+\sum_{k=1}^{[\frac{l}{2}]}(-1)^k\cdot\frac{l}{l-k}C_{l-k}^k(2\cos\theta)^{l-2k+1}$$

$$-\sum_{k=1}^{[\frac{l+1}{2}]}(-1)^{k-1}\frac{l-1}{l-1-(k-1)}C_{l-1-(k-1)}^{k-1}(2\cos\theta)^{l-2k+1}$$

$$=(2\cos\theta)^{l+1}+\sum_{k=1}^{[\frac{l+1}{2}]}(-1)^k(\frac{l}{l-k}C_{l-k}^k+\frac{l-1}{l-1-(k-1)}$$

$$\cdot(C_{l-1-(k-1)}^{k-1})(2\cos\theta)^{l+1-2k}.$$

由于 $$2C_{n-k}^k-\frac{n}{n-k}C_{n-k}^k=\frac{2n-2k-n}{n-k}C_{n-k}^k$$

$$=\frac{n-2k}{n-k}\cdot\frac{(n-k)!}{k!(n-2k)!}=\frac{(n-k-1)!}{k!(n-2k-1)!}=C_{n-k-1}^k,$$

所以，$\frac{n}{n-k}C_{n-k}^k=2C_{n-k}^k-C_{n-k-1}^k$，于是

$$\frac{l}{l-k}C_{l-k}^k+\frac{l-1}{l-1-(k-1)}C_{l-1-(k-1)}^{k-1}$$

$$=2C_{l-k}^k-C_{l-k-1}^k+2C_{l-k}^{k-1}-C_{l-k-1}^{k-1}$$

$$=2C_{l-k+1}^k-C_{l-k}^k=\frac{l+1}{l+1-k}C_{l+1-k}^k.$$

所以，$2\cos(l+1)\theta=(2\cos\theta)^{l+1}$

$$+\sum_{k=1}^{[\frac{l+1}{2}]}(-1)^k\frac{l+1}{l+1-k}C_{l+1-k}^k(2\cos\theta)^{l+1-2k}$$

$$=\sum_{k=0}^{[\frac{l+1}{2}]}(-1)^k\frac{l+1}{l+1-k}C_{l+1-k}^k(2\cos\theta)^{l+1-2k}.$$

ii) 当 l 为奇数时，$[\frac{l}{2}]=[\frac{l-1}{2}]=[\frac{l+1}{2}]-1$，所以

$$2\cos(l+1)\theta=(2\cos\theta)^{l+1}+\sum_{k=1}^{[\frac{l-1}{2}]}(-1)^k\frac{l}{l-k}C_{l-k}^k(2\cos\theta)^{l+1-2k}$$

$$-\sum_{k=1}^{[\frac{l+1}{2}]}(-1)^{k-1}\frac{l-1}{l-1-(k-1)}C_{l-1-(k-1)}^{k-1}(2\cos\theta)^{l-2k+1}$$

$$=(2\cos\theta)^{l+1}+\sum_{k=1}^{[\frac{l+1}{2}]}(-1)^k(\frac{l}{l-k}C_{l-k}^k+\frac{l-1}{l-1-(k-1)}$$

$$\cdot C_{l-1-(k-1)}^{k-1})\cdot(2\cos\theta)^{l+1-2k}-(-1)^{\frac{l+1}{2}}\frac{l}{l-\frac{l+1}{2}}C_{l-\frac{l+1}{2}}^{\frac{l+1}{2}}\cdot$$

$$=(2\cos\theta)^{l+1}+\sum_{k=1}^{[\frac{l+1}{2}]}(-1)^k\frac{l+1}{l+1-k}(C_{l+1-k}^k(2\cos\theta)^{l+1-2k}$$

$$=\sum_{k=0}^{[\frac{l+1}{2}]}(-1)^k\frac{l+1}{l+1-k}C_{l+1-k}^k(2\cos\theta)^{l+1-2k}.$$

这样，我们就证明了等式(16)，至于 $\sin n\theta$，我们有以下等式

$$\sin n\theta=\sin\theta\sum_{k=0}^{[\frac{n-1}{2}]}(-1)^kC_{n-k-1}^k(2\cos\theta)^{n-2k-1}.\tag{17}$$

(17) 式的证明请读者自行完成.

2. 降次公式. 降次公式 $\cos^2\theta=\frac{1}{2}(1+\cos2\theta)$，$\sin^2\theta=\frac{1}{2}(1-\cos2\theta)$ 实际上就是把积的形式化为和差的形式. 下面我们把 $(2\cos\theta)^n$ 和 $(2\sin\theta)^n$ 化为和差的形式. 为此，我们设 $x=\cos\theta+i\sin\theta(i^2=-1)$，则 $\frac{1}{x}=\cos\theta-i\sin\theta$，$x^n+\frac{1}{x^n}=2\cos n\theta$，$x^n-\frac{1}{x^n}=2i\sin n\theta$，于是

$$(2\cos\theta)^n=\left(x+\frac{1}{x}\right)^n=\sum_{k=0}^{n}C_n^kx^{n-k}\left(\frac{1}{x}\right)^k=\sum_{k=0}^{n}C_n^kx^{n-2k}.$$

i) 当 n 为偶数时，设 $n=2m=k+l$，则当 $k=m+1$ 时，$l=$

$m-1$；当 $k=2m$ 时，$l=0$，所以

$$
\begin{aligned}
(2\cos\theta)^n &= \sum_{k=0}^{m-1} C_n^k x^{n-2k} + \sum_{k=m+1}^{2m} C_n^k x^{n-2k} + C_n^m \\
&= \sum_{k=0}^{m-1} C_n^k x^{n-2k} + \sum_{l=0}^{m-1} C_n^{n-l} x^{2l-n} + C_n^m \\
&= \sum_{k=0}^{m-1} C_n^k \left(x^{n-2k} + \frac{1}{x^{n-2k}}\right) + C_n^m \\
&= \sum_{k=0}^{\frac{n}{2}-1} C_n^k 2\cos(n-2k)\theta + C_n^{\frac{n}{2}}.
\end{aligned}
$$

$$
\therefore \quad (2\cos\theta)^n = \sum_{k=0}^{\frac{n}{2}-1} C_n^k 2\cos(n-2k)\theta + C_n^{\frac{n}{2}}. \tag{18}
$$

ii) 当 n 为奇数时，设 $n=2m+1=k+l$，则当 $k=m+1$ 时，$l=m$；当 $k=2m+1$ 时，$l=0$，于是

$$
\begin{aligned}
(2\cos\theta)^n &= \sum_{k=0}^{m} C_n^k x^{n-2k} + \sum_{k=m+1}^{2m+1} C_n^k x^{n-2k} \\
&= \sum_{k=0}^{m} C_n^k x^{n-2k} + \sum_{l=0}^{m} C_n^{n-l} x^{2l-n} \\
&= \sum_{k=0}^{m} C_n^k \left(x^{n-2k} + \frac{1}{x^{n-2k}} \right).
\end{aligned}
$$

$$
\therefore \quad (2\cos\theta)^n = \sum_{k=0}^{\frac{n-1}{2}} C_n^k 2\cos(n-2k)\theta. \tag{19}
$$

(18) 和 (19) 两式可分别改写为：

$$
(2\cos\theta)^{2n} = \sum_{k=0}^{n-1} C_{2n}^k 2\cos(2n-2k)\theta + C_{2n}^n \tag{20}
$$

和

$$
(2\cos\theta)^{2n-1} = \sum_{k=0}^{n-1} C_{2n-1}^k 2\cos(2n-1-2k)\theta. \tag{21}
$$

同样，$(2i\sin\theta)^n = \left(x - \dfrac{1}{x}\right)^n = \sum\limits_{k=0}^{n} (-1)^k C_n^k x^{n-2k}$.

i) 当 n 为偶数时，设 $n=2m=k+l$，同样有

$$(2i\sin\theta)^n = \sum_{k=0}^{m-1}(-1)^k C_n^k x^{n-2k} + \sum_{k=m+1}^{2m}(-1)^k C_n^k x^{n-2k} + (-1)^m C_n^m$$

$$= \sum_{k=0}^{m-1}(-1)^k C_n^k\left(x^{n-2k} + \frac{1}{x^{n-2k}}\right) + (-1)^m C_n^m$$

$$= \sum_{k=0}^{m-1}(-1)^k C_n^k 2\cos(n-2k)\theta + (-1)^m C_n^m.$$

由于　$(2i\sin\theta)^n = (-1)^m(2\sin\theta)^n$，所以

$$(2\sin n\theta)^n = \sum_{k=0}^{\frac{n}{2}-1}(-1)^{\frac{n}{2}-k}C_n^k 2\cos(n-2k)\theta + C_n^{\frac{n}{2}}.$$

即　$(2\sin n\theta)^n = (-1)^{[\frac{n}{2}]}\sum_{k=0}^{[\frac{n-1}{2}]}(-1)^k C_n^k 2\cos(n-2k)\theta + C_n^{\frac{n}{2}}.$　(22)

ii) 当 n 为奇数时，$\frac{n-1}{2} = [\frac{n-1}{2}] = [\frac{n}{2}]$，设 $n = 2m+1 = k+l$，同样有

$$(2i\sin\theta)^n = \sum_{k=0}^{m}(-1)^k C_n^k x^{n-2k} + \sum_{k=m+1}^{2m+1}(-1)^k C_n^k x^{n-2k}$$

$$= \sum_{k=0}^{m}(-1)^k C_n^k x^{n-2k} + \sum_{l=0}^{m}(-1)^{n-l}C_n^{n-l}x^{2l-n}$$

$$= \sum_{k=0}^{m}(-1)^k C_n^k(x^{n-2k} - \frac{1}{x^{n-2k}})$$

$$= \sum_{k=0}^{m}(-1)^k C_n^k 2i\sin(n-2k)\theta.$$

由于$(2i\sin\theta)^n = (2i\sin\theta)^{2m+1} = i^{2m+1}(2\sin\theta)^{2m+1}$

$= i(-1)^m(2\sin\theta)^n = i(-1)^{\frac{n-1}{2}}(2\sin\theta)^n$，

所以　$i(-1)^{\frac{n-1}{2}}(2\sin\theta)^n = \sum_{k=0}^{\frac{n-1}{2}}(-1)^k C_n^k 2i\sin(n-2k)\theta$，于是有

$$(2\sin\theta)^n = \sum_{k=0}^{\frac{n-1}{2}}(-1)^{\frac{n-1}{2}-k}C_n^k \cdot 2\sin(n-2k)\theta,$$

即
$$(2\sin\theta)^n=(-1)^{[\frac{n}{2}]}\sum_{k=0}^{[\frac{n-1}{2}]}(-1)^kC_n^k 2\sin(n-2k)\theta. \quad (23)$$

(22) 和(23) 两式可分别改写为：

$$(2\sin\theta)^{2n}=(-1)^n\sum_{k=0}^{n-1}(-1)^kC_{2n}^k 2\cos(2n-2k)\theta+C_{2n}^n. \quad (24)$$

$$(2\sin\theta)^{2n-1}=(-1)^{n-1}\sum_{k=0}^{n-1}(-1)^kC_{2n-1}^k 2\sin(2n-1-2k)\theta. \quad (25)$$

(20),(21),(24),(25) 是一般情况下的降次公式.

(五) 与取整函数有关的一些三角式的和

在(12) 式中,取 $n=m+1$,则 $m \nmid n$, $\operatorname{ctg}\frac{i\pi}{m}\sin\frac{2(m+1)i\pi}{m}$

$=\operatorname{ctg}\frac{i\pi}{m}\cdot\sin\frac{2i\pi}{m}=2\left(\cos\frac{i\pi}{m}\right)^2$,于是(12) 式就变为

$$\sum_{i=1}^{[\frac{m}{2}]}\left(2\cos\frac{i\pi}{m}\right)^2=m-2. \quad (26)$$

这使我们想到,对于任何自然数 p, $\sum_{i=1}^{[\frac{m}{2}]}(2\cos\frac{i\pi}{m})^p$ 和 $\sum_{i=1}^{[\frac{m}{2}]}(2\sin\frac{i\pi}{m})^p$ ($m\geqslant 2$) 会有什么结果呢？下面我们来解决这一问题.

首先考虑 p 是偶数的情况. 此时,设 $p=2n$,则由(20) 式得

$$\begin{aligned}(2\cos\theta)^{2n}&=\sum_{k=0}^{n}C_{2n}^k 2\cos(2n-2k)\theta-C_{2n}^n\\&=\sum_{l=0}^{n}C_{2n}^{n-l}2\cos 2l\theta-C_{2n}^n.\end{aligned}$$

在上式中取 $\theta=\frac{i\pi}{m}$,则 $\left(2\cos\frac{i\pi}{m}\right)^{2n}=\sum_{l=0}^{n}C_{2n}^n 2\cos 2l\theta-C_{2n}^n$,于是

$$\sum_{i=1}^{[\frac{m}{2}]}\left(2\cos\frac{i\pi}{m}\right)^{2n}=\sum_{l=0}^{n}C_{2n}^{n-l}\sum_{i=1}^{[\frac{m}{2}]}2\cos\frac{2li}{m}\pi-[\frac{m}{2}]C_{2n}^n.$$

为方便起见，

设 $u_l=\dfrac{(-1)^l+(-1)^{l+m}}{2}$，则 $u_l=\begin{cases}0 & (m\text{ 为奇数})\\(-1)^l & (m\text{ 为偶数})\end{cases}$，

于是(14)式就化为：

$$\sum_{i=1}^{[\frac{m}{2}]}2\cos\frac{2li}{m}\pi=\begin{cases}2[\frac{m}{2}] & (\text{当 } m\mid l\text{ 时})\\ u_l-1 & (\text{当 } m\nmid l\text{ 时}).\end{cases}$$

由于当 $l>n$ 时，$C_{2n}^{n-l}=0$ 以及 $n\leqslant[\frac{n}{m}](m+1)-1$，所以

$$\sum_{i=1}^{[\frac{m}{2}]}\left(2\cos\frac{i\pi}{m}\right)^{2n}=\sum_{l=0}^{n}C_{2n}^{n-l}\sum_{i=1}^{[\frac{m}{2}]}2\cos\frac{2li}{m}\pi-[\frac{m}{2}]C_{2n}^{n}$$

$$=\sum_{l=0}^{[\frac{n}{m}](m+1)-1}C_{2n}^{n-l}\sum_{i=1}^{[\frac{m}{2}]}2\cos\frac{2li}{m}\pi-[\frac{m}{2}]C_{2n}^{n}$$

$$=C_{2n}^{n}2[\frac{m}{2}]+C_{2n}^{n-1}(u_1-1)+C_{2n}^{n-2}(u_2-1)+\cdots$$

$$+C_{2n}^{n-(m-1)}(u_{m-1}-1)+C_{2n}^{n-m}2[\frac{m}{2}]+C_{2n}^{n-(m+1)}(u_{m+1}-1)$$

$$+C_{2n}^{n-(m+2)}(u_{m+2}-1)+\cdots+C_{2n}^{n-(2m-1)}(u_{2m-1}-1)+\cdots$$

$$+C_{2n}^{n-[\frac{n}{m}]m}\cdot 2[\frac{m}{2}]+C_{2n}^{n-([\frac{n}{m}]+1)}(u_{[\frac{n}{m}]m+1}-1)+\cdots$$

$$+C_{2n}^{n-(([\frac{n}{m}]+1)m-1)}(u_{([\frac{n}{m}]+1)m-1}-1)-[\frac{m}{2}]C_{2n}^{n}$$

$$=2[\frac{m}{2}]\sum_{l=0}^{[\frac{n}{m}]}C_{2n}^{n-lm}+\sum_{r=1}^{m-1}\sum_{l=0}^{[\frac{n}{m}]}C_{2n}^{n-(lm+r)}(u_{lm+r}-1)-[\frac{m}{2}]C_{2n}^{n}$$

$$=2[\frac{m}{2}]\sum_{l=0}^{[\frac{n}{m}]}C_{2n}^{n-lm}+\sum_{r=1}^{m-1}\sum_{l=0}^{[\frac{n}{m}]}C_{2n}^{n-(lm+r)}u_{lm+r}-\sum_{r=1}^{m-1}\sum_{l=0}^{[\frac{n}{m}]}C_{2n}^{n-(lm+r)}$$

$$-[\frac{m}{2}]C_{2n}^{n}$$

$$=2[\frac{m}{2}]\sum_{l=0}^{[\frac{n}{m}]}C_{2n}^{n-lm}+\sum_{r=1}^{m-1}\sum_{l=0}^{[\frac{n}{m}]}C_{2n}^{n-(lm+r)}u_{lm+r}-\sum_{r=1}^{m-1}\sum_{l=0}^{[\frac{n}{m}]}C_{2n}^{n-(lm+r)}$$

$$+\sum_{l=0}^{[\frac{n}{m}]}c_{2m}^{n-lm}-[\frac{m}{2}]C_{2n}^{n}$$

$$=2[\frac{m}{2}]\sum_{l=0}^{[\frac{n}{m}]}C_{2n}^{n-lm}+\sum_{r=1}^{m-1}\sum_{l=0}^{[\frac{n}{m}]}C_{2n}^{n\ (lm+r)}u_{lm+r}-\sum_{r=0}^{m-1}\sum_{l=0}^{[\frac{n}{m}]}C_{2n}^{n-(lm+r)}$$

$$+\sum_{l=0}^{[\frac{n}{m}]}C_{2n}^{n-lm}-[\frac{m}{2}]C_{2n}^{n}$$

$$=2[\frac{m}{2}]\sum_{l=0}^{[\frac{n}{m}]}C_{2n}^{n-lm}+\sum_{r=1}^{m-1}\sum_{l=0}^{[\frac{n}{m}]}C_{2n}^{n-(lm+r)}U_{lm+r}-\frac{1}{2}\sum_{r=0}^{m-1}(C_{2n}^{n-(lm+r)}$$

$$+C_{2n}^{n+(lm+r)}+\sum_{l=0}^{[\frac{n}{m}]}C_{2n}^{n-lm}-[\frac{m}{2}]C_{2n}^{n}.$$

下面我们来计算$\sum\limits_{r=0}^{m-1}\sum\limits_{l=0}^{[\frac{n}{m}]}(C_{2n}^{n-(lm+r)}+C_{2n}^{n+(lm+r)})$. 这一和式中共有$2m([\frac{n}{m}]+1)=2m[\frac{n}{m}]+2m$项，当$l=0,1,2,\cdots,[\frac{n}{m}],r=0,1,2,\cdots,m-1$时，$n-(lm+r)$和$n+(lm+r)$共取遍从$n-m[\frac{n}{m}]-m+1$到$n+m[\frac{n}{m}]+m-1$的$2m[\frac{n}{m}]+2m-1$个整数，当且仅当$l=r=0$时，$n-(lm+r)=n+(lm+r)=n$，即$n$取了两次（重复取了一次），又由于$n<m[\frac{n}{m}]+m$，所以$n\leqslant m[\frac{n}{m}]+m-1$. 于是当$l=[\frac{n}{m}],r=m-1$时，有

$$n-(lm+r)=n-m[\frac{n}{m}]-m+1\leqslant 0,n+(lm+r)$$

$$=n+m[\frac{n}{m}]+m-1\geqslant 2n,$$

而当$k<0$或$k>2n$时，$C_{2n}^{k}=0$，所以

$$\sum_{r=0}^{m-1}\sum_{l=0}^{[\frac{n}{m}]}(C_{2n}^{n-(lm+r)}+C_{2n}^{n+(lm+r)})=\sum_{k=0}^{2n}C_{2n}^{k}+C_{2n}^{n}=2^{2n}+C_{2n}^{n}.$$

同理，$\sum_{r=0}^{m-1}\sum_{l=0}^{[\frac{n}{m}]}(-1)^r(C_{2n}^{n-(lm+r)}+C_{2n}^{n+(lm+r)})=\sum_{k=0}^{2n}(-1)^kC_{2n}^k$ $+(-1)^0C_{2n}^n=C_{2n}^n$.

i）当 m 为奇数时，$[\frac{m}{2}]=\frac{m-1}{2}$，$u_{lm+r}=0$，所以

$$\sum_{i=1}^{[\frac{m}{2}]}(2\cos\frac{i\pi}{m})^{2n}=(m-1)\sum_{l=0}^{[\frac{n}{m}]}C_{2n}^{n-lm}-\frac{1}{2}(2^{2n}+C_{2n}^n)$$

$$+\sum_{l=0}^{[\frac{n}{m}]}C_{2n}^{n-lm}-\frac{m-1}{2}C_{2n}^n$$

$$=m\sum_{l=0}^{[\frac{n}{m}]}C_{2n}^{n-lm}-2^{2n-1}-\frac{1}{2}C_{2n}^n-\frac{m-1}{2}C_{2n}^n$$

$$=m\sum_{l=0}^{[\frac{n}{m}]}C_{2n}^{n-lm}-2^{2n-1}-\frac{m}{2}C_{2n}^n$$

$$=\frac{1}{2}mC_{2n}^n-2^{2n-1}+m\sum_{l=1}^{[\frac{n}{m}]}C_{2n}^{n-lm}$$

$$=mC_{2n-1}^n-2^{2n-1}+m\sum_{l=1}^{[\frac{n}{m}]}C_{2n}^{n-lm}.$$

ii）当 m 为偶数时，$[\frac{m}{2}]=\frac{m}{2}$，$u_{lm+r}=(-1)^{lm+r}=(-1)^r$，所以

$$\sum_{i=1}^{[\frac{m}{2}]}\left(2\cos\frac{i\pi}{m}\right)^{2n}=m\sum_{l=0}^{[\frac{n}{m}]}C_{2n}^{n-lm}+\sum_{r=1}^{m-1}\sum_{l=0}^{[\frac{n}{m}]}C_{2n}^{n\quad(lm+r)}(-1)^r$$

$$-\frac{1}{2}(2^{2n}+C_{2n}^n)+\sum_{l=0}^{[\frac{n}{m}]}C_{2n}^{n-lm}-\frac{m}{2}C_{2n}^n$$

$$=m\sum_{l=0}^{[\frac{n}{m}]}C_{2n}^{n-lm}+\frac{1}{2}\sum_{r=0}^{m-1}\sum_{l=0}^{[\frac{n}{m}]}(C_{2n}^{n-(lm+r)}+C_{2n}^{n+(lm+r)})(-1)^r$$

$$-\frac{1}{2}(2^{2n}+C_{2n}^{n})-\frac{m}{2}C_{2n}^{n}$$

$$=m\sum_{l=0}^{[\frac{n}{m}]}C_{2n}^{n-lm}+\frac{1}{2}C_{2n}^{n}-2^{2n-1}-\frac{1}{2}C_{2n}^{n}-\frac{m}{2}C_{2n}^{n}$$

$$=mC_{2n}^{n}+m\sum_{l=1}^{[\frac{n}{m}]}C_{2n}^{n-lm}-2^{2n-1}-\frac{m}{2}C_{2n}^{n}$$

$$=mC_{2n-1}^{n}-2^{2n-1}+m\sum_{l=1}^{[\frac{n}{m}]}C_{2n}^{n-lm}.$$

因此，无论 m 是奇数还是偶数，恒有

$$\sum_{i=1}^{[\frac{m}{2}]}\left(2\cos\frac{i\pi}{m}\right)^{2n}=mC_{2n-1}^{n}-2^{2n-1}+m\sum_{l=1}^{[\frac{n}{m}]}C_{2n}^{n-lm}. \tag{27}$$

(27) 式还可以写成以下形式：

$$\sum_{i=1}^{[\frac{m}{2}]}\left(2\cos\frac{i\pi}{m}\right)^{2n}=mC_{2n-1}^{n}-2^{2n-1}+m\sum_{l=m}^{n}\frac{2l+1}{2n+1}C_{2n+1}^{n-l}[\frac{l}{m}]. \tag{28}$$

为此，我们只要证明：

$$\sum_{l=m}^{n}\frac{2l+1}{2n+1}C_{2n+1}^{n-l}[\frac{l}{m}]=\sum_{l=1}^{[\frac{n}{m}]}C_{2n}^{n-lm}. \tag{29}$$

当 $km<l\leqslant(k+1)m-1$ 时，$[\frac{l}{m}]=k$；当 $l>n$ 时，$C_{2n+1}^{n-l}=0$. 由于 $n\leqslant\left([\frac{n}{m}]+1\right)m-1$，所以

$$左边=\sum_{l=m}^{([\frac{n}{m}]+1)m-1}\frac{2l+1}{2n+1}C_{2n+1}^{n-l}[\frac{l}{m}].$$

$$=\frac{1}{2n+1}\sum_{l=m}^{2m-1}(2l+1)\cdot C_{2n+1}^{n-l}+\sum_{l=2m}^{3m-1}2(2l+1)C_{2n+1}^{n-l}+\cdots$$

$$+\sum_{l=[\frac{n}{m}]m}^{([\frac{n}{m}]+1)m-1}[\frac{n}{m}](2l+1)C_{2n+1}^{n-l}$$

$$= \frac{1}{2n+1}\sum_{i=1}^{[\frac{n}{m}]}\sum_{l=im}^{(i+1)m-1} i(2l+1)C_{2n+1}^{n-l}.$$

由于$(2l+1)C_{2n+1}^{n-l} = (n+l+1-n+l)\cdot\dfrac{(2n+1)!}{(n-l)!(n+l+1)!}$

$$=(2n+1)\left(\frac{(2n)!}{(n-l)!(n+l)!}-\frac{(2n)!}{(n-l-1)!(n+l+1)!}\right)$$

$$=(2n+1)(C_{2n}^{n-l}-C_{2n}^{n-l-1}).$$

$$\therefore \text{左边} = \sum_{i=1}^{[\frac{n}{m}]}\sum_{l=im}^{(i+1)m-1} i(C_{2n}^{n-l}-C_{2n}^{n-l-1}).$$

设$k=l-im+1$，则当$l=im$时，$k=1$；当$l=(i+1)m-1$时，$k=m$，所以

$$\text{左边} = \sum_{i=1}^{[\frac{n}{m}]} i\sum_{k=1}^{m}(C_{2n}^{n-im-k+1}-C_{2n}^{n-im-k})$$

$$= \sum_{i=1}^{[\frac{n}{m}]} i\left(\sum_{k=0}^{m-1}C_{2n}^{n-im-k}-\sum_{k=1}^{m}C_{2n}^{n-im-k}\right)$$

$$= \sum_{i=1}^{[\frac{n}{m}]} i\left(C_{2n}^{n-im}-C_{2n}^{n-(i+1)m}\right)$$

$$= \sum_{i=1}^{\frac{n}{m}} iC_{2n}^{n-im}-\sum_{i=1}^{[\frac{n}{m}]} iC_{2n}^{n-(i+1)m}$$

$$= \sum_{i=1}^{[\frac{n}{m}]} iC_{2n}^{n-im}-\sum_{i=2}^{[\frac{n}{m}]+1}(i-1)C_{2n}^{n-im}.$$

由于当$i=[\dfrac{n}{m}]+1$时$i>\dfrac{n}{m}$，此时$C_{2n}^{n-im}=0$，所以

$$\text{左边}= \sum_{i=1}^{[\frac{n}{m}]} iC_{2n}^{n-im}-\sum_{i=2}^{[\frac{n}{m}]} iC_{2n}^{n-im}+\sum_{i=2}^{[\frac{n}{m}]}C_{2n}^{n-im}$$

$$= C_{2n}^{n-m}+\sum_{i=2}^{[\frac{n}{m}]}C_{2n}^{n-im}=\sum_{i=1}^{[\frac{n}{m}]}C_{2n}^{n-im}.$$

这样，我们就证明了(29)式，从而也证明了(28)式. 特别当 $n=1$ 时，(27)，(28)两式都可化为(26)式.

现在研究当 p 为奇数的情况. 此时设 $p=2n-1$. 在(21)式中设 $n-k=l$，则当 $k=0$ 时，$l=n$；当 $k=n-1$ 时，$l=1$，并取 $\theta=\frac{i\pi}{m}$，则(21)式就化为

$$\left(2\cos\frac{i\pi}{m}\right)^{2n-1}=\sum_{l=1}^{n}C_{2n-1}^{n-l}2\cos(2l-1)\frac{i\pi}{m}. \tag{30}$$

在(4)式中取 $n=[\frac{m}{2}]$，$\alpha=\frac{(2l-1)\pi}{m}$，则(4)式就化为

$$\sum_{i=1}^{[\frac{m}{2}]}2\cos(2l-1)\frac{i\pi}{m}=\frac{\sin\frac{2[\frac{m}{2}]+1}{2m}(2l-1)\pi}{\sin\frac{2l-1}{2m}\pi}-1.$$ 为方便起见，设 $\frac{\sin\frac{\left(2[\frac{m}{2}]+1\right)(2l-1)\pi}{m}}{\sin\frac{2l-1}{m}\pi}=v_l$，对(30)式求和得

$$\sum_{i=1}^{[\frac{m}{2}]}(2\cos\frac{i\pi}{m})^{2n-1}=\sum_{i=1}^{[\frac{m}{2}]}\sum_{l=1}^{n}C_{2n-1}^{n-l}2\cos(2l-1)\frac{i\pi}{m}$$
$$=\sum_{l=1}^{n}C_{2n-1}^{n-l}\sum_{i=1}^{[\frac{m}{2}]}2\cos(2l-1)\frac{i\pi}{m}=\sum_{l=1}^{n}C_{2n-1}^{n-l}(v_l-1).$$

$$\therefore\sum_{i=1}^{[\frac{m}{2}]}\left(2\cos\frac{i\pi}{m}\right)^{2n-1}=\sum_{l=1}^{n}C_{2n-1}^{n-l}v_l-\sum_{l=1}^{n}C_{2n-1}^{n-l}. \tag{31}$$

下面我们化简(31)式右边的 v_l，并计算 $\sum_{l=1}^{n}C_{2n-1}^{n-l}$.

i) 当 m 为奇数时，$2[\frac{m}{2}]+1=m$，所以

$$v_l=\frac{\sin\frac{2l-1}{2}\pi}{\sin\frac{2l-1}{2m}\pi}=\frac{(-1)^{l-1}}{\sin\frac{2l-1}{2m}\pi}.$$

ii) 当 m 为偶数时，$2[\frac{m}{2}]+1=m+1$，

$$v_l=\frac{\sin\frac{(m+1)(2l-1)}{2m}\pi}{\sin\frac{2l-1}{2m}\pi}=\frac{(-1)^{l-1}\cos\frac{2l-1}{2m}\pi}{\sin\frac{2l-1}{2m}\pi}$$

$$=(-1)^{l-1}\operatorname{ctg}\frac{2l-1}{2m}\pi.$$

又由于 $\sum_{l=1}^{n}C_{2n-1}^{n-l}=\frac{1}{2}\sum_{l=1}^{n}(C_{2n-1}^{n-l}+C_{2n-1}^{n+l})=\frac{1}{2}\sum_{k=0}^{2n-1}C_{2n-1}^{k}$

$=\frac{1}{2}\cdot 2^{2n-1}=4^{n-1}$，所以(31)式可化为：

$$\sum_{i=1}^{[\frac{m}{2}]}(2\cos\frac{i\pi}{m})^{2n-1}$$

$$=\begin{cases}\sum_{l=1}^{n}C_{2n-1}^{n-l}\dfrac{(-1)^{l-1}}{\sin\frac{2l-1}{2m}\pi}-4^{n-1} & (m\text{ 为奇数})\\[2ex] \sum_{l=1}^{n}C_{2n-1}^{n-l}(-1)^{l-1}\operatorname{ctg}\dfrac{2l-1}{2m}\pi-4^{n-1} & (m\text{ 为偶数}).\end{cases}\tag{32}$$

(27)式(或(28)式)和(32)式回答了对任意自然数 p，$\sum_{i=1}^{[\frac{m}{2}]}(2\cos\frac{i\pi}{m})^{p}$ 的结果是什么，下面我们来求 $\sum_{i=1}^{[\frac{m}{2}]}(2\sin\frac{i\pi}{m})^{p}$ 与组合数的关系，为方便起见，设 $S(m,p)=\sum_{i=1}^{[\frac{m}{2}]}(2\cos\frac{i\pi}{m})^{p}$，$T(m,p)=\sum_{i=1}^{[\frac{m}{2}]}(2\sin\frac{i\pi}{m})^{p}(m\geqslant 2)$，首先，我们来证明 $S(m,p)$ 和 $T(m,p)$

之间有这样的关系：

i) 当 m 为偶数时，$T(m,p)=S(m,p)+2^p$； (33)

ii) 当 m 为奇数时，$T(m,p)=S(2m,p)-S(m,p)$. (34)

证明 i) 当 m 为偶数时，$[\frac{m}{2}]=\frac{m}{2}\in N$，所以

$$\sin\frac{i\pi}{m}=\cos\left(\frac{\pi}{2}-\frac{i\pi}{m}\right)=\cos\frac{m-2i}{2m}\pi=\cos\frac{\frac{m}{2}-i}{m}\pi,\text{于是}$$

$$T(m,p)=\sum_{i=1}^{[\frac{m}{2}]}\left(2\cos\frac{(\frac{m}{2}-i)\pi}{m}\right)^p.$$

设 $j=\frac{m}{2}-i$，则当 $i=1$ 时，$j=\frac{m}{2}-1$；当 $i=\frac{m}{2}$ 时，$j=0$，所以

$$T(m,p)=\sum_{j=1}^{\frac{m}{2}-1}\left(2\cos\frac{j\pi}{m}\right)^p=\left(2\cos\frac{0\pi}{m}\right)^p+\sum_{j=1}^{\frac{m}{2}}\left(2\cos\frac{j\pi}{m}\right)^p-\left(2\cos\frac{\pi}{2}\right)^p=S(m,p)+2^p.$$

ii) 当 m 为奇数时，$[\frac{m}{2}]=\frac{m-1}{2}\in N$，所以 $\sin\frac{i\pi}{m}=\cos\frac{m-2i}{2m}\pi$，于是

$$T(m,p)=\sum_{i=1}^{\frac{m-1}{2}}\left(2\cos\frac{m-2i}{2m}\pi\right)^p.$$

设 $j=\frac{m+1}{2}-i$，则当 $i=1$ 时，$j=\frac{m-1}{2}$；当 $i=\frac{m-1}{2}$ 时，$j=1$，所以

$$T(m,p)=\sum_{j=1}^{\frac{m-1}{2}}\left(2\cos\frac{2j-1}{2m}\pi\right)^p=\sum_{j=1}^{\frac{m-1}{2}}\left(2\cos\frac{2j-1}{2m}\pi\right)^p+\sum_{j=1}^{\frac{m-1}{2}}\left(2\cos\frac{2j\pi}{2m}\right)^p-\sum_{j=1}^{\frac{m-1}{2}}\left(2\cos\frac{2j\pi}{2m}\right)^p.$$ 由于 $j=1,2,\cdots,\frac{m-1}{2}$

时，$2j-1=1,3,\cdots,m-2$；$2j=2,4,\cdots,m-1$，且 $\cos\frac{m}{2m}\pi=0$，所以 $\sum_{j=1}^{\frac{m-1}{2}}\left(2\cos\frac{2j-1}{2m}\pi\right)^p+\sum_{j=1}^{\frac{m-1}{2}}\left(2\cos\frac{2j\pi}{2m}\right)^p=\sum_{i=1}^{m}\left(2\cos\frac{i\pi}{2m}\right)^p$，于是有

$$T(m,p)=S(2m,p)-S(m,p). \qquad \square$$

有了(33)和(34)两式以后，就容易证明以下两式了：

$$\sum_{i=1}^{[\frac{m}{2}]}\left(2\sin\frac{i\pi}{m}\right)^{2n}$$

$$=mC_{2n-1}^{n}+\begin{cases}2^{2n-1}+m\sum\limits_{l=1}^{[\frac{n}{m}]}C_{2n}^{n-lm} & (m\text{ 为偶数})\\ m\sum\limits_{l=1}^{[\frac{n}{m}]}(-1)^{l}C_{2n}^{n-lm} & (m\text{ 为奇数}),\end{cases} \tag{35}$$

$$\sum_{i=1}^{[\frac{m}{2}]}(2\sin\frac{i\pi}{m})^{2n-1}=\sum_{l=1}^{n}(-1)^{l-1}C_{2n-1}^{n-l}\mathrm{ctg}\,\frac{2l-1}{2m}\pi$$

$$+\begin{cases}4^{n-1} & (m\text{ 为偶数})\\ 0 & (m\text{ 为奇数}).\end{cases} \tag{36}$$

我们先证明(35)式：

i) 当 m 为偶数时，由(33)和(27)两式得

$$T(m,2n)=S(m,2n)+2^{2n}$$

$$=mC_{2n-1}^{n}-2^{2n-1}+m\sum_{l=1}^{[\frac{n}{m}]}C_{2n}^{n-lm}+2^{2n}$$

$$=mC_{2n-1}^{n}+2^{2n-1}+m\sum_{l=1}^{[\frac{n}{m}]}C_{2n}^{n-lm}.$$

ii) 当 m 为奇数时，由(34)和(27)两式得

$$T(m,2n)=S(2m,2n)-S(m,2n)$$

$$= 2mC_{2n-1}^{n} - 2^{2n-1} + m\sum_{l=1}^{[\frac{n}{2m}]} 2C_{2n}^{n-2lm}$$

$$- mC_{2n-1}^{n} + 2^{2n-1} - m\sum_{l=1}^{[\frac{n}{m}]} C_{2n}^{n-lm}$$

$$= mC_{2n-1}^{n} + m\left(\sum_{l=1}^{[\frac{n}{2m}]} 2C_{2n}^{n-2lm} - \sum_{l=1}^{[\frac{n}{m}]} C_{2n}^{n-lm}\right),$$

而
$$\sum_{l=1}^{[\frac{n}{2m}]} 2C_{2n}^{n-2lm} - \sum_{l=1}^{[\frac{n}{m}]} C_{2n}^{n-lm}$$

$$= 2C_{2n}^{n-2m} + 2C_{2n}^{n-4m} + \cdots + 2C_{2n}^{n-2[\frac{n}{2m}]m} - C_{2n}^{n-m} - C_{2n}^{n-2m}$$

$$- C_{2n}^{n-3m} - C_{2n}^{n-4m} - \cdots - C_{2n}^{n-[\frac{n}{m}]m}$$

$$= - C_{2n}^{n-m} + C_{2n}^{n-2m} - C_{2n}^{n-3m} - C_{2n}^{n-4m} - \cdots - C_{2n}^{n-[\frac{n}{m}]m}$$

$$= \sum_{l=1}^{[\frac{n}{m}]} (-1)^{l} C_{2n}^{n-lm}.$$

所以， $T(m,2n) = mC_{2n-1}^{n} + m\sum_{l=1}^{[\frac{n}{m}]} (-1)^{l} C_{2n}^{n-lm}.$

这样，我们就证明了(35)式.最后，我们来证明(36)式.

i) 当 m 为偶数时，由(33)和(32)两式得

$$T(m,2n-1) = S(m,2n-1) + 2^{2n-1}$$

$$= \sum_{l=1}^{n} (-1)^{l-1} C_{2n-1}^{n-l} \operatorname{ctg} \frac{2l-1}{2m}\pi - 4^{n-1} + 2^{2n-1},$$

$$\therefore T(m,2n-1) = \sum_{l=1}^{n} (-1)^{l-1} C_{2n-1}^{n-l} \operatorname{ctg} \frac{2l-1}{2m}\pi + 4^{n-1}.$$

ii) 当 m 为奇数时，由(34)和(32)两式得

$$T(m,2n-1) = S(2m,2n-1) - S(m,2n-1)$$

$$= \sum_{l=1}^{n} (-1)^{l-1} C_{2n-1}^{n-l} \operatorname{ctg} \frac{2l-1}{4m}\pi + 4^{n-1}$$

$$-\sum_{l=1}^{n}(-1)^{l-1}C_{2n-1}^{n-l}\operatorname{ctg}\frac{2l-1}{2m}\pi-4^{n-1}$$

$$=\sum_{l=1}^{n}(-1)^{l-1}C_{2n-1}^{n-l}(\operatorname{ctg}\frac{2l-1}{4m}\pi-\operatorname{ctg}\frac{2l-1}{2m}\pi).$$

由于$\operatorname{ctg}\alpha-\frac{1}{\sin 2\alpha}=\frac{\cos\alpha}{\sin\alpha}-\frac{1}{\sin 2\alpha}=\frac{2\cos^2\alpha-1}{\sin 2\alpha}=\frac{\cos 2\alpha}{\sin 2\alpha}=\operatorname{ctg}2\alpha$,所以

$$T(m,2n-1)=\sum_{l=1}^{n}(-1)^{l-1}C_{2n-1}^{n-l}\operatorname{ctg}\frac{2l-1}{2m}\pi.$$

这样,我们就证明了(36)式.最后,要指出的是(35)式还可写成以下形式:

$$\sum_{i=1}^{[\frac{m}{2}]}(2\sin\frac{i\pi}{m})^{2n}=mC_{2n-1}^{n}+4^{n-1}(1+(-1)^{m})$$

$$+m\sum_{l=m}^{n}(-1)^{l}C_{2n+1}^{n-l}[\frac{l}{m}].\qquad(37)$$

事实上,只要证明以下等式:

$$\sum_{l=m}^{n}(-1)^{l}C_{2n+1}^{n-l}[\frac{l}{m}]=\sum_{l=1}^{[\frac{n}{m}]}(-1)^{lm}C_{2n}^{n-lm}.\qquad(38)$$

读者可参照证明(29)式的方法证明(38)式.

(六)一些组合数的和与三角函数的关系

利用二项式定理,容易得到一些组合数的和的公式.例如:

$$C_n^0+C_n^1+\cdots+C_n^n=2^n,$$

$$C_n^0+C_n^2+C_n^4+\cdots=2^{n-1},$$

$$C_n^1+C_n^3+C_n^5+\cdots=2^{n-1},$$

等等.下面我们把以上公式推广到一般的情况,即寻求计算

$$C_n^a+C_n^{a+k}+C_n^{a+2k}+\cdots+C_n^{a+pk}$$

的公式，这里 $0 \leqslant a < k, k > 2, p = [\frac{n-a}{k}]$.

设 $\alpha = \cos\frac{2\pi}{k} + i\sin\frac{2\pi}{k}$，$(i^2 = -1)$，则 $\alpha^k = 1$，由二项式定理得

$$(1+\alpha^l)^n = \sum_{j=0}^{n} \alpha^{lj} C_n^j \quad (l = 0,1,2,\cdots,k-1).$$

于是 $\quad (1+\alpha^l)^n \alpha^{-al} = \sum_{j=0}^{n} \alpha^{(j-a)l} C_n^j$，所以

$$\sum_{l=0}^{k-1} (1+\alpha^l)\alpha^{-al} = \sum_{l=0}^{k-1}\sum_{j=0}^{n} \alpha^{(j-a)} l C_n^j = \sum_{j=0}^{n} C_n^j \sum_{l=0}^{k-1} \alpha^{(j-a)l}.$$

i) 当 $k \mid j-a$ 时，设 $j = a + mk \geqslant 0, m \in Z$，因为 $mk \geqslant -a > -k$，所以 $m = 0,1,2,\cdots,p-1$，此时 $\alpha^{j-a} = \alpha^{mk} = (\cos\frac{2\pi}{k} + i\sin\frac{2\pi}{k})^{mk} = 1$，所以

$$\sum_{l=0}^{k-1} \alpha^{(j-a)l} = k.$$

ii) 当 $k \nmid j-a$ 时，$\alpha^{j-a} \neq 1$，$\sum_{l=0}^{k-1} \alpha^{(j-a)l} = \frac{1-\alpha^{(j-a)k}}{1-\alpha^{j-a}} = 0$，所以

$$\sum_{j=0}^{n} C_n^j \sum_{l=0}^{k-1} \alpha^{(j-a)l} = k\sum_{m=0}^{p-1} C_n^{a+mk} = \sum_{l=0}^{k-1} (1+\alpha^l)^n \alpha^{-al},$$

$$\sum_{m=0}^{p} C_n^{a+mk} = \frac{1}{k}\sum_{l=0}^{k-1} (1+\alpha^l)^n \alpha^{-al}.$$

由于 $1+\alpha^l = 1 + \cos\frac{2l\pi}{k} + i\sin\frac{2l\pi}{k} = 2\cos\frac{l\pi}{k}\left(\cos\frac{l\pi}{k} + i\sin\frac{l\pi}{k}\right)$，

所以 $\quad (1+\alpha^l)^n = 2^n\cos^n\frac{l\pi}{k}\left(\cos\frac{ln\pi}{k} + i\sin\frac{ln\pi}{k}\right)$，

又 $\quad \alpha^{-la} = \cos\left(-\frac{2la}{k}\pi\right) + i\sin\left(-\frac{2la}{k}\pi\right)$，所以

$$(1+\alpha^l)^n\alpha^{-la} = 2^n\cos^n\frac{l\pi}{k}\left(\cos\frac{l(n-2a)}{k}\pi\right.$$

$$+ i\sin\frac{l(n-2a)}{k}\pi\Big),$$

于是
$$\sum_{m=0}^{p}C_n^{a+mk}=\frac{2^n}{k}\sum_{l=0}^{k-1}\cos^n\frac{l\pi}{k}\Big(\cos\frac{l(n-2a)}{k}\pi+i\sin\frac{l(n-2a)}{k}\pi\Big)$$
$$=\frac{2^n}{k}+\frac{2^n}{k}\sum_{l=1}^{k-1}\cos^n\frac{l\pi}{k}\cos\frac{l(n-2a)}{k}\pi$$
$$+\Big(\frac{2^n}{k}\sum_{l=0}^{k-1}\cos^n\frac{l\pi}{k}\sin\frac{l(n-2a)}{k}\pi\Big)i.$$

比较上式两边的实部和虚部，就得到

$$\sum_{m=0}^{p}C_n^{a+mk}=\frac{2^n}{k}+\frac{2^n}{k}\sum_{l=1}^{k-1}\cos^n\frac{l\pi}{k}\cos\frac{l(n-2a)}{k}\pi, \tag{39}$$

以及
$$\sum_{l=0}^{k-1}\cos^n\frac{l\pi}{k}\sin\frac{l(n-2a)}{k}\pi=0. \tag{40}$$

(39) 式就是我们要求的和，实际上(39) 式还可以化简.

i) 当 k 为偶数时，

$$\sum_{l=1}^{k-1}\cos^n\frac{l\pi}{k}\cos\frac{l(n-2a)}{k}\pi=\sum_{l=1}^{\frac{k}{2}-1}\cos^n\frac{l\pi}{k}\cos\frac{l(n-2a)}{k}\pi$$
$$+\sum_{l=\frac{k}{2}+1}^{k-1}\cos^n\frac{l\pi}{k}\cos\frac{l(n-2a)}{k}\pi,$$

把后一和式中的 l 换成 $k-l$ 后得

$$\sum_{k-l=\frac{k}{2}+1}^{k-1}\cos^n\frac{k-l}{k}\pi\cdot\cos\frac{(k-l)(n-2a)}{k}\pi$$
$$=\sum_{l=1}^{\frac{k}{2}-1}(-1)^n\cos^n\frac{l\pi}{k}\times(-1)^n\cos\frac{l(n-2a)}{k}\pi$$
$$=\sum_{l=1}^{\frac{k}{2}-1}\cos^n\frac{l\pi}{k}\cos\frac{l(n-2a)}{k}\pi.$$

于是(39) 式就变为

$$\sum_{m=0}^{p} C_n^{a+mk} = \frac{2^n}{k} + \frac{2^n}{k}\sum_{l=1}^{\frac{k}{2}-1} 2\cos^n \frac{l\pi}{k}\cos\frac{l(n-2a)}{k}\pi,$$

或

$$\sum_{m=0}^{[\frac{n-a}{k}]} C_n^{a+mk} = \frac{2^n}{k}\left(2\sum_{l=0}^{\frac{k}{2}-1}\cos^n \frac{l\pi}{k}\cos\frac{l(n-2a)}{k}\pi - 1\right). \quad (41)$$

ii）当 k 为奇数时，同样可将(39)式化为

$$\sum_{m=0}^{[\frac{n-a}{k}]} C_n^{a+mk} = \frac{2^n}{k}\left(2\sum_{l=0}^{\frac{k-1}{2}}\cos^n \frac{l\pi}{k}\cos\frac{l(n-2a)}{k}\pi - 1\right). \quad (42)$$

由于 $[\frac{k-1}{2}] = \begin{cases} \frac{k}{2} - 1 & (k\text{ 为偶数}) \\ \frac{k-1}{2} & (k\text{ 为奇数}), \end{cases}$ 所以(41)和(42)两式可合并为

$$\sum_{m=0}^{[\frac{n-a}{k}]} C_n^{a+mk} = \frac{2^n}{k}\left(2\sum_{l=0}^{[\frac{k-1}{2}]}\cos^n \frac{l\pi}{k}\cos\frac{l(n-2a)}{k}\pi - 1\right). \quad (43)$$

特别当 $k=1$ 或 $k=2$ 时，(43)式就化为本节开头出现的几个公式. 因此(43)式是这些公式的推广.

一类三角恒等式

武汉化工学校　刘小宁

本文利用几个三角倍角公式、韦达定理及对称多项式的有关知识得到了一类三角恒等式.

（一）几个三角倍角公式

公式 1　$\sin(2n+1)\theta = \sum_{k=0}^{n}(-1)^{n-k}(C_{2n-k+1}^{k} + C_{2n-k}^{k-1})4^{n-k}\sin^{2(n-k)+1}\theta.$

公式 2　$\sin(2n+1)\theta = \sin\theta\sum_{k=0}^{n}(-1)^{n-k}C_{2n-k}^{k}4^{n-k}\cos^{2(n-k)}\theta.$

公式 3　$\cos(2n+1)\theta = \sum_{k=0}^{n}(-1)^{k}(C_{2n-k+1}^{k} + C_{2n-k}^{k-1})4^{n-k}\cos^{2(n-k)+1}\theta.$

公式 4　$\cos(2n+1)\theta = \cos\theta\sum_{k=0}^{n}(-1)^{n-k}C_{2n-k}^{k}4^{n-k}\sin^{2(n-k)}\theta.$

公式 5　$\sin2n\theta = \cos\theta\sum_{k=0}^{n-1}(-1)^{n-k}C_{2n-k-1}^{k}2^{2(n-k)-1}\sin^{2(n-k-1)}\theta.$

公式 6　$\sin2n\theta = \sin\theta\sum_{k=0}^{n-1}(-1)^{k}C_{2n-k-1}^{k}2^{2(n-k)-1}\cos^{2(n-k)-1}\theta.$

公式 7　$\sin2n\theta = \sum_{k=0}^{n}(-1)^{k}(C_{2n-k}^{k} + C_{2n-k-1}^{k-1})4^{n-k}\cos^{2(n-k)}\theta.$

公式 8 $\cos 2n\theta=\frac{1}{2}\sum_{k=0}^{n}(-1)^{n-k}(C_{2n-k}^{k}+C_{2n-k-1}^{k-1})4^{n-k}\sin^{2(n-k)}\theta.$

公式 9 $\sin(2n+1)\theta=\sum_{k=0}^{n}(-1)^{k}C_{2n+1}^{2k+1}\cos^{2(n-k)}\theta\sin^{2k+1}\theta.$

公式 10 $\cos(2n+1)\theta=\sum_{k=0}^{n}(-1)^{k}C_{2n+1}^{2k}\cos^{2(n-k)+1}\theta\sin^{2k}\theta.$

公式 11 $\sin 2n\theta=\sum_{k=0}^{n-1}(-1)^{k}C_{2n}^{2k+1}\cos^{2(n-k)-1}\theta\sin^{2k+1}\theta.$

公式 12 $\cos 2n\theta=\sum_{k=0}^{n}(-1)^{k}C_{2n}^{2k}\cos^{2(n-k)}\theta\sin^{2k}\theta.$

上面我们给出了关于三角函数(正弦和余弦)的多倍角公式，其中公式 1 — 8 在一般的数学书籍中查阅不到，可供有关人员参考使用.

利用上述 12 个倍角公式，还可以导出正切或余切的多倍角公式，此处不赘述.

(二)一类三角恒等式

利用公式 1、2、5、6、9、11，并应用韦达定理以及对称多项式的有关知识，导出许多三角恒等式.

2.1 韦达定理

对于给定系数的一元 n 次方程

$$\sigma_0x^n-\sigma_1x^{n-1}+\sigma_2x^{n-2}-\cdots+(-1)^n\sigma_n=0, \qquad ①$$

如果 $x_i(1\leqslant i\leqslant n)$ 是它的根，则由韦达定理得

$$\sum_{k=1}^{n}x_k=\frac{\sigma_1}{\sigma_0},\ \sum_{\substack{k_1=1\\k_1<k_2}}^{n}x_{k_1}\cdot x_{k_2}=\frac{\sigma_2}{\sigma_0},\cdots,$$

$$\sum_{\substack{k_1=1\\k_1<\cdots<k_m}}^{n}\prod_{i=1}^{m}x_{k_i}=\frac{\sigma_m}{\sigma_0},\cdots,\prod_{k=1}^{n}x_k=\frac{\sigma_n}{\sigma_0}.$$

2.2 对称多项式

根据对称多项式的知识可知，韦达定理左半边的部分属于初等(基本)对称多项式，对称多项式的基本定理告诉我们：n 个未知量 $x_k(1\leqslant k\leqslant n)$ 的每一个对称多项式均可唯一地表示成初等对称多项式 $\sigma_0,\sigma_1,\sigma_2,\cdots,\sigma_n$ 的多项式. 对于方程① 来说，我们很容易根据排字典方法求出如下对称多项式的表达式

$$\sum_{\substack{k_1=1\\k_1<k_2}}^{n}x_{k_1}{}^2\cdot x_{k_2}=\frac{\sigma_1\sigma_2}{\sigma_0{}^2}-\frac{3\sigma_3}{\sigma_0}\quad(n\geqslant 3). \tag{②}$$

$$\sum_{\substack{k_1=1\\k_1<k_2<k_3}}^{n}x_{k_1}{}^2\cdot x_{k_2}\cdot x_{k_3}=\frac{\sigma_1{}^2\cdot\sigma_3}{\sigma_0{}^3}-\frac{2\sigma_2\sigma_3}{\sigma_0{}^2}-\frac{\sigma_1\sigma_4}{\sigma_0{}^2}+\frac{5\sigma_5}{\sigma_0}\quad(n\geqslant 5). \tag{③}$$

$$\sum_{\substack{k_1=1\\k_1<k_2}}^{n}x_{k_1}{}^3\cdot x_{k_2}{}^3=\frac{\sigma_2{}^3}{\sigma_0{}^3}-\frac{3\sigma_1\sigma_2\sigma_3}{\sigma_0{}^3}+\frac{3\sigma_3{}^2}{\sigma_0{}^2}-\frac{8\sigma_1\sigma_5}{\sigma_0{}^2}+\frac{3\sigma_6}{\sigma_0}\quad(n\geqslant 6). \tag{④}$$

$$\sum_{\substack{k_1=1\\k_1<k_2<k_3}}^{n}x_{k_1}{}^3\cdot x_{k_2}{}^2\cdot x_{k_3}=\frac{\sigma_1\sigma_2\sigma_3}{\sigma_0{}^3}-\frac{3\sigma_3{}^2}{\sigma_0{}^2}\quad(n\geqslant 3). \tag{⑤}$$

$$\sum_{\substack{k_1=1\\k_1<k_2<k_3}}^{n}x_{k_1}{}^2\cdot x_{k_2}{}^2\cdot x_{k_3}=\frac{5\sigma_5}{\sigma_0}-\frac{3\sigma_1\sigma_4}{\sigma_0{}^2}+\frac{\sigma_2\sigma_3}{\sigma_0{}^2}\quad(n\geqslant 5). \tag{⑥}$$

$$\sum_{\substack{k_1=1\\k_1<\cdots<k_4}}^{n}x_{k_1}{}^2\cdot x_{k_2}{}^2\cdot x_{k_3}\cdot x_{k_4}=\frac{9\sigma_6}{\sigma_0}-\frac{4\sigma_1\sigma_5}{\sigma_0{}^2}+\frac{\sigma_2\sigma_4}{\sigma_0{}^2}\quad(n\geqslant 6). \tag{⑦}$$

2.3 一类三角恒等式的导出

利用 2.1 及 2.2 的知识，可以导出许多三角恒等式

定理 1 $\sin^2 \frac{j}{2n+1}\pi (1 \leqslant j \leqslant n)$ 是方程 $a_0x^n - a_1x^{n-1} + a_2x^{n-2} - \cdots + (-1)^n a_n = 0$ 之根，其中方程系数为 $a_k = \frac{C_{2n-k+1}^k + C_{2n-k}^{k-1}}{4^k}, k = 0,1,\cdots,n.$

证明 令公式 1 中 $\theta = j\pi/(2n+1)$，当 $j = 1,2,\cdots,n$ 时，$\sin(2n+1)\theta = \sin j\pi = 0, \sin\theta \neq 0$，于是由公式 1 有

$$\sum_{k=0}^{n}(-1)^{n-k}(C_{2n-k+1}^k + C_{2n-k}^{k-1})4^{n-k}\sin^{2(n-k)+1}\theta = 0,$$

注意到 $(-1)^{n-k} = (-1)^{n+k}$，故

$$\sum_{k=0}^{n}(-1)^k(C_{2n-k+1}^k + C_{2n-k}^{k-1})4^{n-k}\sin^{2(n-k)}\theta = 0.$$

由上式即知定理 1 成立. □

把韦达定理用于定理 1，就可以得到

$$\sum_{j=1}^{n}\sin^2 \frac{j}{2n+1}\pi = \frac{2n+1}{4};$$

$$\prod_{j=1}^{n}\sin \frac{j}{2n+1}\pi = \frac{\sqrt{2n+1}}{2^n};$$

$$\sum_{\substack{k_1=1 \\ k_1<k_2<k_3}}^{n} \sin^6 \frac{k_1}{2n+1}\pi \cdot \sin^4 \frac{k_2}{2n+1}\pi \cdot \sin^2 \frac{k_3}{2n+1}\pi$$

$$= \frac{(2n+1)^2(2n-3)(n-2)(6n-7)}{12288}; (n \geqslant 3)$$

$$\sum_{\substack{k_1=1 \\ k_1<k_2<k_3}}^{n} \sin^4 \frac{k_1}{2n+1}\pi \cdot \sin^4 \frac{k_2}{2n+1}\pi \cdot \sin^2 \frac{k_3}{2n+1}\pi$$

$$= \frac{(2n+1)(n-3)(4n^3-16n^2-38n-77)}{3072}. (n \geqslant 5)$$

定理 2 $\cos^2\frac{j}{2n+1}\pi(1\leqslant j\leqslant n)$ 是方程 $b_0x^n-b_1x^{n-1}+b_2x^{n-2}-\cdots+(-1)^nb_n=0$ 之根，其中方程系数为 $b_k=\frac{C_{2n-k}^k}{4^k},k=0,1,2,\cdots,n.$

证明 在公式 2 中令 $\theta=j\pi/(2n+1)$，因为 $\sin(2n+1)\theta=\sin j\pi=0,\sin\theta\neq 0$，于是有

$$\sum_{k=0}^{n}(-1)^kC_{2n-k}^k\cdot 4^{n-k}\cos^{2(n-k)}\frac{k\pi}{2n+1}=0,$$

即

$$\sum_{k=0}^{n}(-1)^kC_{2n-k}^k\cdot 4^k\cos^{2(n-k)}\frac{k\pi}{2n+1}=0.$$

由此即知定理 2 成立. □

定理 3 $\sin^2\frac{k}{2n}\pi$（或 $\cos^2\frac{k}{2n}\pi,1\leqslant k\leqslant n-1$）是 $c_0x^{n-1}-c_1x^{n-2}+c_2x^{n-3}-\cdots+(-1)^{n-1}c_{n-1}=0$ 之根，其中方程系数为 $c_k=\frac{C_{2n-k-1}^k}{4^k},k=0,1,\cdots,n-1.$

证明 在公式 5（或公式 6）中令 $\theta=\frac{k\pi}{2n}$，当 $k=1,2,\cdots,n-1$ 时，有 $\sin 2n\theta=\sin k\pi=0$，而 $\sin\theta\neq 0$（或 $\cos\theta\neq 0$），于是

$$\sum_{k=0}^{n-1}(-1)^{n-k}C_{2n-k-1}^k\cdot 2^{2(n-k)-1}\sin^{2(n-1-k)}\frac{k\pi}{2n}=0,$$

即

$$\sum_{k=0}^{n-1}(-1)^kC_{2n-k-1}^k\cdot 4^{-k}\sin^{2(n-1-k)}\frac{k\pi}{2n+1}=0.$$

同理有

$$\sum_{k=0}^{n-1}(-1)^kC_{2n-k-1}^k\cdot 4^{-k}\cos^{2(n-1-k)}\frac{k\pi}{2n}=0.$$

由上面两式即知定理 3 成立. □

定理 4 $\mathrm{tg}^2\frac{j\pi}{2n+1}(1\leqslant j\leqslant n)$ 是方程 $d_0x^n-d_1x^{n-1}+d_2x^{n-2}-\cdots+(-1)^nd_n=0$ 之根，其中方程系数为 $d_k=C_{2n+1}^{2k},k=0,1,\cdots,n.$

证明 令公式 9 中 $\theta=j\pi/(2n+1)$，当 $j=1,2,\cdots,n$ 时，

$\sin(2n+1)\theta = \sin j\pi = 0, \cos\theta \neq 0$,故有

$$\sum_{k=0}^{n}(-1)^k C_{2n+1}^{2k+1}\cos^{2(n-k)}\theta \cdot \sin^{2k+1}\theta = 0,$$

即
$$\sum_{k=0}^{n}(-1)^k C_{2n+1}^{2k+1}\mathrm{tg}^{2k}\theta = 0.$$

令上式中 $k = n - r$,因当 $k = 0,1,2,\cdots,n$ 时,$r = n, n-1, \cdots, 0$,于是有

$$\sum_{r=0}^{n}(-1)^{n-r} \cdot C_{2n+1}^{2(n-r)+1}\mathrm{tg}^{2(n-r)}\theta = 0,$$

故
$$\sum_{r=0}^{n}(-1)^r \cdot C_{2n+1}^{2r}\mathrm{tg}^{2(n-r)}\frac{r\pi}{2n+1} = 0.$$

由此即知定理 4 成立. □

定理 5 $\mathrm{tg}^2\frac{j\pi}{2n}(1 \leqslant j \leqslant n-1)$ 是方程

$$e_0x^{n-1} - e_1x^{n-2} + e_2x^{n-3} - \cdots + (-1)^{n-1}e_{n-1} = 0$$ 之根,

其中方程系数

$$e_r = \frac{C_{2n}^{2r-1}}{2n}(r = 0,1,\cdots,n-1).$$

证明 令公式 11 中 $\theta = j\pi/(2n)$,当 $j = 1,2,\cdots,n-1$ 时,$\sin\theta = \sin j\pi = 0, \sin\theta \neq 0, \cos\theta \neq 0$,于是有

$$\sum_{k=0}^{n-1}(-1)^k C_{2n}^{2k+1}\cos^{2(n-k)-1}\frac{k\pi}{2n} \cdot \sin^{2k+1}\frac{k\pi}{2n} = 0,$$

即
$$\sum_{k=0}^{n-1}(-1)^k C_{2n}^{2k+1}\mathrm{tg}^{2k}\frac{k\pi}{2n} = 0.$$

令上式中 $k = n-1-r$,当 $k = 0,1,\cdots,n-1$ 时,$r = n-1, n-2, \cdots, 0$,于是有

$$\sum_{r=0}^{n-1}(-1)^{n-r}C_{2n}^{2(n-1-r)+1} \cdot \mathrm{tg}^{2(n-1-r)}\frac{r\pi}{2n} = 0,$$

故
$$\sum_{r=0}^{n-1}(-1)^r C_{2n}^{2r+1}\mathrm{tg}^{2(n-1-r)} \cdot \frac{r\pi}{2n} = 0.$$

由上式即知定理 5 成立. □

把韦达定理和对称多项式应用于定理 2 至定理 5 中，也可得到许多三角恒等式.

关于二阶等差数列

长沙铁道学院　肖果能

在各阶等差数列的家族中，一阶等差数列（即通常所称的等差数列）是人们最熟悉的一种数列．但因为一阶等差数列十分简单而且便于研究，因而缺乏典型性与代表性、既简单又在实质上有意义的是二阶等差数列．本文用递归方法建立了二阶等差数列的若干性质，这种方法原则上亦适用于高阶等差数列的研究．

（一）递归关系式与基本不变量

设$\{x_n\}_{n\geqslant 0}$是二阶等差数列，依定义

$$\Delta x_n = x_{n+1} - x_n, n \geqslant 0 \tag{1}$$

为等差数列，设其公差为d．对任意的$n \geqslant 1$，由

$$\Delta x_n - \Delta x_{n-1} = (x_{n+1} - x_n) - (x_n - x_{n-1}) = d \neq 0 \tag{2}$$

可得

$$x_{n+1} = 2x_n - x_{n-1} + d, \tag{3}$$

故二阶等差数列是二阶线性非齐次递归数列．又由

$$(x_{n+2} - x_{n+1}) - (x_{n+1} - x_n) = (x_{n+1} - x_n) - (x_n - x_{n-1}) = d \tag{4}$$

可得

$$x_{n+2} = 3x_{n+1} - 3x_n + x_{n-1}, \tag{5}$$

故二阶等差数列是三阶线性齐次递归数列．

利用递归式(3),我们可以建立二阶等差数列的一个很有用的基本不变量.

定理 1 设$\{x_n\}_{n\geqslant 0}$为二阶等差数列,则对于任意的$n\geqslant 1$,

$$x_n^2 - x_{n+1}x_{n-1} - dx_n = M, \tag{6}$$

此处

$$M = x_1^2 - x_2x_0 - dx_1 \tag{7}$$

为与n无关的常量.

证明 由(3)可知

$$\begin{aligned} & x_n^2 - x_{n+1}x_{n-1} - dx_n \\ = & x_n^2 - (2x_n - x_{n-1} + d)x_{n-1} - dx_n \\ = & x_{n-1}^2 - x_n(2x_{n-1} - x_n + d) - dx_{n-1} \\ = & x_{n-1}^2 - x_nx_{n-2} - dx_{n-1}, \end{aligned}$$

重复这一过程,直到

$$\begin{aligned} & x_n^2 - x_{n+1}x_{n-1} - dx_n \\ & \quad = x_1^2 - x_2x_0 - dx_1 = M. \end{aligned}$$

定理得证. □

利用定理 1,我们可以进一步得到二阶等差数列的一种一阶的递归关系式,为此,先证明下面的

引理 对于二阶等差数列$\{x_n\}_{n\geqslant 0}$,

若$d>0$,则从某项开始数列单调上升;

若$d<0$,则从某项开始数列单调下降.

证明 当$d>0$时,$\{\Delta x_n\}$单调上升,故从某项开始Δx_n为正,因而$\{x_n\}$从某项开始单调上升;$d<0$的情形仿此. □

作为基本不变量的应用,我们来建立数列$\{x_n\}$的一阶递归关系式:

定理 2 设$\{x_n\}$为二阶等差数列,则

$$x_{n+1} = \frac{1}{2}\left[(2x_n + d) \pm \sqrt{8dx_n + (d^2 + 4M)}\right], \tag{8}$$

其中，若 $d>0$，则从某项开始，根号前取"+"号；若 $d<0$，则从某项开始，根号前取"−"号.

证明 将递归关系(3)代入基本不变量(6)，得

$$x_{n+1}^2 - x_n(2x_{n+1} - x_n + d) - dx_{n+1} = M,$$

整理得

$$x_{n+1}^2 - (2x_n + d)x_{n+1} + [(x_n - d)x_n - M] = 0,$$

这是关于 x_{n+1} 的二次方程，故得

$$\begin{aligned} x_{n+1} &= \frac{1}{2}[(2x_n + d) \\ &\quad \pm \sqrt{(2x_n^2 + d)^2 - 4((x_n - d)x_n - M)}] \\ &= \frac{1}{2}[(2x_n + d) \pm \sqrt{(8dx_n + (d^2 + 4M)}], \end{aligned}$$

由引理可知，若 $d>0$，则从某项开始，$\{x_n\}$ 单调上升，因而(8)中的根号前取"+"号；$d<0$ 的情形仿此. □

同样地，我们亦可建立用 x_{n+1} 表示 x_n 的关系式，即有

推论 设 $\{x_n\}$ 为二阶等差数列，则

$$x_n = \frac{1}{2}[(2x_{n+1} + d) \pm \sqrt{8dx_{n+1} + (d^2 + 4M)}], \quad (9)$$

其中，若 $d>0$，则从某项开始，根号前取"−"号；若 $d<0$，则从某项开始，根号前取"+"号. □

(二) 基本不变量与通项公式

根据由基本不变量所建立的一阶递归式(8)，我们可设

$$x_{n+1} = \frac{1}{2}(2x_n + d + y_n), \quad (9)$$

其中 y_n 已有确定的符号，且

$$y_n^2 = 8dx_n + (d^2 + 4M), \quad (10)$$

特别地

$$x_1=\frac{1}{2}(2x_0+d+y_0), y_0^2=8dx_0+d^2+4M. \quad (11)$$

(8) 的意义在于可以用来建立二阶等差数列的一种以基本不变量表示的通项公式,即

定理 3 二阶等差数列的通项公式为

$$x_n=\frac{1}{8d}[(y_0+2nd)^2-(d^2+4M)]. \quad (12)$$

证明 由(9)得

$$y_n=2(x_{n+1}-x_n)-d=2(\Delta x_n)-d, \quad (13)$$

由于$\{\Delta x_n\}$是公差为d的等差数列,故$\{y_n\}$是公差为$2d$的等差数列,因而

$$y_n=y_0+2nd, \quad (14)$$

代入(10)得

$$(y_0+2nd)^2=8dx_n+(d^2+4M), \quad (15)$$

于(15)中解出x_n,即得通项公式(12). □

推论 二阶等差数列$\{x_n\}$的通项公式为

$$x_n=x_0+n(x_1-x_0)+\frac{1}{2}n(n-1)d. \quad (16)$$

证明 由(12)及(11)得

$$\begin{aligned}x_n&=\frac{1}{8d}[(y_0^2+4ndy_0+4n^2d^2)-(d^2+4M)]\\&=\frac{1}{8d}[8dx_0+(d^2+4M)+4nd(2(x_1-x_0)-d)\\&\quad+4n^2d^2-(d^2+4M)]\\&=\frac{1}{2}[2x_0+n(2(x_1-x_0)-d)+n^2d]\\&=\frac{1}{2}[2x_0+2n(x_1-x_0)-nd+n^2d]\\&=x_0+n(x_1-x_0)+\frac{1}{2}n(n-1)d.\end{aligned}$$ □

注 其实,(16)不难由等差数列求和公式直接得出,即

$$x_n=x_0+x_n-x_0$$

$$= x_0 + (x_1 - x_0) + (x_2 - x_1) + (x_3 - x_2) + \cdots + (x_n - x_{n-1})$$

$$= x_0 + n(x_1 - x_0) + \frac{1}{2}n(n-1)d.$$

这一结果是我们熟知的.

(三) 矩阵表示及其应用

现在我们给出二阶等差数列的两种矩阵表示，并利用矩阵表示给出二阶等差数列的一些性质.

令

$$D_n = \begin{bmatrix} x_n & x_{n+1} & x_{n+2} \\ x_{n+1} & x_{n+2} & x_{n+3} \\ x_{n+2} & x_{n+3} & x_{n+4} \end{bmatrix}, \tag{17}$$

则矩阵序列 $\{D_n\}_{n\geqslant 0}$ 中每个矩阵左上角(即第一行、第一列) 的元素组成数列 $\{x_n\}_{n\geqslant 0}$，故 $\{D_n\}$ 可以作为数列 $\{x_n\}$ 的一种矩阵表示，称为数列 $\{x_n\}$ 的矩阵表示.

考察矩阵序列 $\{D_n\}$ 中各矩阵之间的关系，令

$$\varDelta = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & -3 & 3 \end{bmatrix}, \tag{18}$$

则由矩阵的乘法及数列 $\{x_n\}$ 的递归关系式(5)，可以验证

$$D_{n+1} = \varDelta D_n, \tag{19}$$

于是我们有

$$D_n = \varDelta^n D_0. \tag{20}$$

根据(20)，为研究 $\{D_n\}$，我们应该研究 $\{\varDelta^n\}$ 的结构，设

$$\varDelta^n = \begin{bmatrix} Q_{11}^{(n)} & Q_{12}^{(n)} & Q_{13}^{(n)} \\ Q_{21}^{(n)} & Q_{22}^{(n)} & Q_{23}^{(n)} \\ Q_{31}^{(n)} & Q_{32}^{(n)} & Q_{33}^{(n)} \end{bmatrix}, \tag{21}$$

则 $Q_{ij}^{(0)}=\delta_{ij}(\delta_{ij}=0,\delta_{ij}=1,i\neq j)$,$Q_{ij}^{(1)}$ 即 $\varDelta$ 中各元素,而 $\varDelta^2$ 为

$$\varDelta^2=\begin{bmatrix}0 & 0 & 1\\ 1 & -3 & 3\\ 3 & -8 & 6\end{bmatrix}, \tag{22}$$

计算出 $\varDelta$ 的特征多项式

$$\varphi(\lambda)=|\lambda I-\varDelta|=\begin{vmatrix}\lambda & -1 & 0\\ 0 & \lambda & -1\\ -1 & 3 & \lambda-3\end{vmatrix}=\lambda^3-3\lambda^2+3\lambda-1, \tag{23}$$

由 Cayley − Hamilton 定理,可知 $\varphi(\varDelta)=0$,故得

$$\varDelta^3=3\varDelta^2-3\varDelta+I, \tag{24}$$

两边同乘以 $\varDelta^n$,得

$$\varDelta^{n+3}=3\varDelta^{n+2}-3\varDelta^{n+1}+\varDelta^n, \tag{25}$$

比较两边的(i,j) 元,得

$$Q_{ij}^{(n+3)}=3Q_{ij}^{(n+2)}-3Q_{ij}^{(n+1)}+Q_{ij}^{(n)}, \tag{26}$$

故对任意 $ij(1\leqslant i,j\leqslant 3)$,$\{Q_{ij}^{(n)}\}_{n\geqslant 0}$ 为三阶递归数列(且为二阶等差数列),其初始值为矩阵 $I,\varDelta,\varDelta^2$ 之各对应元素,另外,由 $\varDelta$ 的结构易知

$$Q_{1j}^{(n+2)}=Q_{2j}^{(n+1)}=Q_{3j}^{(n)}. \tag{27}$$

利用矩阵表示,可以得到数列$\{x_n\}$ 的下面的一些性质:

首先,我们建立数列$\{x_n\}$ 的另一个不变量,即

定理 4 设$\{x_n\}$ 为二阶等差数列,则对任意的 n,均有

$$(x_{n+2}^3+x_{n+1}^2x_{n+4}+x_nx_{n+3}^2)-(x_nx_{n+2}x_{n+4}+2x_{n+1}x_{n+2}x_{n+3})=d^3. \tag{28}$$

证明 容易算出 $\varDelta$ 的行列式为 $|\varDelta|=1$,故由(20) 可知

$$|D_n|=|\varDelta|^n\cdot|D_0|=|D_0|, \tag{29}$$

故 D_n 的行列式的值与 n 无关,即

$$|D_n| = \begin{bmatrix} x_n & x_{n+1} & x_{n+2} \\ x_{n+1} & x_{n+2} & x_{n+3} \\ x_{n+2} & x_{n+3} & x_{n+4} \end{bmatrix} \tag{30}$$

是一个不变量，计算 $|D_0|$ 的值，

$$\begin{vmatrix} x_0 & x_1 & x_2 \\ x_1 & x_2 & x_3 \\ x_2 & x_3 & x_4 \end{vmatrix} \quad \begin{pmatrix} \text{第 3 行减去第 2 行} \\ \text{第 2 行加上第 1 行} \end{pmatrix}$$

$$= \begin{vmatrix} x_0 & x_1 & x_2 \\ x_1 - x_0 & x_2 - x_1 & x_3 - x_2 \\ x_2 - x_1 & x_3 - x_2 & x_4 - x_3 \end{vmatrix} \quad \begin{pmatrix} \text{第 3 行减去第 2 行} \\ \text{第 2 行加上第 1 行} \end{pmatrix}$$

$$= \begin{vmatrix} x_0 & x_1 & x_2 \\ x_1 & x_2 & x_3 \\ d & d & d \end{vmatrix} \quad \begin{pmatrix} \text{第 3 列减去第 2 列} \\ \text{第 2 列减去第 1 列} \end{pmatrix}$$

$$= d \begin{vmatrix} x_0 & x_1 - x_0 & x_2 - x_1 \\ x_1 & x_2 - x_1 & x_3 - x_2 \\ 1 & 0 & 0 \end{vmatrix} \quad (\text{第 3 列减去第 2 列})$$

$$= d \begin{vmatrix} x_0 & x_1 - x_0 & d \\ x_1 & x_2 - x_1 & d \\ 1 & 0 & 0 \end{vmatrix} \quad (\text{按第 3 行展开})$$

$$= d^2[(x_1 - x_0) - (x_2 - x_1)] = -d^3.$$

故得 $|D_n| = -d^3$，展开 $|D_n|$，即得(28). □

其次，我们给出数列 $\{x_n\}$ 的任意阶递归表示. 设 $r \geqslant 4$，如果 $\{x_n\}$ 有 r 阶递归表示，则有

$$x_{n+r} = b_1 x_{n+r-1} + \cdots + b_r x_n, \quad (b_1, \cdots, b_r \text{ 为已知常数}) \tag{31}$$

利用矩阵表示易知这种递归表示是存在的.

定理 5 设 $\{x_n\}$ 为二阶等差数列，$r \geqslant 4$，则 $\{x_n\}$ 有 r 阶递归表示(31)，其中

$$\begin{cases} b_r = Q_{11}^{(r)}, b_{r-1} = Q_{12}^{(r)}, b_{r-2} = Q_{13}^{(r)}, \\ b_1 = \cdots = b_{r-3} = 0. \end{cases} \tag{32}$$

证明　由(20)可知

$$D_{n+r} = \Delta^r D_n, \tag{33}$$

比较两边第一行第一列的元素，得

$$x_{n+r} = Q_{11}^{(r)} x_n + Q_{12}^{(r)} x_{n+1} + Q_{13}^{(r)} x_{n+2}. \tag{34}$$

此即数列$\{x_n\}$的r阶递归表示，比较(31)与(34)，可知有(32)成立. □

(四)　二阶等差数列与不定方程

现设二阶等差数列$\{x_n\}$的各项均为整数，则(8)中的x_{n+1}为整数，因而根号内的式子$8dx_n + (d^2 + 4M)$应为完全平方数，记为y_n^2，由(14)知$y_n = y_0 + 2nd$，其中y_0由(11)确定：$y_0 = 2(x_1 - x_0) - d$. 由此得

定理 6　设$\{x_n\}$为二阶等差数列，且x_0, x_1及d均为整数，则对于数列中的任一项x_n，$8dx + (d^2 + 4M)$必为完全平方数(其中M为由(6)、(7)定义的基本不变量)，换言之，即对于任意n，数组$(x_n, 2(x_1 - x_0) + (2n - 1)d)$是不定方程

$$8dX - Y^2 + (d^2 + 4M) = 0 \tag{35}$$

的整数解.

注意到递归式(8)，我们可以给出方程(35)的一个有趣的性质.

定理 7　设(x, y)是方程(35)的任一组整数解，而x'由

$$x' = \frac{1}{2}[(2x + d) \pm y] \tag{36}$$

确定(其中的双重符号“±”可任意取定)，则存在整数y'，使(x', y')亦为(35)的整数解.

证明 $8dx' + d^2 + 4M$

$$\begin{aligned}
&= 4d[(2x+d) \pm y] + d^2 + 4M \\
&= 8dx + 4d^2 \pm 4dy + d^2 + 4M \\
&= (8dx + d^2 + 4M) \pm 4dy + 4d^2 \\
&= y^2 \pm 4dy + 4d^2 = (y \pm 2d)^2.
\end{aligned} \tag{37}$$

取 $y' = y \pm 2d$,则(37)表明(x', y')为(35)的解. □

由定理 6 可知,数列$\{x_n\}$给出了不定方程(35)的无穷多组整数解.但它们并非(35)的全部整数解.事实上,设$\{x_n\}_{n\geqslant 0}$,由递归关系

$$x_{n+2} = 2x_{n+1} - x_n + d \tag{38}$$

确定,因而有

$$x_n = 2x_{n+1} - x_{n+2} + d. \tag{39}$$

当$n<0$时,我们按(39)递归地定义x_n,于是数列$\{x_n\}_{n\geqslant 0}$拓展成为数列$\{x_n: -\infty < n < +\infty\}$.容易知道,拓展后的数列中的各项仍然满足递归关系(36),因而与原数列有相同的基本不变量,故对于原数列证明过的定理对于拓展后的数列仍然有效,特别,拓展后的数列的各项均满足方程(35).一般地说,拓展后的数列的各项通常仍不是(35)的全部整数解.关于(35)的全部整数解的问题需要进一步地深入研究,限于篇幅,本文不予涉及.

最后,我们略微讨论一下二阶等差数列的项的判定问题.二阶等差数列$\{x_n\}_{n\geqslant 0}$由(x_0, x_1, d)或由(x_0, x_1, x_2)确定.对于任给的x,试问:x是否数列$\{x_n\}$中的一项?当(x_0, x_1, d)或(x_0, x_1, x_2)均为整数时,若x为数列中的一项,则x应为整数;若x为整数,则由定理 6,x应满足方程(35),即要使$8dx + (d^2 + 4M)$为完全平方数;若$8dx + (d^2 + 4M)$为完全平方数,则由通项公式,应有$2d \mid \sqrt{8dx + (d^2 + 4M)} - y_0$(其中$y_0$由(11)确定),且商$\frac{1}{2d}(\sqrt{8dx + (d^2 + 4M)} - y_0)$为非负整数.在一般情形下,由(8)

可知,对于$\{x_n\}$中的项x_n,应有

$$8dx_n + (d^2 + 4M) \geqslant 0, \tag{40}$$

故若x为数列中的一项,则当$d > 0$时,应有

$$x \geqslant -\frac{1}{8d}(d^2 + 4M), \tag{41}$$

当$d < 0$时,应有

$$x \leqslant -\frac{1}{8d}(d^2 + 4M). \tag{42}$$

若x满足这些不等式,则由通项公式,x应使$\frac{1}{2d}(\sqrt{8dx + (d^2 + 4M)} - y_0)$为非负整数,顺便指出,对于拓展后的数列$\{x_n: -\infty < n < +\infty\}$,若数列的各项均为整数且它们恰是方程(35)的全部整数解,则对于任给的整数x,x是拓展后的数列中的一项,当且仅当$8dx + (d^2 + 4M)$为完全平方数,但如我们已经申明,本文不对此问题作深入讨论.

参考文献

[1] 肖果能,关于广义等差数列的研究,《湖南数学通讯》,1993年第1期,33—37.

[2] 肖果能,关于二阶循环数列的一些性质,《益阳师专学报》(自然科学版),1991年第1期.

Shapiro 循环不等式

安徽大学数学系　盛立人
中国科技大学数学系　严镇军

(一) 石破天惊

1954 年美国数学月刊《American Mathematical Monthly》决定将下述问题公开征解，当时该题标号为《4603》.

设 $x_1 \geqslant 0, x_1 + x_{i+1} > 0, i = 1, 2, \cdots n$，又 $x_{n+1} = x_1$，证明下述不等式

$$S_n(x_1, x_2, \cdots, x_n) \geqslant \frac{n}{2}, \qquad (*)_n$$

其中

$$S_n(x_1, \cdots, x_n) = \sum_{i=1}^{n} \frac{x_i}{x_{i+1} + x_{i+2}}$$

$$= \frac{x_1}{x_2 + x_3} + \frac{x_2}{x_3 + x_4} + \cdots + \frac{x_{n-1}}{x_n + x_1} + \frac{x_n}{x_1 + x_2}.$$

不等式$(*)_n$又称为 Shapiro 不等式或循环不等式，当 $n = 3$ 时，$(*)_n$成为

$$\frac{a}{b+c} + \frac{b}{c+a} + \frac{c}{a+b} \geqslant \frac{3}{2}, \left(\begin{array}{l} a \geqslant 0, b \geqslant 0, c \geqslant 0, \\ a+b > 0, b+c > 0, a+c > 0 \end{array}\right)$$

这是中学数学的有名难题，也许正因为此，代号《4603》并未引起过多的注意. 可是，从此$(*)_n$竟然会在现代数学史上掀起一股不大不小的风波，这是当初谁也未曾料到的.

原来，$(*)_n$有着惊人的内涵！首先是，对较小的 $n = 3, 4, 5$，给

出一个证明并不容易；其次，不久有人发现，对相当大的 n，$(*)_n$ 根本就不成立，至于 $(*)_n$ 对什么 n 成立，又对什么 n 不成立，则在相当长时间内，一直未能搞清楚. 事情经过大致是这样的：

首先是1956年，有人找到了 $n=3,4,5$ 时，$(*)_n$ 的证明，但相当复杂；年末即有人对 $(*)_{20}$ 举出反例. 两年以后，先是有人证得 $(*)_6$，接着有人证明：(i) 对于 $n \geqslant 14$ 的偶数 n，$(*)_n$ 不恒成立；(ii) 对于充分大的 n（不论 n 是否为偶），$(*)_n$ 也不恒成立（至于 n 应多大，则完全不清楚）. 过了一年，又有人证明，对 $n \geqslant 53$ 的奇数 n，$(*)_n$ 也不恒成立. 但到了1963年，又有人证得 $(*)_8$，其方法也适合 $(*)_7$，同年又有人证明，对 $n \geqslant 27$ 的奇数 n，$(*)_n$ 也不恒成立. 最后，1968年，有人找到了 $(*)_9$ 与 $(*)_{10}$ 的证明.

到那时为止[2]，不等式 $(*)_n$ 算是初步被拨开了迷雾. 上面这些结果综合起来就是：$(*)_n$ 当 $n \leqslant 10$ 时恒成立；对 $n \geqslant 14$ 的偶数 n 及 $n \geqslant 27$ 的任何数 n，$(*)_n$ 不恒成立. 换句话说，尚有九种情况未能判定，它们是 $n = 11,12,13,15,17,19,21,23,25$.

（二）一叶知秋

在进一步讨论之前，让我们先用初等方法来研究一下 $(*)_n$，看一看能把问题推进到多远. 具体说来，我们将证明两件事.

断言一　对 $n = 3,4,5,6$，$(*)_n$ 恒成立；

断言二　对 $n \geqslant 14$ 的偶数 n，$(*)_n$ 不恒成立.

对于前者，我们提供一个可能是迄今为止的最简捷的证明，它同时适用于 $n = 3,4,5,6$ 四款. 后者，这是目前仅知的可用初等方法证明的大批量 (n) 结果.

断言一的证明

运用熟知的 Cauchy 不等式，可得

$$S_n(x_1,x_2,\cdots,x_n)\cdot\sum_{i=1}^{n}(x_{i+1}+x_{i+2})x_i$$

$$=\left(\sum_{i=1}^{n}\frac{x_i}{x_{i+1}+x_{i+2}}\right)\left(\sum_{i=1}^{n}(x_{i+1}+x_{i+2})x_i\right)\geqslant\left(\sum_{i=1}^{n}x_i\right)^2.$$

往下要证明，当 $n=3,4,5,6$ 时成立不等式

$$\left(\sum_{i=1}^{n}x_i\right)^2\geqslant\frac{n}{2}\sum_{i=1}^{n}(x_{i+1}+x_{i+2})x_i,\tag{1}$$

由此证得断言一，今记

$$\Phi=\left(\sum_{i=1}^{n}x_i\right)^2-\frac{n}{2}\sum_{i=1}^{n}(x_{i+1}+x_{i+2})x_i$$

$$=\Phi_0+2\Phi_1-\frac{n}{2}\Phi_2,\tag{2}$$

其中

$$\Phi_0=\sum_{i=1}^{n}x_i^2,\Phi_1=\sum_{\substack{i\neq j\\ i=j=1}}^{n}x_ix_j,\Phi_2=\sum_{i=1}^{n}(x_{i+1}+x_{i+2})x_i.$$

证明(1) 相当于证明(2) 中的 Φ 非负.

当 $n=3$ 时，恰有 $\Phi_2=2\cdot\Phi_1$，从而

$$\Phi=\Phi_0+2\Phi_1-\frac{3}{2}(2\Phi_1)=\Phi_0-\Phi_1$$

$$=\sum_{i=1}^{3}x_i^2-(x_1x_2+x_2x_3+x_3x_1)$$

$$=\frac{1}{2}[(x_1-x_2)^2+(x_2-x_3)^2+(x_3-x_1)^2]\geqslant 0.$$

当 $n=4$ 时，易得

$$\Phi_2=\Phi_1+(x_1x_3+x_2x_4),$$

从而

$$\Phi=\Phi_0+2\Phi_1-2(\Phi_1+x_1x_3+x_2x_4)$$

$$=\sum_{i=1}^{4}x_i^2-2(x_1x_3+x_2x_4)$$

$$=(x_1-x_3)^2+(x_2-x_4)^2\geqslant 0.$$

当 $n=5$ 时，易得 $\Phi_1=\Phi_2$，从而

$$
\begin{aligned}
\Phi &= \Phi_0+(2-\frac{5}{2})\Phi_1 \\
&= \sum_{i=1}^{5}x_i^2-\frac{1}{2}\sum_{\substack{i\neq j\\ i=j=1}}^{5}x_ix_j \\
&= \frac{1}{4}(4\sum_{i=1}^{5}x_i^2-2\sum_{\substack{i\neq j\\ i=j=1}}^{5}x_ix_j) \\
&= \frac{1}{4}\sum_{\substack{i\neq j\\ i=j=1}}^{5}(x_i-x_j)^2\geqslant 0.
\end{aligned}
$$

当 $n=6$ 时，易算得

$$
\Phi_1=\Phi_2+(x_1x_4+x_2x_5+x_3x_6),
$$

从而

$$
\begin{aligned}
\Phi &= \Phi_0+2(\Phi_2+x_1x_4+x_2x_5+x_3x_6)-3\Phi_2 \\
&= \sum_{i=1}^{6}x_i^2+2(x_1x_4+x_2x_5+x_3x_6)-\sum_{i=1}^{6}x_i(x_{i+1}+x_{i+2}) \\
&= \frac{1}{2}[(x_1+x_4-x_2-x_5)^2+(x_2+x_5-x_3-x_6)^2 \\
&\quad +(x_3+x_6-x_1-x_4)^2].
\end{aligned}
$$

至此，断言一证毕. □

注意，不能指望不等式(1)对 $n\geqslant 7$ 成立，下面反例说明我们的方法已竭尽所能.

令 $x_1=x_2=x_3=2,x_4=x_5=x_6=x_7=1$，则 $\Phi_0=16,\Phi_1=42,\Phi_2=29$，故

$$
\Phi=16+84-\frac{7}{2}\cdot 29=-\frac{3}{2}<0.
$$

断言二的证明

需要对 $n\geqslant 14$ 的任意偶数 n，找出 n 个数 x_1 来，使 $(*)_n$ 倒向.

注意下式成立：

$$S_{n+2}(x_1,x_2,\cdots x_n,x_{n-1},x_n)$$
$$=\frac{x_1}{x_2+x_3}+\frac{x_2}{x_3+x_4}+\cdots+\left(\frac{x_{n-1}}{x_n+x_{n-1}}+\frac{x_n}{x_{n-1}+x_n}\right)$$
$$+\frac{x_{n-1}}{x_n+x_1}+\frac{x_n}{x_1+x_2}$$
$$=S_n(x_1,x_2,\cdots x_n)+1.$$

可见，若有$(*)_n$之反例，即有非负n数组$(t_1,t_2,\cdots,t_n)$使$S_n(t_1,\cdots,t_n)<\frac{n}{2}$，则$n+2$数组$(t_1,t_2,\cdots,t_n,t_{n-1},t_n)$即构成$(*)_{n+2}$之反例，缘因

$$S_{n+2}(t_1,\cdots,t_n,t_{n-1},t_n)=S_n(t_1,\cdots,t_{n-1},t_n)+1$$
$$<\frac{1}{2}(n+2)$$

之故. 可见找到14个数$(t_1,\cdots,t_{14})$使$(*)_{14}$倒向，即已证明了断言二. 下表即给出所要的数组：

n	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14
t_n	$1+7p$	$7p$	$1+4p$	$6p$	$1+p$	$5p$	1	$2p$	$1+p$	0	$1+4p$	p	$1+6p$	$4p$

其中p为一甚小正数.

今在$S_{14}(t_1,\cdots,t_{14})$中取奇数项之和，记之为$7-I$；取余下(偶数)项之和，记为Ⅱ，则容易算出

$$\mathrm{I}=\left(\frac{9}{1+11p}+\frac{6}{1+7p}+\frac{4}{1+5p}+\frac{3}{1+3p}+\frac{3}{1+4p}\right)p,$$
$$\mathrm{II}=\left(\frac{4}{1+14p}+\frac{8}{1+10p}+\frac{6}{1+6p}+\frac{5}{1+2p}+\frac{2}{1+p}\right)p,$$

因此得

$$S_{14}(t_1,\cdots,t_{14})=7-(\mathrm{I}-\mathrm{II}).$$

下面证明，当p取得充分小时，例如在运算过程用$(1-kp)p$等代替$\frac{p}{1+kp}$等(即略去p^3的上各阶之项)，则必有 $\mathrm{I}-\mathrm{II}>0$.

此时我们有

$$\begin{aligned}\text{I} &= [9(1-11p)+6(1-7p)+4(1-5p)+3(1\\&\quad-3p)+3(1-4p)]p\\&=25p-182p^2,\\ \text{II} &= [4(1-14p)+8(1-10p)+6(1-6p)+5(1\\&\quad-2p)+2(1-p)]p\\&=25p-184p^2.\end{aligned}$$

于是得

$$\text{I} - \text{II} = 2p^2 > 0,$$

断言二得证. □

(三) 峰 回 路 转

若是稍稍离开一下初等数学,则可以把不等式$(*)_n$的许多事情说得更清楚一些.

用Ω记n维空间R^n的一个区域:

$$\Omega = \{x_1,\cdots,x_n); x_i \geqslant 0, x_i + x_{i+1} > 0, i = 1,\cdots,n\},$$

其中已如旧取$x_{n+i} = x_i$,现在考虑

$$\rho(n) = \inf_{\Omega} S_n(x_1,\cdots,x_n), \tag{1}$$

再取

$$\sigma(n) = \frac{1}{n}\rho(n).$$

注意$(1,\cdots,1) \in \Omega$,而$S_n(1,\cdots,1) = \frac{n}{2}$,可知一般应有

$$\sigma(n) \leqslant \frac{1}{2}.$$

因此,证明$(*)_n$相当于证明

$$\sigma(n) = \frac{1}{2}. \tag{2}$$

反过来，若对某 n_0 证得 $\sigma(n_0) < \frac{1}{2}$，则等于说存在点 $(t_1^0, \cdots, t_{n_0}^0) \in \Omega$，使 $S_n(t_1^0, \cdots, t_{n_0}^0) < \frac{1}{2}$，意即不等式 $(*)_n$ 不恒成立.

用这个观点研究 $(*)_n$，就可以发觉，$(*)_n$ 其实对于相当大的 n 肯定不恒成立，事实上早在 1958 年就被证明[2]：极限 $\lim\limits_{n\to\infty}\sigma(n)$ 存在，而且

$$\lim_{n\to\infty}\sigma(n) = \inf_{n\geqslant 1}\sigma(n) = \sigma,$$

且

$$\sigma < \frac{1}{2} - 7.10^{-8}. \tag{3}$$

后来又有人进一步证明 $\sigma(53) < \frac{1}{2}$，$\sigma(27) < \frac{1}{2}$ 以及 $\sigma \leqslant \sigma(111) = 0.49639$ 等. 所有这些结果都在支持着去寻求较小 n 的 $(*)_n$ 的反例，如上节讨论那样.

在 $(*)_n$ 的讨论中，有两个不等式相当重要. 从上节讨论中的等式

$$S_{n+2}(x_1, \cdots, x_n, x_{n-1}, x_n) = S_n(x_1, \cdots, x_n) + 1,$$

可以得知成立

$$\rho(n+2) \leqslant \rho(n) + 1. \tag{4}$$

不等式(4) 很有用，例如，我们容易看出，若是 $(*)_{n+2}$ 成立，则

$$\rho(n) \geqslant \rho(n+2) - 1 \geqslant \frac{n}{2},$$

即 $(*)_n$ 也成立，因此不等式(4) 支持我们去寻求较大 n 的 $(*)_n$ 的证明. 由于 $(*)_{27}$ 不恒成立，若能证明 $(*)_{25}$ 则几乎已经解决了所有未决情形(除去 $n = 12$). 1963 年又有人证得

$$\rho(2n) \geqslant \rho(2n-1) + \frac{1}{2}. \tag{5}$$

由不等式(5) 立刻知道，若 $(*)_{2n}$ 成立，则 $(*)_{2n-1}$ 亦成立. 这一次是关系到相邻整数情况，可以说弥补了不等式(4) 的不足，最初正

是有人证明了$(*)_8$与$(*)_{10}$,才得到了$(*)_7$与$(*)_9$.

因此,为了完全解决问题,只要设法证明$(*)_{12}$与$(*)_{25}$就可以了.

不幸,1971年M. A. Malcolm找到了$(*)_{25}$的反例[3],用计算机给出了25个数如下:

$x_1 = 5.71138$,	$x_2 = 0$,	$x_3 = 6.76097$,	$x_4 = 1.10052$,
$x_5 = 6.90241$,	$x_6 = 2.57379$,	$x_7 = 5.91561$,	$x_8 = 3.33613$,
$x_9 = 4.60951$,	$x_{10} = 3.47149$,	$x_{11} = 3.43693$,	$x_{12} = 3.33360$,
$x_{13} = 2.47011$,	$x_{14} = 3.15375$,	$x_{15} = 1.66622$,	$x_{16} = 3.05800$,
$x_{17} = 0.980738$,	$x_{18} = 3.12582$,	$x_{19} = 0.400648$,	$x_{20} = 3.44328$,
$x_{21} = 0$,	$x_{22} = 4.07589$,	$x_{23} = 0$,	$x_{24} = 4.3248$,
$x_{25} = 0$.			

并且证明:

$$12.49847 < S_{25}(x_1, \cdots, x_{25}) < 12.49851.$$

后来,有两位前苏联中学生在计算机上也找到$(*)_{25}$的反例,他们的数字更整备,值得一提:

32,0,37,0,43,0,50,0,59,8,62,21 55,

29,44,32,33,31,24,30,16,29,10,29,4.

$(*)_{25}$的反例说明,我们仍然应当小心从事寻找反例和寻找证明的双重工作. 但1976年,两位前苏联人证明了$(*)_{12}$[5]. 由上又可知,这是个相当重要的推进,而由(4)立知,$(*)_{11}$也成立.

到此为止,未决情形已减少到六个,而它们的判定,直到1989年,即问题《4603》提出后近四十年,才由美国人B,A. Troesch最后完成[1].

(四)众望所归

在$(*)_n$的研究中,Troesch的讨论比别人来得更深刻. 他首

先注意到 在作反例时，n 为偶与奇两情况有着较大的差异，对 n 为偶数情形，他用下面方法作了讨论[4].

先令

$$x_i^0=\begin{cases}\frac{1}{2}(1+\alpha),\text{当 } i \text{ 为奇},\\ \frac{1}{2}(1-\alpha),\text{当 } i \text{ 为偶}.\end{cases}\qquad (0<\alpha<1)$$

则有 $S_n(x_1^0,\cdots,x_n^0)=\frac{1}{2}n$. 因此为寻找反例，不妨在点$(x_1^0,\cdots,x_n^0)$的邻域中寻找使 S_n 取更小值的点，为此再令

$$x_i=x_i^0+\varepsilon_i,(i=1,\cdots,n)$$

代入 S_n，其中 α 及 ε_1 待定. 像第二节那样略去高次项，则可得近似式(令 $\varepsilon_{n+i}=\varepsilon_i,i=1,\cdots,n$)

$$\begin{aligned}&S_n(x_1^0+\varepsilon_1,\cdots,x_n^0+\varepsilon_n)\\&=\sum_{k=1}^{n}\frac{\frac{1}{2}(1-(-1)^k\alpha)+\varepsilon_k}{1+\varepsilon_{k+1}+\varepsilon_{k+2}}\\&\approx\sum_{k=1}^{n}[\frac{1}{2}(1-(-1)^k\alpha)+\varepsilon_k][1-(\varepsilon_{k+1}+\varepsilon_{k+2})\\&\quad+(\varepsilon_{k+1}+\varepsilon_{k+2})^2]\\&\approx\sum_{k=1}^{n}[\frac{1}{2}(1-(-1)^k\alpha)+\varepsilon_k]\\&\quad-\sum_{k=1}^{n}[\frac{1}{2}(1-(-1)^k\alpha)+\varepsilon_k](\varepsilon_{k+1}+\varepsilon_{k+2})\\&\quad+\sum_{k=1}^{n}[\frac{1}{2}(1-(-1)^k\alpha)](\varepsilon_{k+1}+\varepsilon_{k+2})^2.\end{aligned}$$

经化简得

$$S_n\approx\frac{1}{2}n+\sum_{k=1}^{n}(\varepsilon_k^2-\varepsilon_k\varepsilon_{k+2}+(-1)^k\alpha\varepsilon_k\varepsilon_{k+1}).$$

此式右端第二项为一二次型，其对应之对称矩阵为

$$2A = \begin{pmatrix} 2 & -\alpha & -1 & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & -1 & \alpha \\ -\alpha & 2 & \alpha & -1 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & 0 & -1 \\ -1 & \alpha & 2 & -\alpha & -1 & 0 & \cdots & 0 & 0 & 0 & 0 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \cdots & -\alpha & 2 & \alpha & -1 \\ -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \cdots & -1 & \alpha & 2 & -\alpha \\ \alpha & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & -1 & -\alpha & 2 \end{pmatrix}$$

现在可知，能否找到反例取决于此二次型是否为非正定，或者说，决定于矩阵 A 是否至少有一负特征根，经计算可知 A 的特征根为

$$\lambda_j = 2\sin h(2\sin h - \alpha),$$

$$h = \frac{2\pi j}{n}, j = 1, 2, \cdots, n.$$

为使 λ_j 为负，应要求

$$0 < \sin(2\pi j/n) < \frac{1}{2},$$

或 $2\pi j/n < \frac{1}{6}\pi$，即必需 $n > 12j$.

上述讨论说明了：(i) 大于 12 的偶数 n，有反例；(ii) $n = 12$ 时，此法无效. Troesch 由此推断出 $(*)_{12}$ 是对的，但他未能给出证明.

注意上面方法不能用于奇数 n 的情形. Troesch 重新研究了前人关于 $(*)_{27}$ 的反例，仍用 $(1+\varepsilon_1, \cdots, 1+\varepsilon_n)$ 代入 S_n，利用数值计算很快也找到了 $(*)_{25}$ 的反例，同时也找到更大 n 的 $(*)_n$ 的反例. 但是，他的方法对 $n = 23$ 却无效！情况有些类似于 $(*)_{14}$ 之于 $(*)_{12}$.

这一番研究使 Troesch 坚定了这么一个想法，或许，$n = 12$ 及 $n = 23$ 正是使 $(*)_n$ 成立的最后一个偶数和最后一个奇数！

1985 年，Troesch 的工作终于有了突破[6]，用数值计算，他找到了 $(*)_{13}$ 的正面判断. 限于篇幅，我们只能介绍他的一些思路.

Troesch 根据前人的研究，认定 $(x_1, \cdots, x_n)$ 中至少有一个 x_1

为零(但不能有相邻两数为零),这是因为 S_n 的整体极小值只能在 Ω 的边界上出现.因此一个极值点 $(x_1,\cdots,x_n)$ 将被 0 分隔成 n 个段.例如 $n=13$ 时,$x_1 0 x_2 x_3 x_4 x_5 0 x_6 0 x_7 x_8 x_9 x_{10}$ 就是一个由三个零和三个段(一个四位段,一个一位段和一个五位段)组成,这种情况可记成(4,1,5).

Troesch 进一步证明了两件事:

(i) 若 $S_n < \frac{n}{2}$,则极值点至少有一个段,其位数不得小于六;

(ii) 若 $S_n < \frac{n}{2}$,则仅有的分段应是:

(1,1,1,6),(2,2,6),(1,1,8),(4,7),(3,8),(1,10),(12).

到了这一地步,Troesch 运用数值计算及极小化原理,将这些分段一一计算出来,给以否定,例如对(1,1,1,6),他算出

$$S_{13} = 6.67337 > \frac{13}{2}.$$

因此 $(*)_{13}$ 是对的.

用完全一样的方法,Troesch 处理了 $n=23$ 款[1].这时碰到几乎不可克服的困难是:$x_i(1 \leqslant i \leqslant 23)$ 为零的可能性高达 2500 种,分段也将从(22),(20,1),(18,3)(18,1,1),(17,4),(16,5)(16,3,1) 等到(6,3,3,1,1,1,1) 及(6,3,1,1,1,1,1,1),(6,1,1,1,1,1,1,1,1) 等,增加了许多.为消除矛盾,Troesch 一一加以计算,但除少数几款可以讨论外,大部分情形都需借助计算机,远非手工可以办到.Troesch 直到 1989 年才发表结果,从而得到 $(*)_{23}$ 的正面判定,例如对分段(20,1),(18,1,1),(16,1,1,1),(14,1,1,1,1),(12,1,1,1,1,1),他分别算出了

$$\min S_{23} = 11.513, 11.512, 11.513, 11.512, 11.533.$$

所以,关于循环不等式的最后结论是:

$(*)_n$ 仅当 $n=3,4,5,6,7,8,9,10,11,12,13,15,17,19,21,23$ 十六个数成立.

(五) 任 重 道 远

从数学研究观点来看，Troesch 的工作只是一种判定，而不是证明，情况恰如四色问题之机器证明. 但毫无疑义他的贡献是很大的，人们今后面对的将是证明结论而不是证明推测. 就我们的问题而言，我们还得去证明 $n = 13, 15, \cdots, 23$ 的$(*)_n$.

但是，即使完成了上述艰巨任务，仍不能说到圆满两字，由于问题的初等形式，期望一个初等的代数解法应是十分自然的. 不幸，除了 $n \leqslant 8$，至今所见到的$(*)_n$ 的证明都是非初等的. 窃以为，至少在目前，去找 $n = 7, 9, 10, 12$ 等款的代数证明，实为当务之急.

在$(*)_n$ 的历史长河中，除了要求无条件地证明$(*)_n$，还出现许多有条件的$(*)_n$ 问题(如假设 $x_1, \cdots, x_n$ 为单调等)，其中最有趣的问题是要求给出第三节所说的下确界 σ 的估值，其时$(*)_n$ 已为下面不等式所替代：

$$S_n \geqslant \sigma \cdot n.$$

第三节说的上界估计 $\sigma < \frac{1}{2} - 7.10^{-8}$，说明$(*)_n$ 之不恒成立. 而任何一个下界估计 $\sigma > \sigma_1$ 将得到不等式 $S_n \geqslant \sigma_1 \cdot n$. 有人用非初等方法得到过 σ 的下界估值 $\sigma > 0,4945$，可见 σ 的取值范围相当狭

$$0.4945 < \sigma < 0.4999$$

(这也是目前最好的结果). 倘用初等方式，则得到的下界估计都不超过 0.42，距之甚远.

我们现在就用初等方法，来给出几个下界估计，以结束本文. 这些结果大都来自世界数学奥林匹克的试题，具体结果如下.

断言 对任何整数 n，成立下述不等式

$$S_n \geqslant \sigma_1 \cdot n,$$

其中 $\sigma_1 \doteq \sqrt{2}-1 \doteq 0.414$ 或 $\sigma_1 = \frac{5}{12} \doteq 0.4167$ 或 $\sigma_1 \doteq 0.41858$.

断言的证明

首先注意，由于循环性，下式成立

$$\sum_{i=1}^{n} \frac{\alpha x_i + \beta x_{i+1}}{x_i + x_{i+1}} = \sum_{i=1}^{n} \frac{\alpha x_{i+1} + \beta x_{i+2}}{x_{i+1} + x_{i+2}}. \tag{6}$$

今任取一数 $\alpha \neq -1$，令 $\beta = \frac{\alpha}{1+\alpha}$，则有

$$\frac{x_i}{x_{i+1} + x_{i+1}} + \alpha = \frac{x_i + \beta x_{i+1}}{x_{i+1} + x_{i+2}} + \frac{\alpha(\beta x_{i+1} + x_{i+2})}{x_{i+1} + x_{i+2}},$$

从而，用上面等(6)，有

$$\begin{aligned}
n\alpha + S_n &= \sum_{i=1}^{n} \frac{x_i + \beta x_{i+1}}{x_{i+1} + x_{i+2}} + \sum_{i=1}^{n} \frac{\alpha(\beta x_i + x_{i+1})}{x_i + x_{i+1}} \\
&\geqslant \sum_{i=1}^{n} 2\left[\left(\frac{x_i + \beta x_{i+1}}{x_{i+1} + x_{i+2}}\right)\left(\frac{\alpha(\beta x_i - x_{i+1})}{x_i + x_{i+1}}\right)\right]^{\frac{1}{2}} \\
&= \sum_{i=1}^{n} 2\left[\alpha \frac{\beta(x_i + x_{i+1})^2 + (\beta - 1)^2 x_i x_{i+1}}{(x_{i+1} + x_{i+2})(x_i + x_{i+1})}\right]^{\frac{1}{2}} \\
&\geqslant \sum_{i=1}^{n} 2\left[\alpha\beta \frac{x_i + x_{i+1}}{x_{i+1} + x_{i+2}}\right]^{\frac{1}{2}} \\
&= \frac{2\alpha}{\sqrt{1+\alpha}} \sum_{i=1}^{n} \left(\frac{x_i + x_{i+1}}{x_{i+1} + x_{i+2}}\right)^{\frac{1}{2}} \\
&\geqslant \frac{2\alpha}{\sqrt{1+\alpha}} n \left(\prod_{i=1}^{n} \frac{x_i + x_{i+1}}{x_{i+1} + x_{i+2}}\right)^{\frac{1}{2n}} = \frac{2\alpha}{\sqrt{1+\alpha}} n,
\end{aligned}$$

或有

$$S_n \geqslant \left(\frac{2\alpha}{\sqrt{1+\alpha}} - \alpha\right) n.$$

今取 $\alpha = 1$，则得 $\frac{2\alpha}{\sqrt{1+\alpha}} - \alpha = \sqrt{2} - 1$. 取 $\alpha = \frac{5}{4}$，则 $\frac{2\alpha}{\sqrt{1+\alpha}} - \alpha = \frac{5}{12}$.

可证明$\frac{2\alpha}{\sqrt{1+\alpha}}-\alpha$有最大值，其最大点$\alpha$是方程

$$\alpha^3+2\alpha^2-\alpha-3=0$$

的唯一实根，位于(1.147899,1.147900)中，对应的值

$$\alpha_1=\frac{2\alpha}{\sqrt{1+\alpha}}-\alpha\approx 0.41858.$$

断言证完. □

参考文献

[1] B. A. Troesch. The validity of Shapiro's inequality. Math. Comp., 53(1989), 657 - 664.

[2] D. S. Mitrinóvic. Analytic inequalities. Spring-Velag. New York. (1970).

[3] M. A. Malcolm, Math. Comp. 25(1971).

[4] J. L. Searcy and B. A. Troesch. Pacitic J. of math., 81(1979), 217 - 226.

[5] E. K. Godunov and V. I. Levin. Math. Notes. 19(1976), 510 -517.

[6] B. A. Troesch. Math. comp. 45(1985), 199 - 207.

圆内接四边形的一组性质

湖南岳阳师范专科学校数学系　　肖振纲

圆，作为平面几何中具有极好的对称性的图形（过圆心的任一条直线都是它的对称轴，绕圆心的任何旋转也不改变图形），其优美的性质大大地丰富了平面几何的内容，正如单墫教授所言[1]："如果没有圆，平面几何将黯然失色."圆内接四边形则更是圆中之宠，倍受人们的青睐. 历年来的各级数学竞赛中必不可少的平面几何题中不少都涉及圆内接四边形. 本文将从圆内接四边形的一个基本性质出发，顺藤摸瓜，导出圆内接四边形的一系列新颖而有趣的性质，包括蝴蝶定理等几个著名的结果.

（一）

我们首先利用圆的对称性简洁地给出圆内接四边形（不一定是凸的，下同）的一个基本性质及其几个特殊情形与退化情形.

定理 1　设 $\odot O$ 的内接四边形 $ABCD$ 的一组对边 AB、CD（所在直线）交于 P，过 P 任作一直线 l 分别交 $\odot(PBC)$①与 $\odot(PAD)$ 于 E,P,F，则 E,F 关于圆心 O 在直线 l 上的射影对称.

证明　除 P 重合于 O 的平凡情形外，其余皆可归结于图 1 ～ 13 的情形（图 14 ～ 19 为几种退化情形），我们用多值有向角[2]为工具给出各种情形的统一证明.

① $\odot(PBC)$ 表示 $\triangle PBC$ 的外接圆.

连 BE、DF 分别交 $\odot O$ 于 D'、B'. 因 F 在 $\triangle PAD$ 的外接圆上，B' 在 $\odot O$ 上，所以，$\measuredangle B'FE = \measuredangle DFE = \measuredangle DAP = \measuredangle DAB = \measuredangle DB'B$，故 $BB' /\!/ l$，同理，$DD' /\!/ l$. 于是，BD' 与 $B'D$ 关于过圆心 O 且垂直于 l 的直线对称，而 E、F 分别为 BD'、$B'D$ 与 l 的交点，所以，E、F 互为对称点，故 E、F 关于圆心 O 在 l 上的射影对称. □

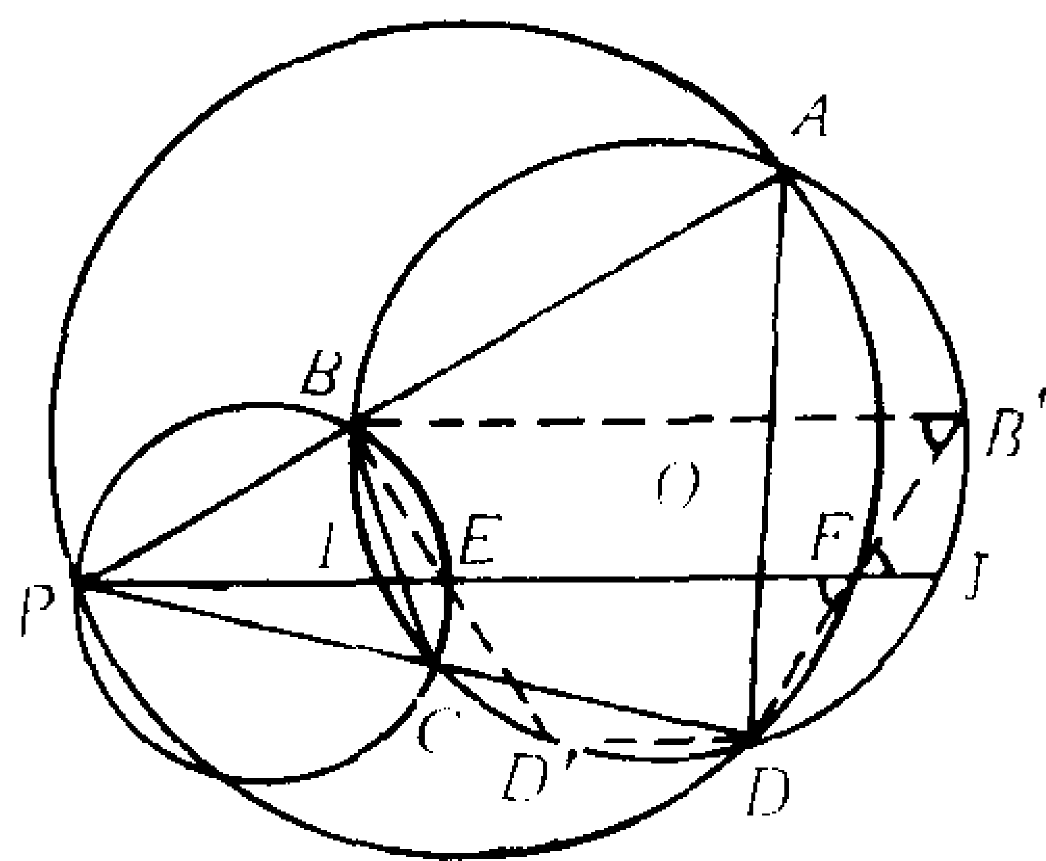


图 1

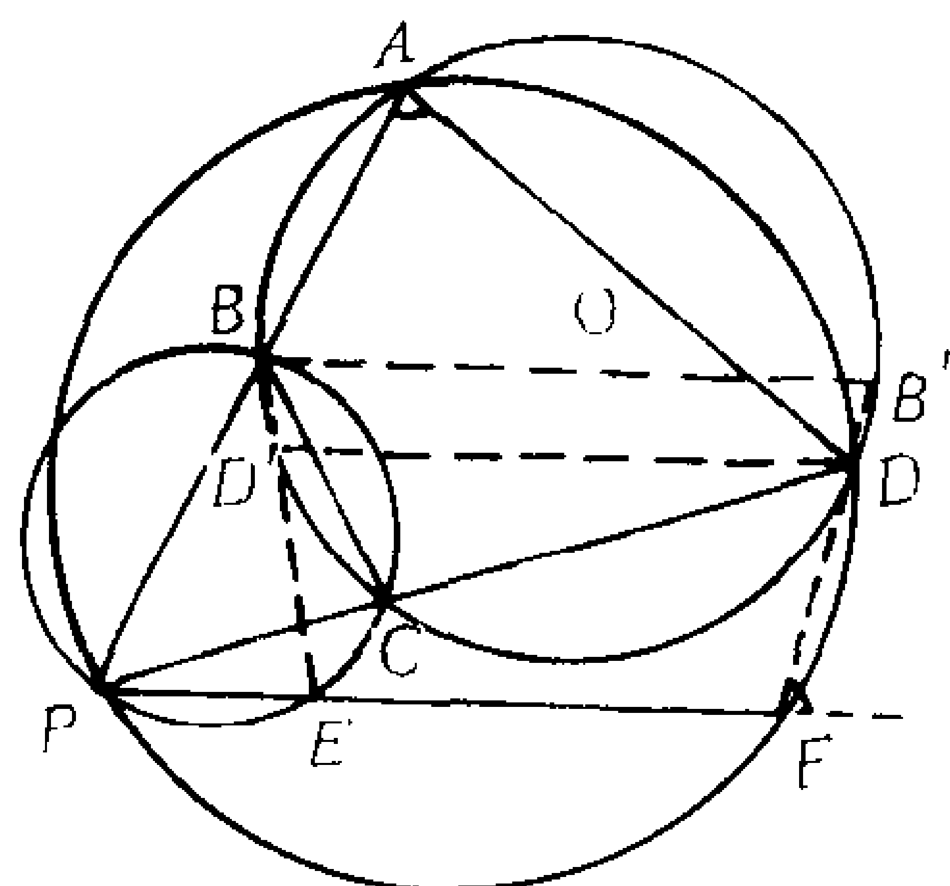


图 2

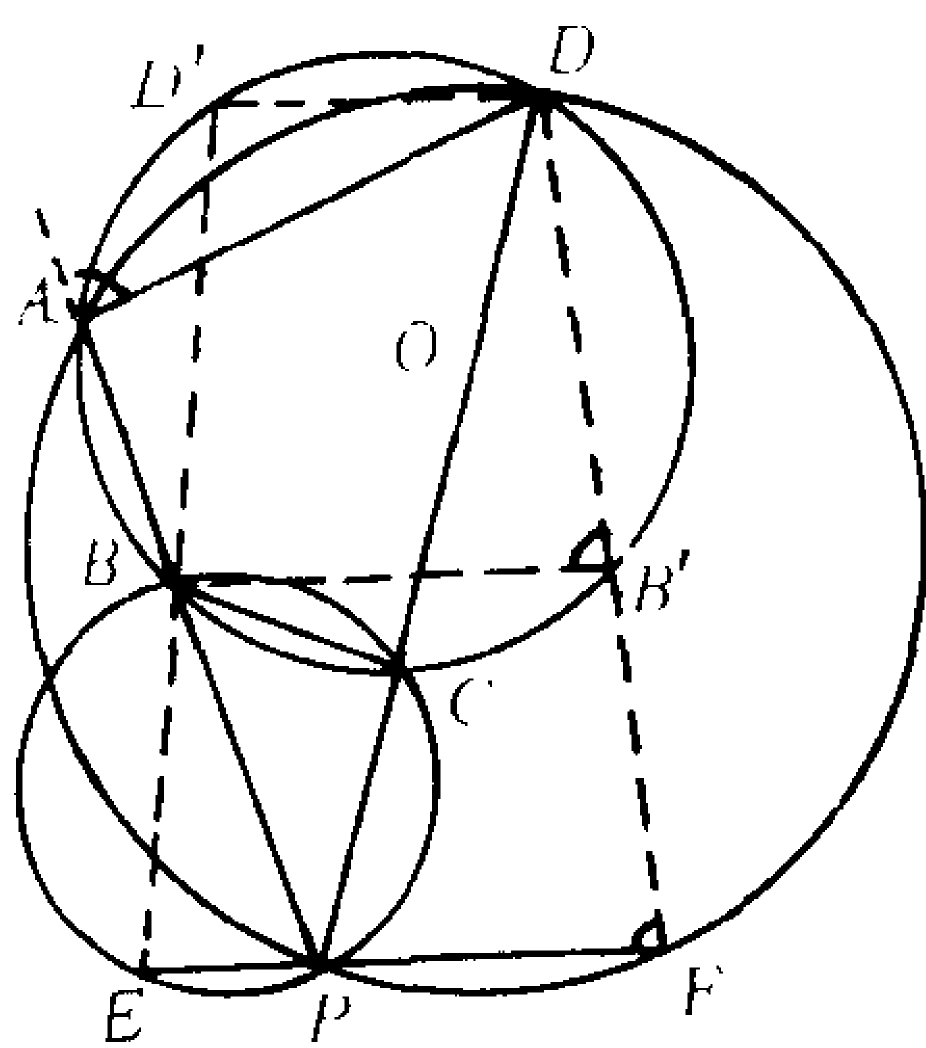


图 3

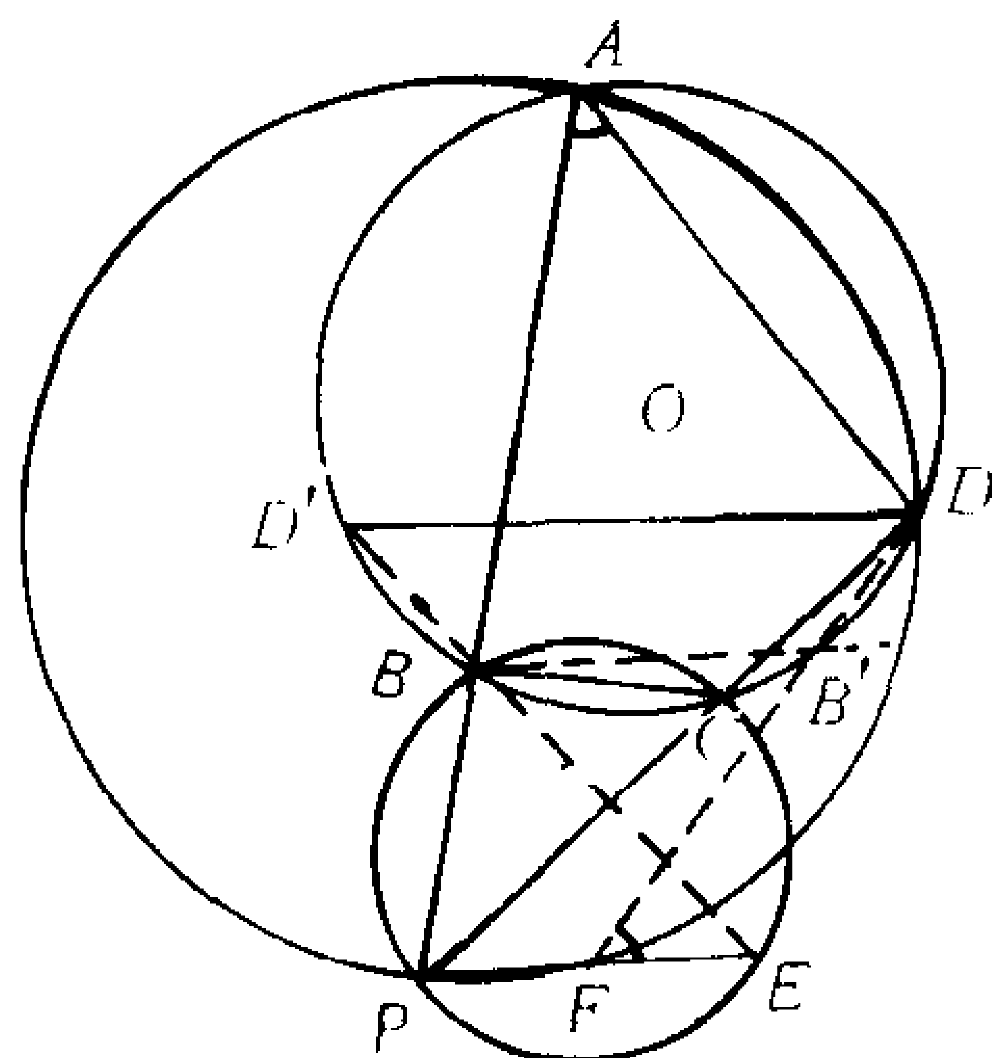


图 4

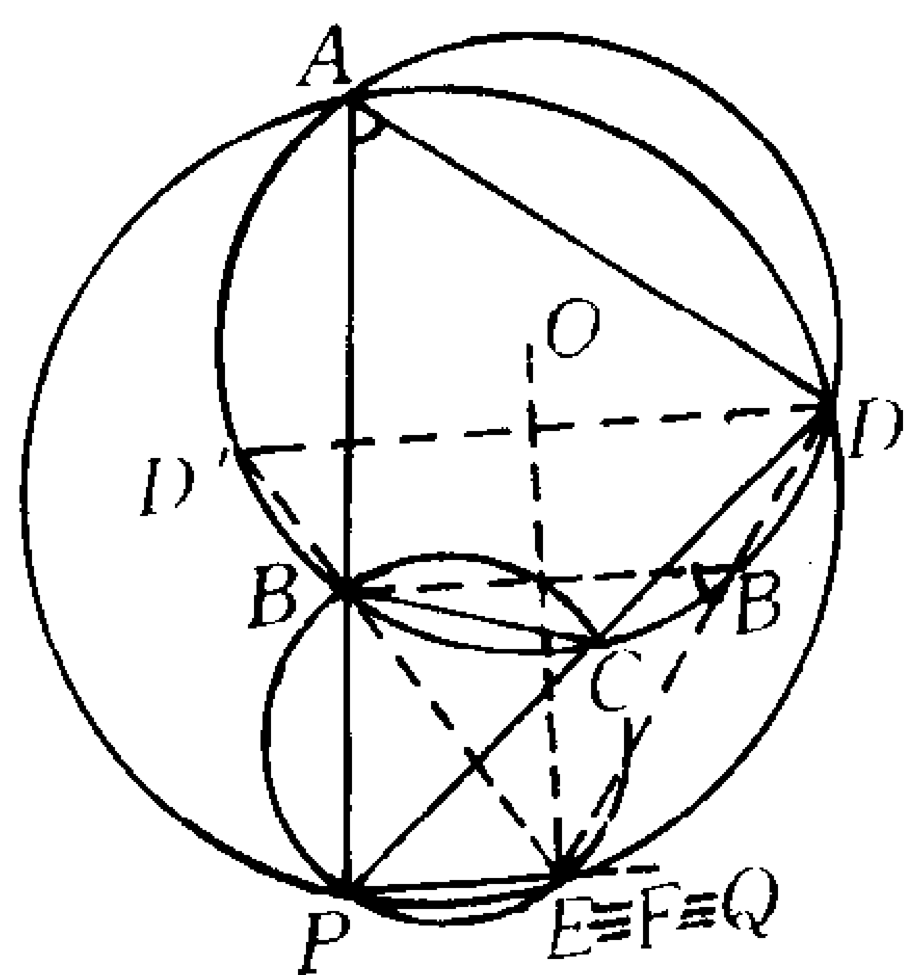


图 5

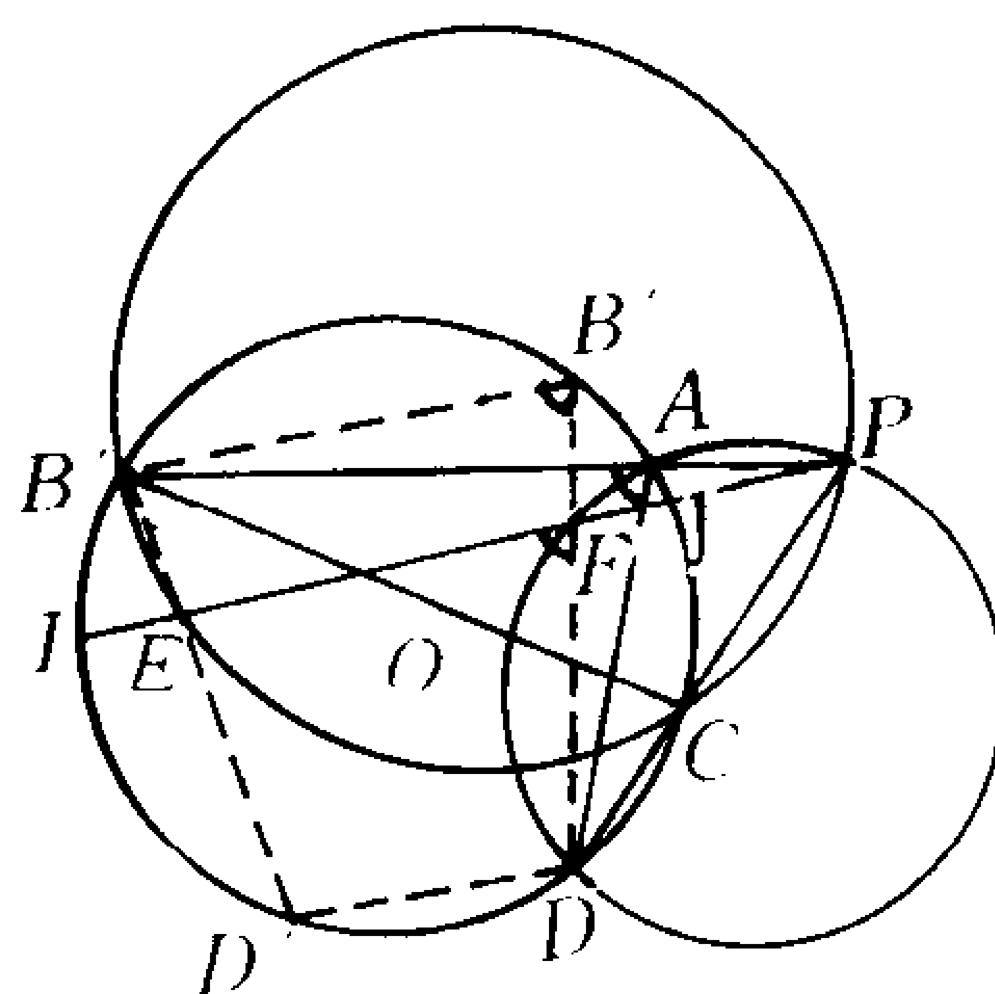


图 6

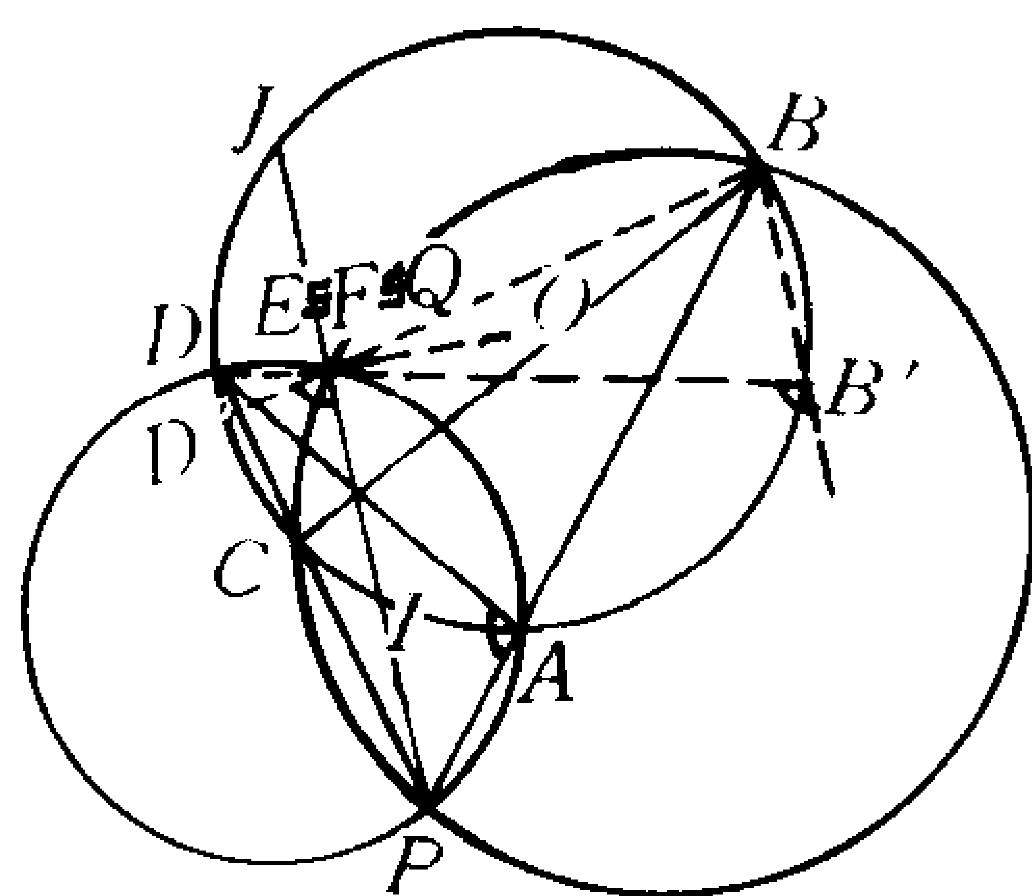


图 7

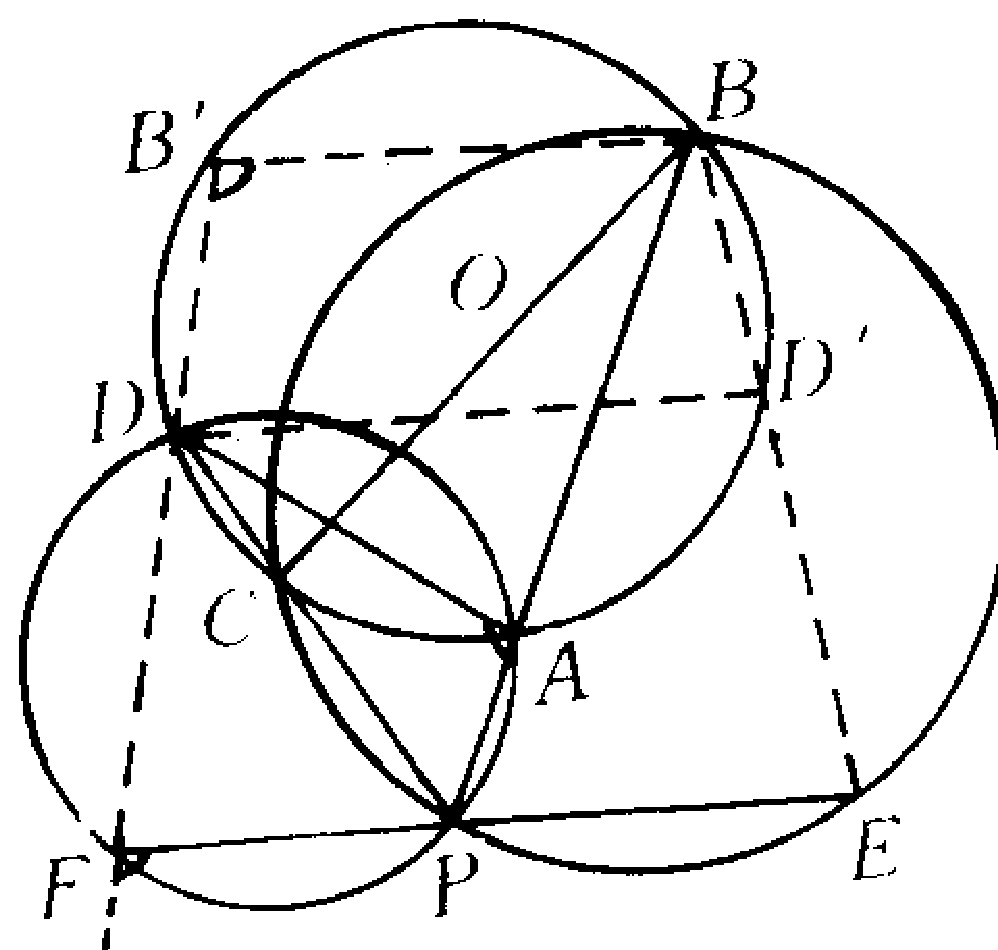


图 8

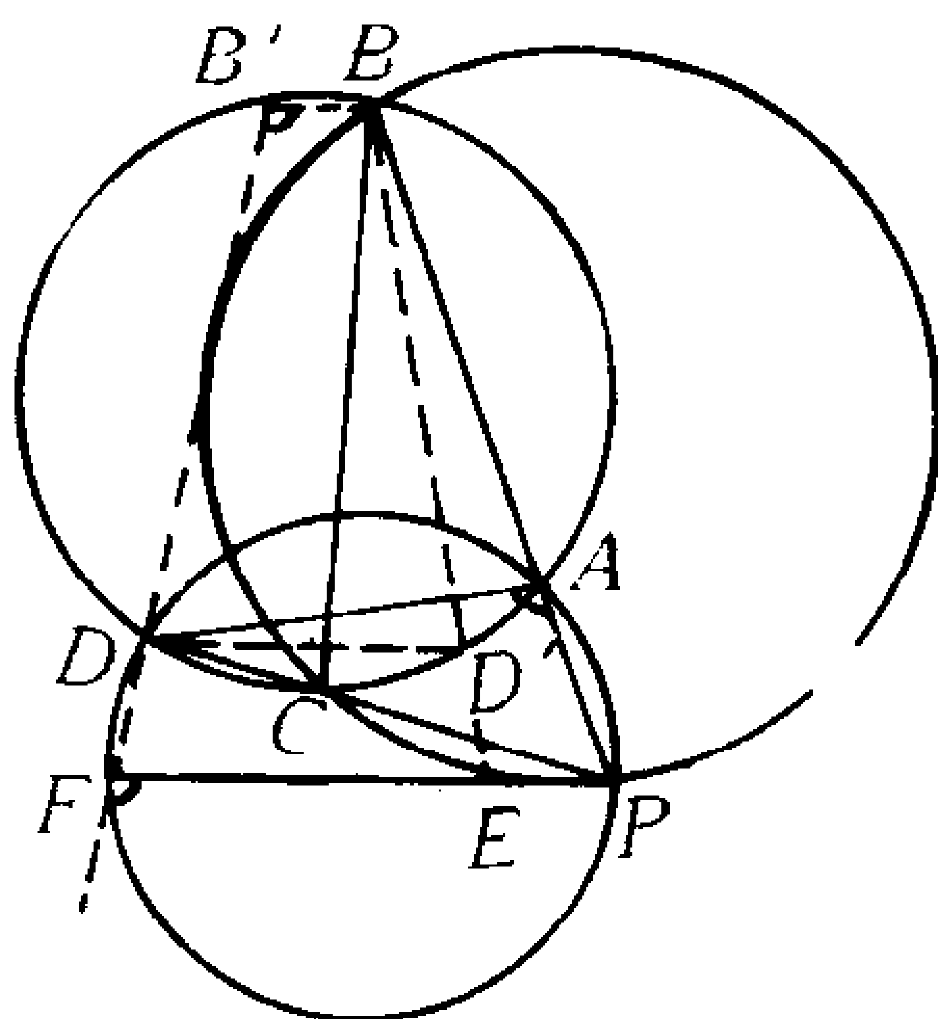


图 9

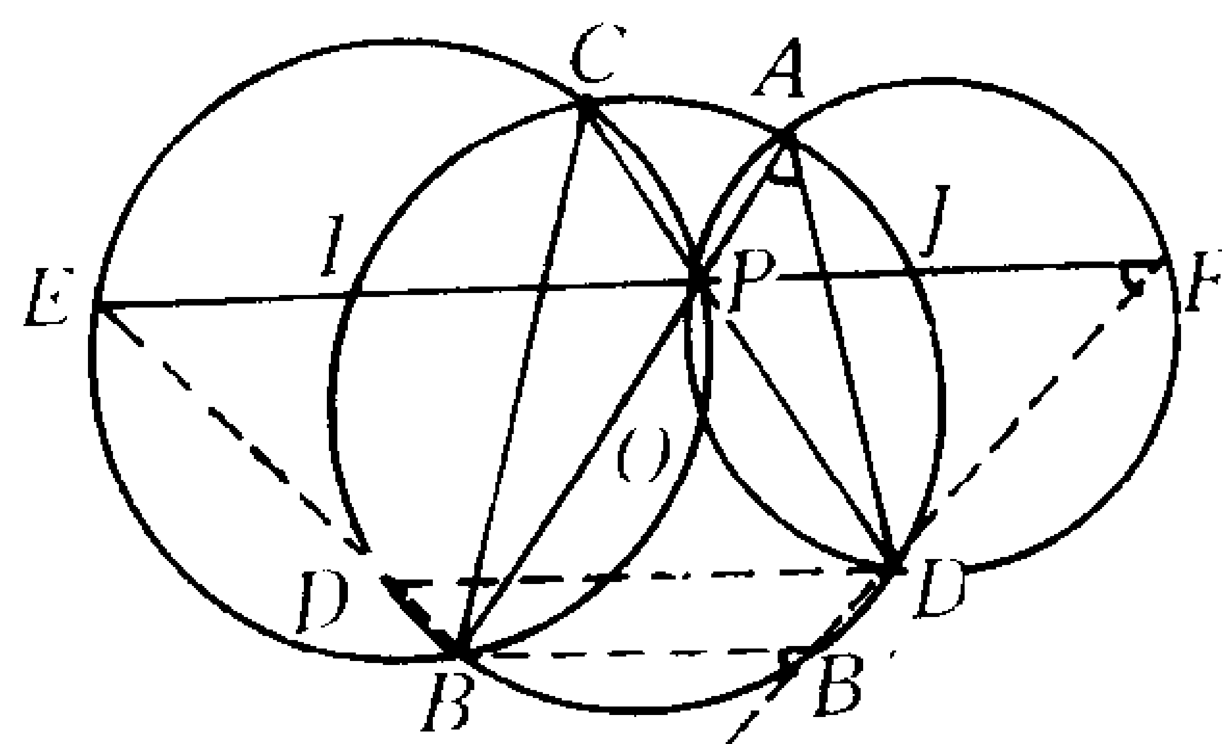


图 10

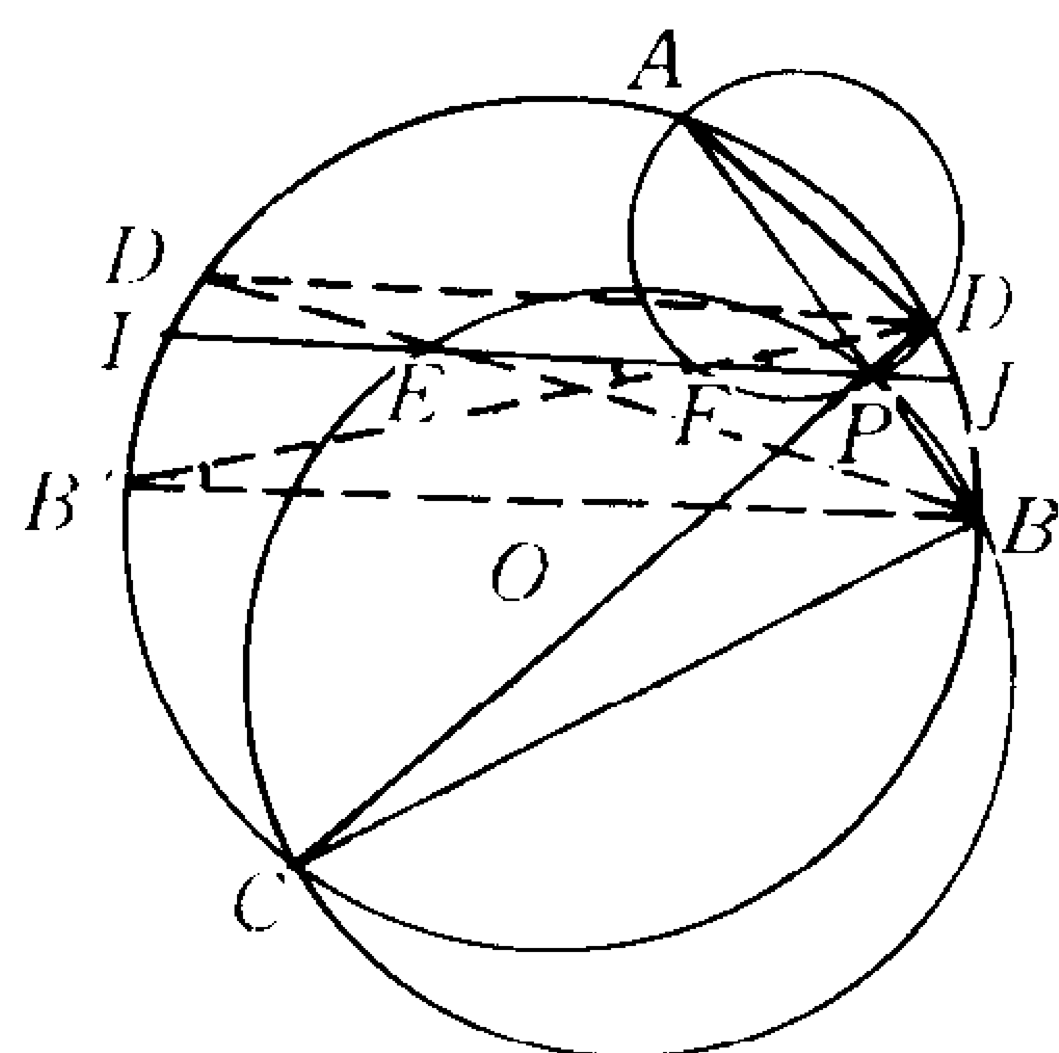


图 11

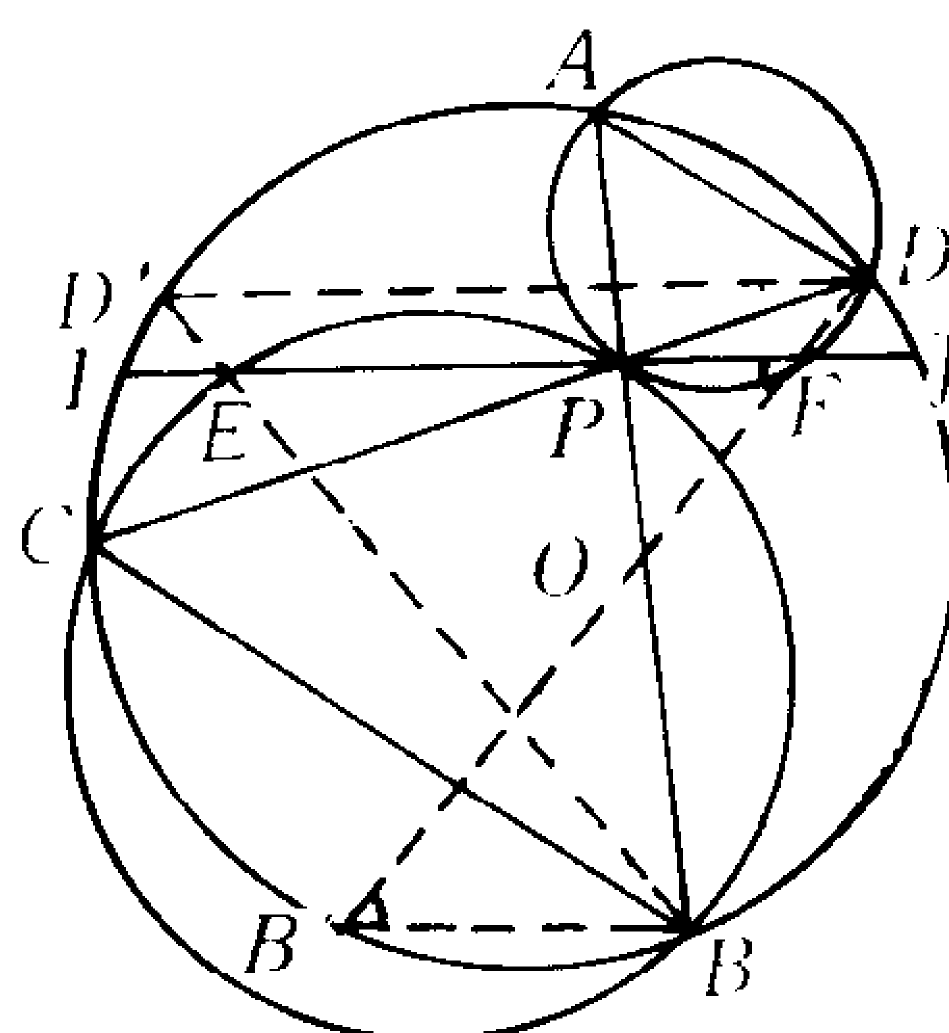


图 12

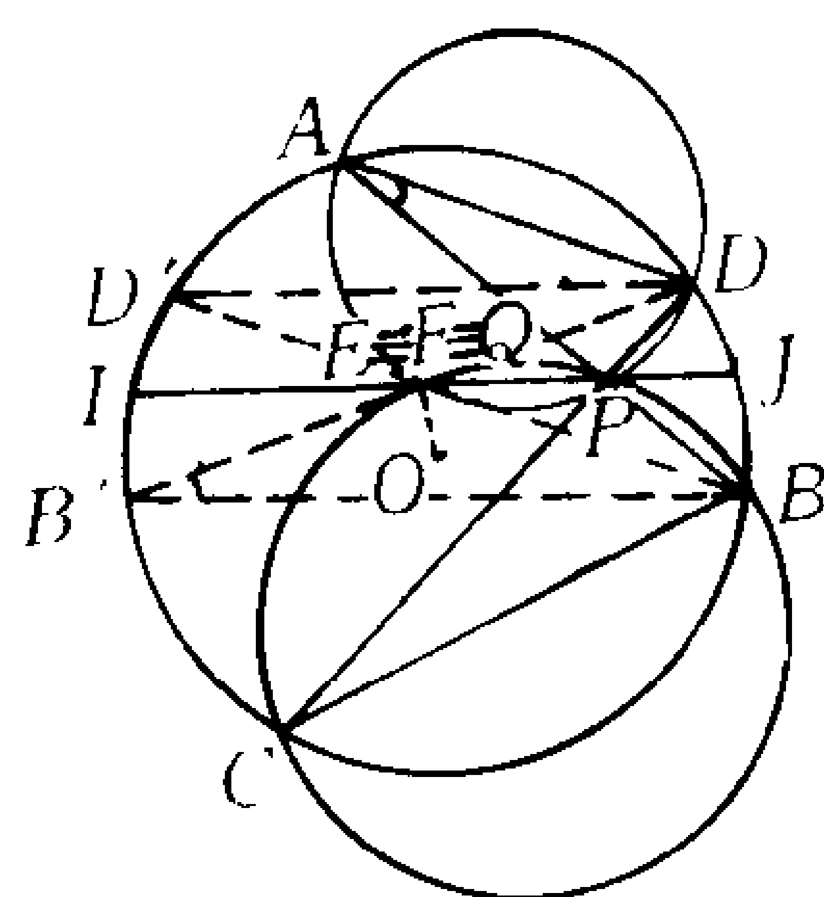


图 13

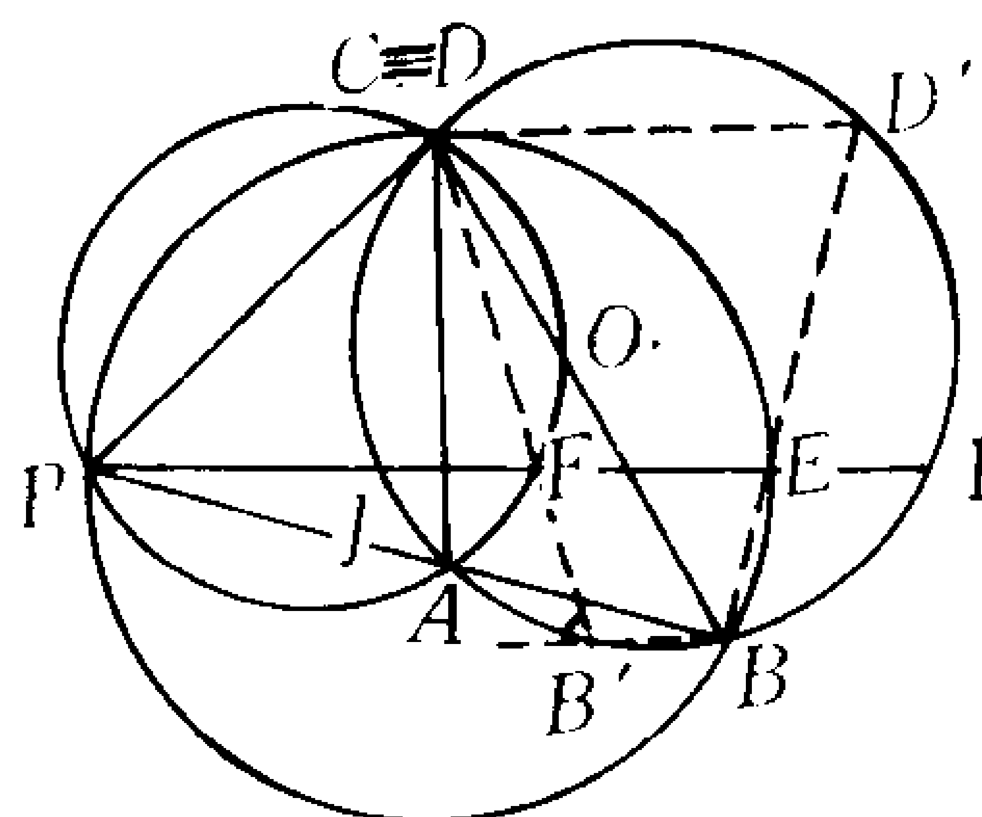


图 14

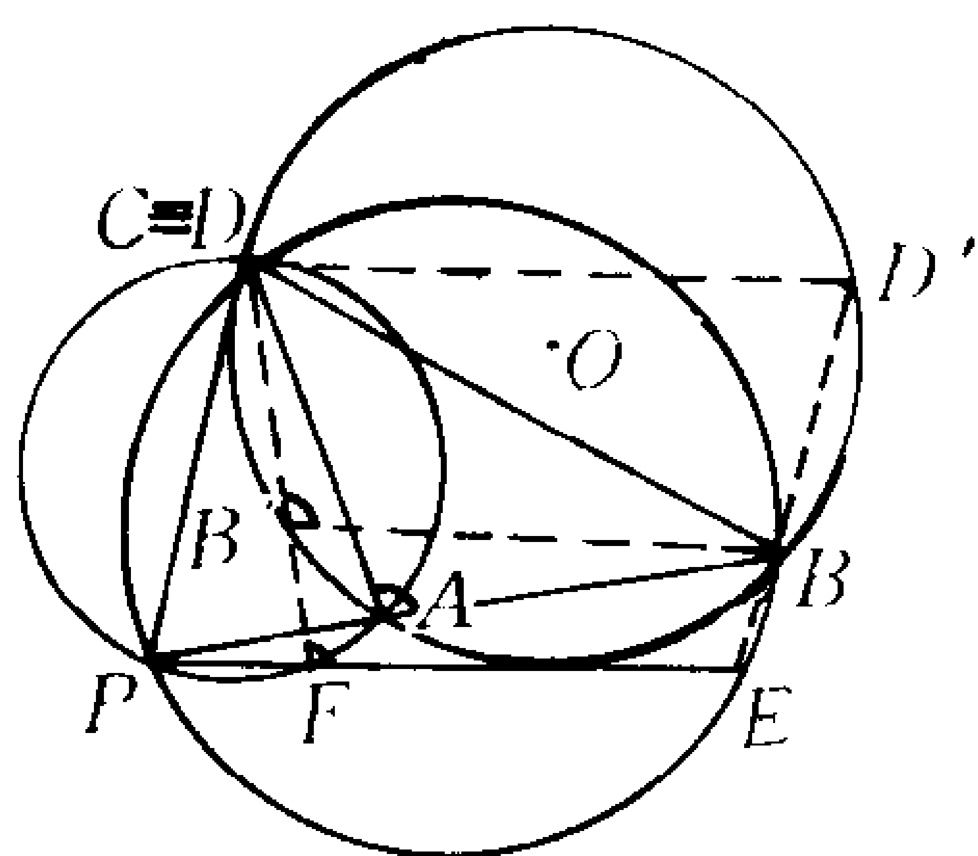


图 15

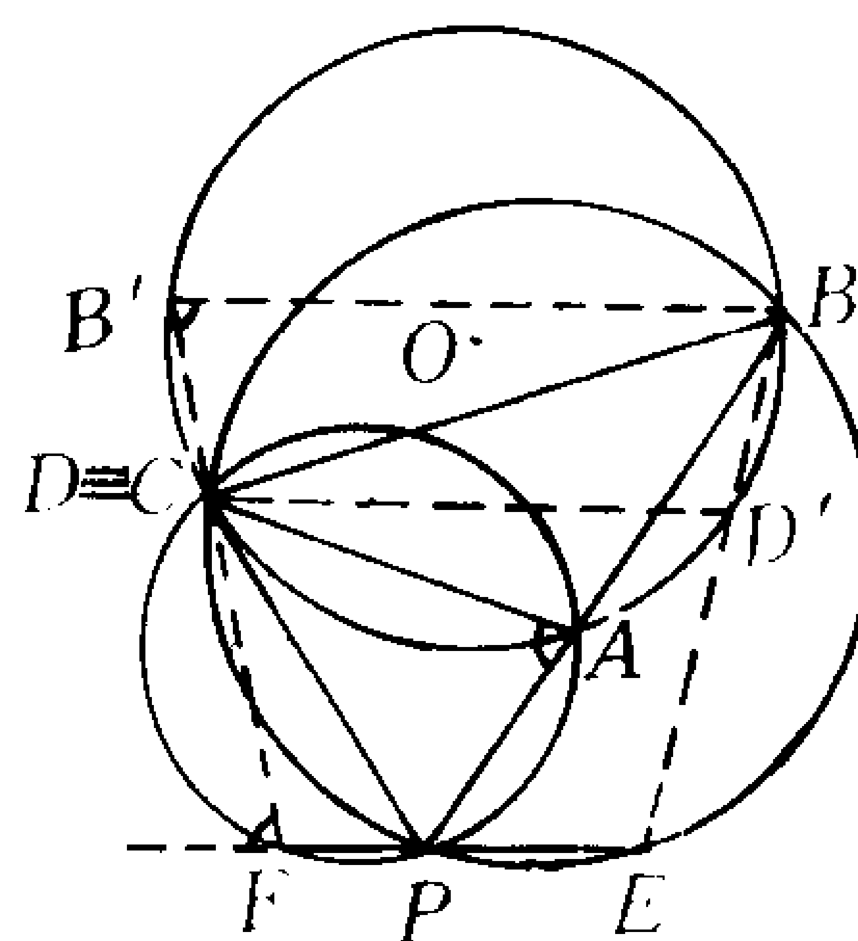


图 16

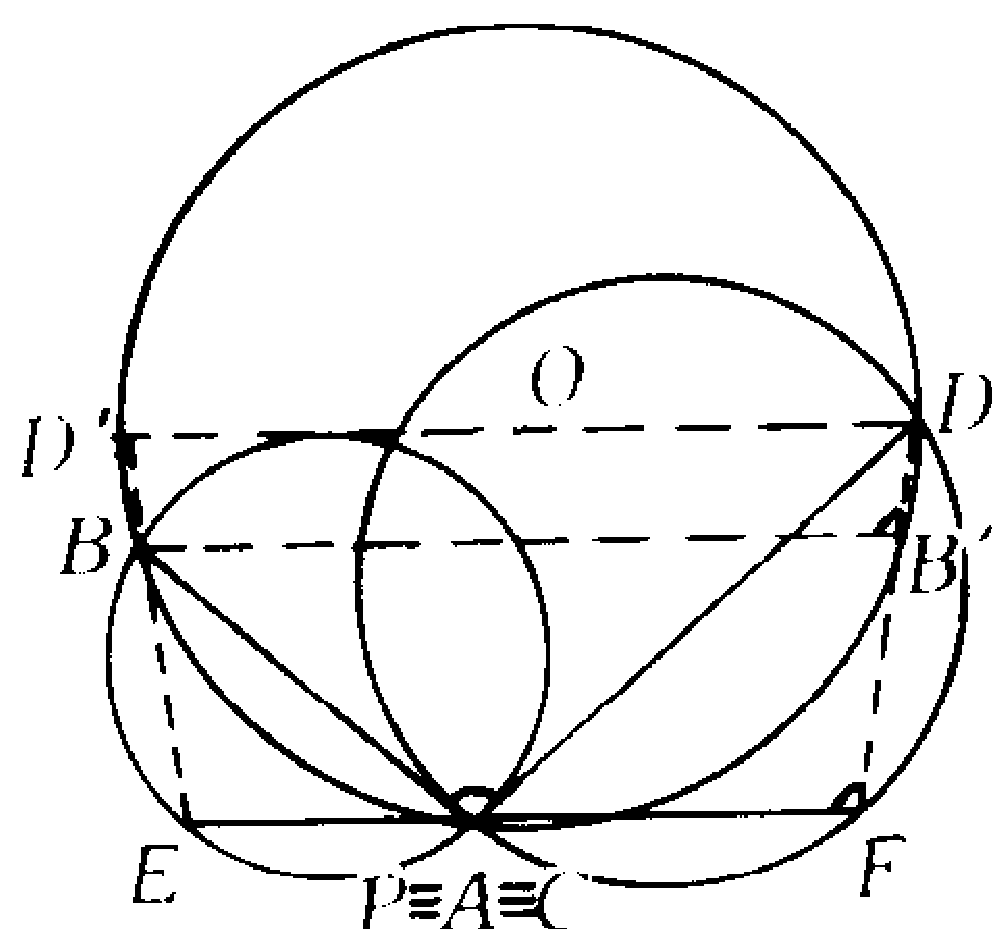


图 17

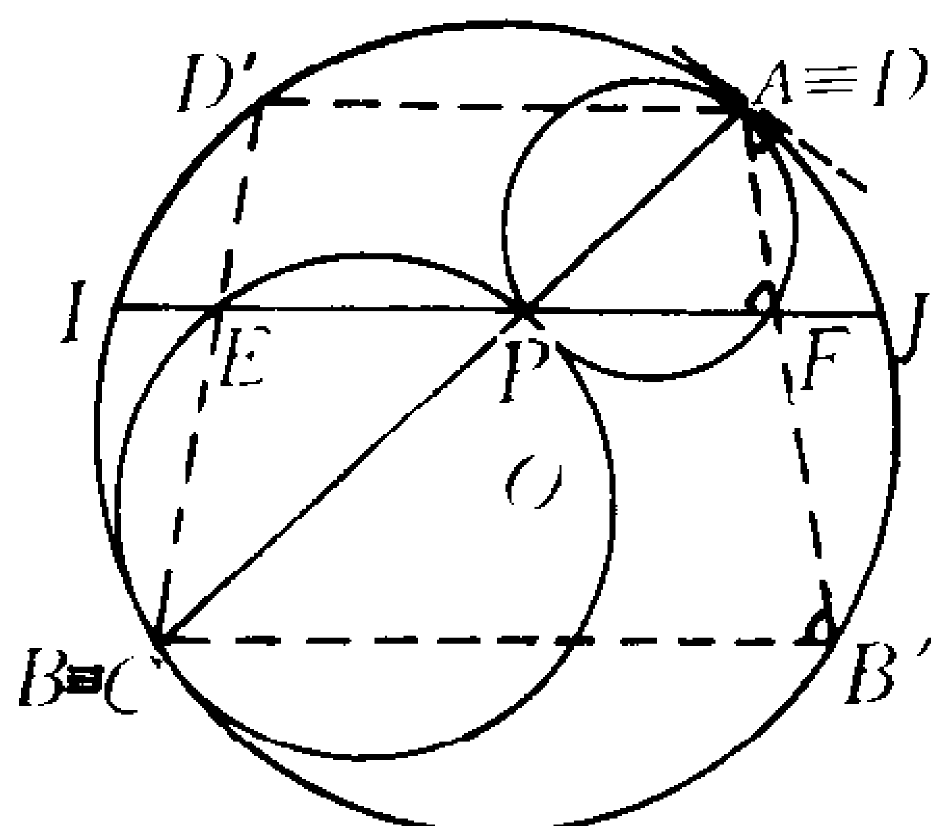


图 18

特别地，当直线 l 恰为 $\odot(PBC)$ 与 $\odot(PAD)$ 的公共弦 PQ（Q 为两圆的另一交点）时，E、F 皆重合于 Q（见图 5,7,13）. 于是由定理 1 即知圆心 O 在 l 上的射影也为 Q，因而有

推论 1 设内接于 $\odot O$ 的四边形 $ABCD$ 的一组对边 AB、CD（所在直线）交于 P，$\odot(PBC)$ 与 $\odot(PAD)$ 交于 P、Q，则 $OQ \perp PQ$.

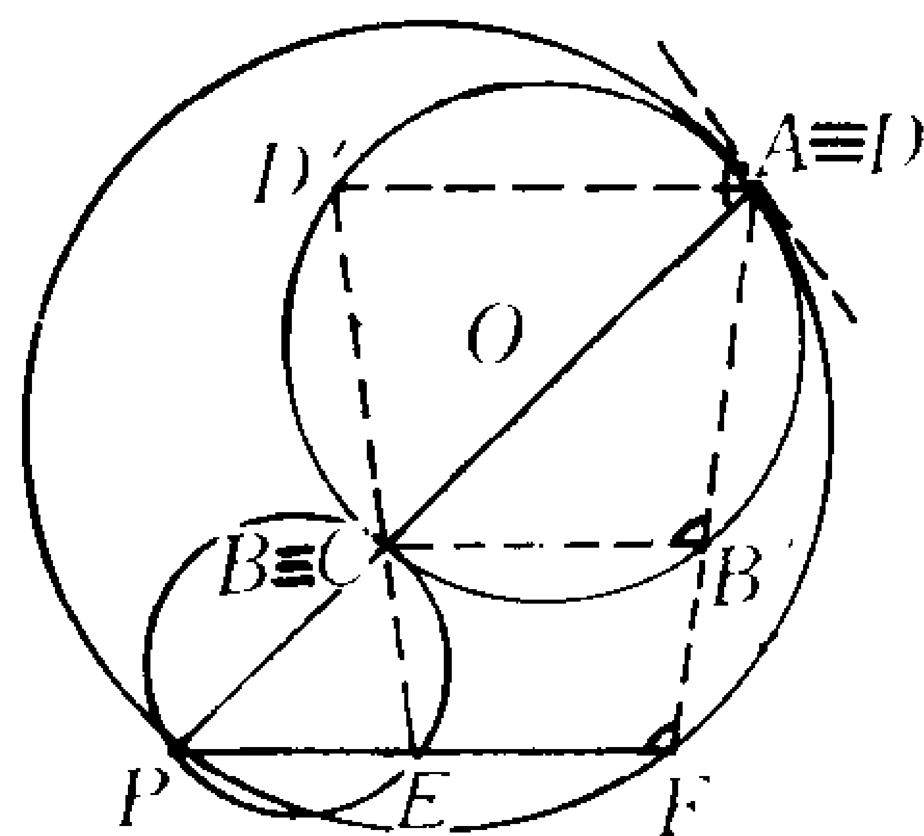


图 19

其中图 5 的情形即为第 26 届国际数学奥林匹克第 5 题，而图 13 的情形则是 1992 年中国数学奥林匹克第 4 题. 因而定理 1 的证明实际上给出了这两道（实为一道）竞赛题的一个十分简洁的证明.

当直线 l 与 $\odot O$ 相交于 I、J 两点（见图 1,6,7,10～14,18,19）时，因 I、J 同样关于圆心 O 在 l 上的射影对称，于是有

推论 2 设 $\odot O$ 的内接四边形 $ABCD$ 的一组对边 AB、CD（所在直线）交于 P，过 P 任作一条直线 l 交 $\odot O$ 于 I、J，交 $\odot(PBC)$ 与 $\odot(PAD)$ 于 E、P、F，则 $EI = JF$.

当 $D \equiv C$ 时，边 CD 变为 $\odot O$ 的切线(见图 14 ～ 16)，于是有

推论 3 过 $\triangle ABC$ 的顶点 C 作其外接圆的切线与边 AB(所在直线)交于 P，过 P 任作一直线 l 与 $\odot(PBC)$、$\odot(PAD)$ 分别交于 E、P、F，则 E、F 关于 $\triangle ABC$ 的外心在 l 上的射影对称. 又如果直线 l 与 $\triangle ABC$ 的外接圆交于 I、J，则 $EI = JF$.

在定理 1 中，如果 $C \equiv B$，$D \equiv A$，则 $\odot(PBC)$、$\odot(PAD)$ 皆与 $\odot O$ 相切(见图 18 ～ 19)，于是有

推论 4 设 $\odot O_1$ 与 $\odot O_2$ 相交于 P，且分别与 $\odot O$ 相切于 A、B，过 P 任作一直线交 $\odot O$ 于 I、J，交 $\odot O_1$、$\odot O_2$ 于 E、P、F，如果 P、A、B 三点共线，则 $EI = JF$.

有趣的是，定理 1 包含了蝴蝶定理的一个推广，即有

定理 2 给定 $\odot O$ 与直线 l，O 在 l 上的射影为 M，点 P、Q 在 l 上且关于 M 对称，分别过 P、Q 作 $\odot O$ 的割线 PAB、QCD，再设 l 分别与直线 BD、AC 交于 E、F，则 E、F 也关于点 M 对称(参见图 20 ～ 23，仅为部分情形).

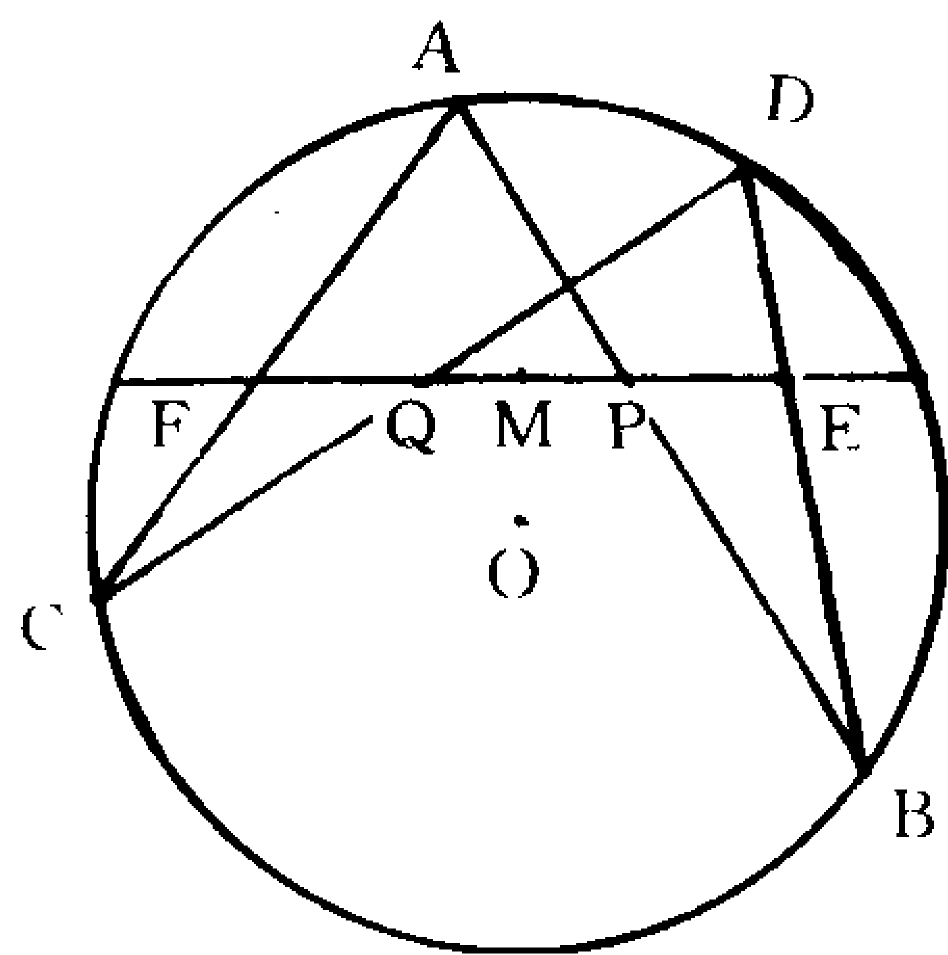


图 20

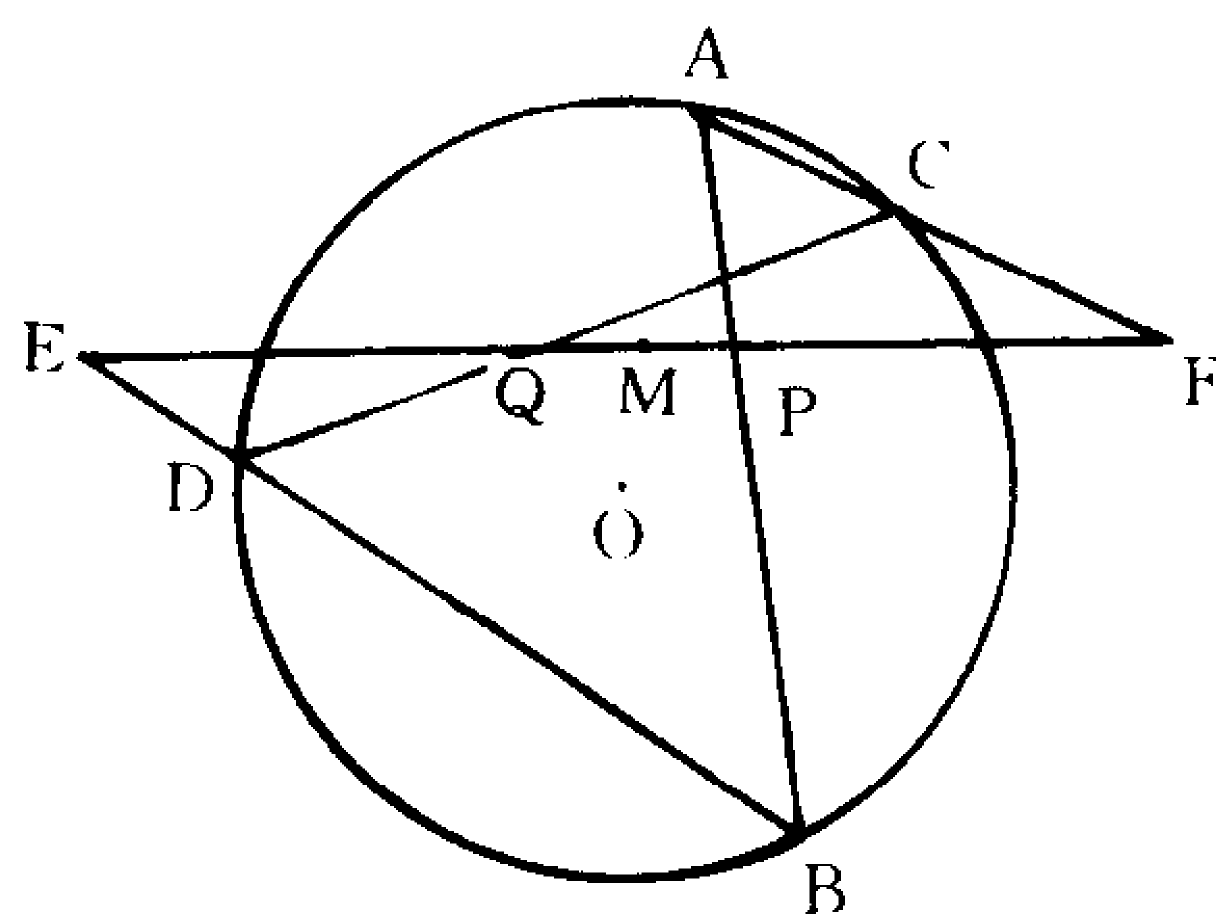


图 21

证明 仅就图 23 的情形讨论. 因 $\odot O$ 关于过 M 且垂直于 l 的直线对称，且 P、Q 互为对称点. 设 C、D 的对称点分别为 C'、D'，则 C'、D' 皆在 $\odot O$ 上，$CC' \parallel DD' \parallel l$，且 P、C'、D' 三点共线(为 QCD

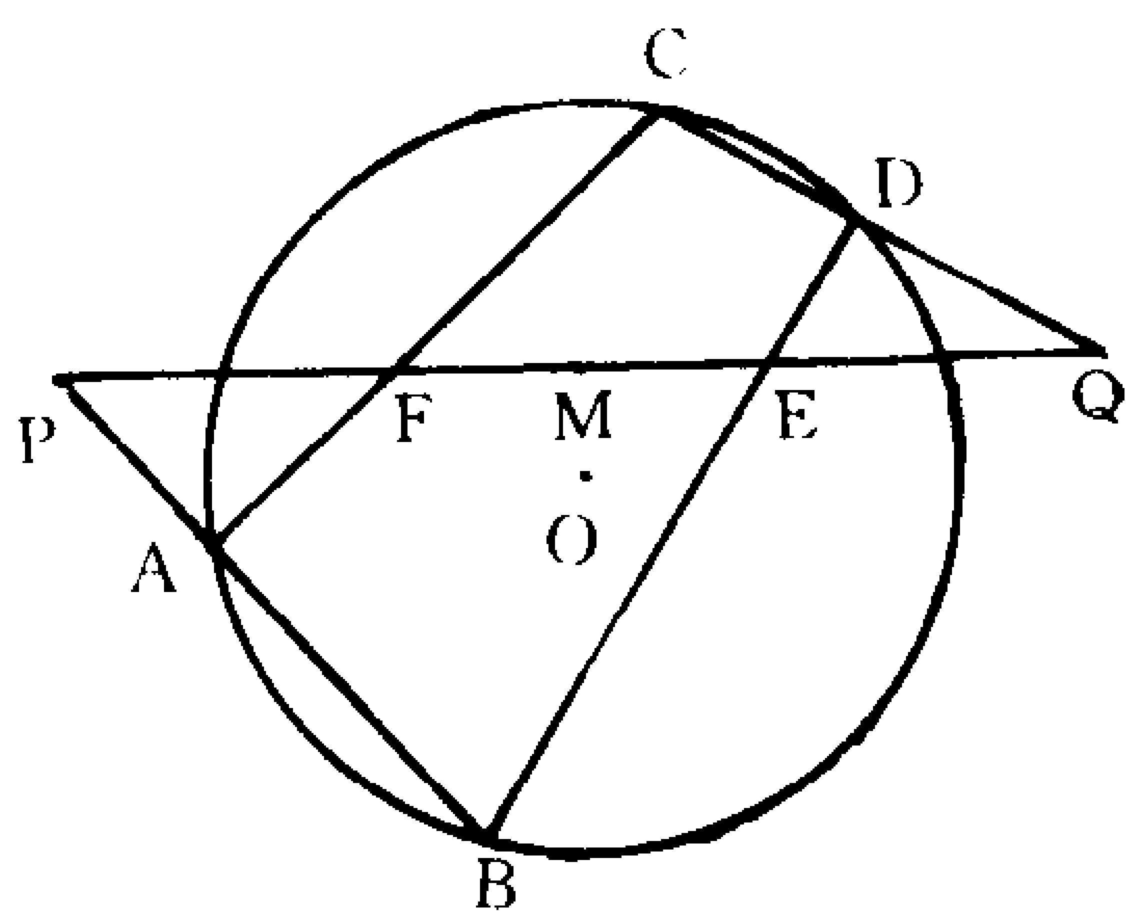


图 22

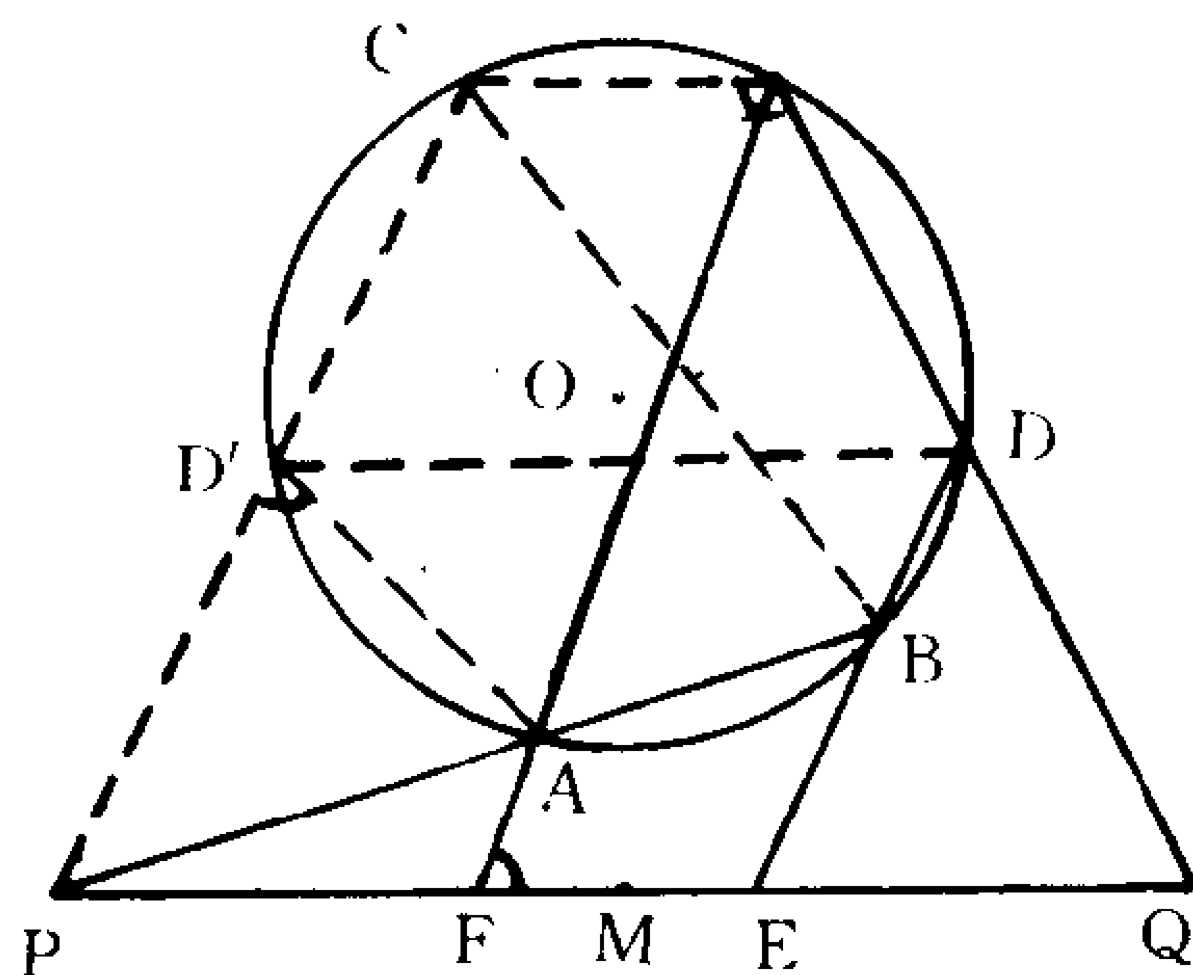


图 23

的对称直线). 连 AD'、BC',则 P 为 $\odot O$ 的内接四边形 $ABC'D'$ 的一组对边 AB、$C'D'$ 的交点,且 $\angle PD'A = \angle C'CA = \angle QFC$,于是 P、F、A、D' 四点共圆,同理,P、E、B、C' 四点共圆. 即 E、F 分别为 $\odot(PBC')$、$\odot(PAD')$ 与过 P 的直线 l 的交点,由定理 1 即知 E、F 关于点 M 对称. □

当直线 l 与 $\odot O$ 相交时,定理 2 即为文[3]的结论,它是著名的蝴蝶定理[4] 的一个推广.

(二)

由定理 1 可导出圆内接四边形的另一个比较深刻的性质,出人意料之外的是,它竟是蝴蝶定理的另一个推广 —— 坎迪定理[4] 的更为一般的情形.

为方便叙述,我们用有向线段来刻划.

定理 3 设内接于 $\odot(o,r)$ 的四边形的一组对边(所在直线)交于 P,过 P 任作一条直线 l 分别与四边形的另一组对边(所在直线)交于 I、J,圆心 O 在 l 上的射影为 M,则有

$$\frac{1}{\overline{PI}} + \frac{1}{\overline{PJ}} = \frac{2\,\overline{PM}}{OP^2 - r^2}$$

证明　设四边形 $ABCD$ 内接于 $\odot(O,r)$，AB 与 CD 交于 P，BC、AD 分别交 l 于 I、J. 再设 $\odot(PBC)$ 与 $\odot(PAD)$ 分别交 l 于 E、P、F（参见图 24），则由圆幂定理与勾股定理，有

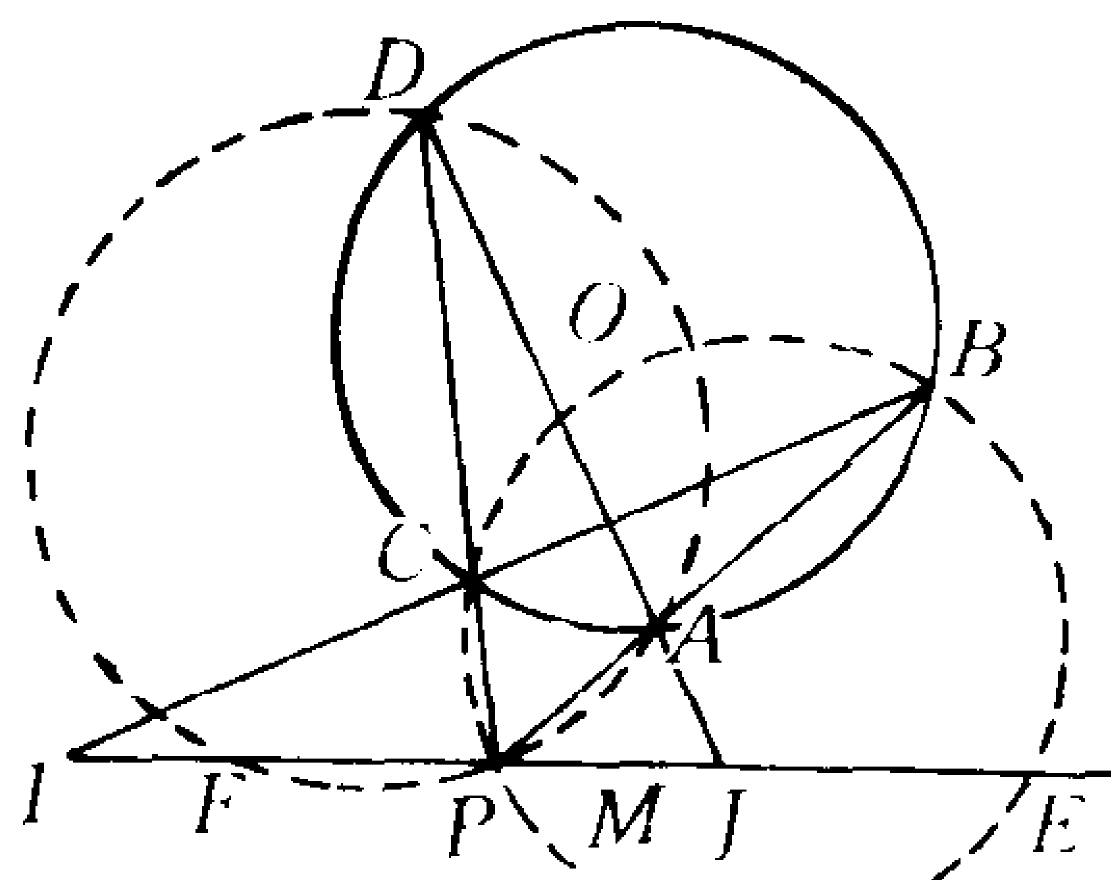


图　24

$$\overline{EI}\cdot\overline{PI}=\overline{IC}\cdot\overline{IB}=OI^2-r^2=OM^2+MI^2-r^2$$
$$=OP^2-PM^2+MI^2-r^2.$$

另一方面，由有向线段的性质，有

$$\overline{EI}\cdot\overline{PI}=(\overline{EM}+\overline{MI})\cdot\overline{PI}$$
$$=(\overline{MI}-\overline{PM})\cdot\overline{PI}+(\overline{EM}+\overline{PM})\cdot\overline{PI}$$
$$=(\overline{MI}-\overline{PM})\cdot(\overline{MI}+\overline{PM})+(\overline{EM}+\overline{PM})\cdot\overline{PI}$$
$$=MI^2-PM^2+(\overline{EM}+\overline{PM})\cdot\overline{PI}.$$

比较两次计算的结果，得

$$(\overline{EM}+\overline{PM})\cdot\overline{PI}=OP^2-r^2.$$

因此 $\dfrac{1}{\overline{PI}}=\dfrac{\overline{EM}+\overline{PM}}{OP^2-r^2}$，同理 $\dfrac{1}{\overline{PJ}}=\dfrac{\overline{FM}+\overline{PM}}{OP^2-r^2}$.

而由定理 1，知 $\overline{EM}+\overline{FM}=0$，故

$$\frac{1}{\overline{PI}}+\frac{1}{\overline{PJ}}=\frac{\overline{EM}+\overline{FM}+2\,\overline{PM}}{OP^2-r^2}=\frac{2\,\overline{PM}}{OP^2-r^2}.\quad\square$$

当直线 l 与 $\odot O$ 相交时，由定理 2 即得文[5]中所述的一个优美结果：

定理 4　设圆内接四边形的一组对边（所在直线）交于 P，过 P 任作一直线与四边形的另一组对边（所在直线）交于 I、J，与圆交于 E、F，则有

$$\frac{1}{\overline{PI}}+\frac{1}{\overline{PJ}}=\frac{1}{\overline{PE}}+\frac{1}{\overline{PF}}.$$

证明　设所述圆为 $\odot(O,r)$，圆心 O 在直线 EF 上的射影为 M（如图 25 ～ 38），因 E、F 关于点 M 对称，所以 $\overline{ME}+\overline{MF}=0$，于是

$$2\,\overline{PM}=\overline{ME}+\overline{PM}+\overline{MF}+\overline{PM}=\overline{PE}+\overline{PF}.$$

又由圆幂定理，有 $OP^2-r^2=\overline{PE}\cdot\overline{PF}$.

故由定理 2 即得

$$\frac{1}{\overline{PI}}+\frac{1}{\overline{PJ}}=\frac{2\,\overline{PM}}{OP^2-r^2}=\frac{\overline{PE}+\overline{PF}}{\overline{PE}\cdot\overline{PF}}=\frac{1}{\overline{PE}}+\frac{1}{\overline{PF}}.$$

□

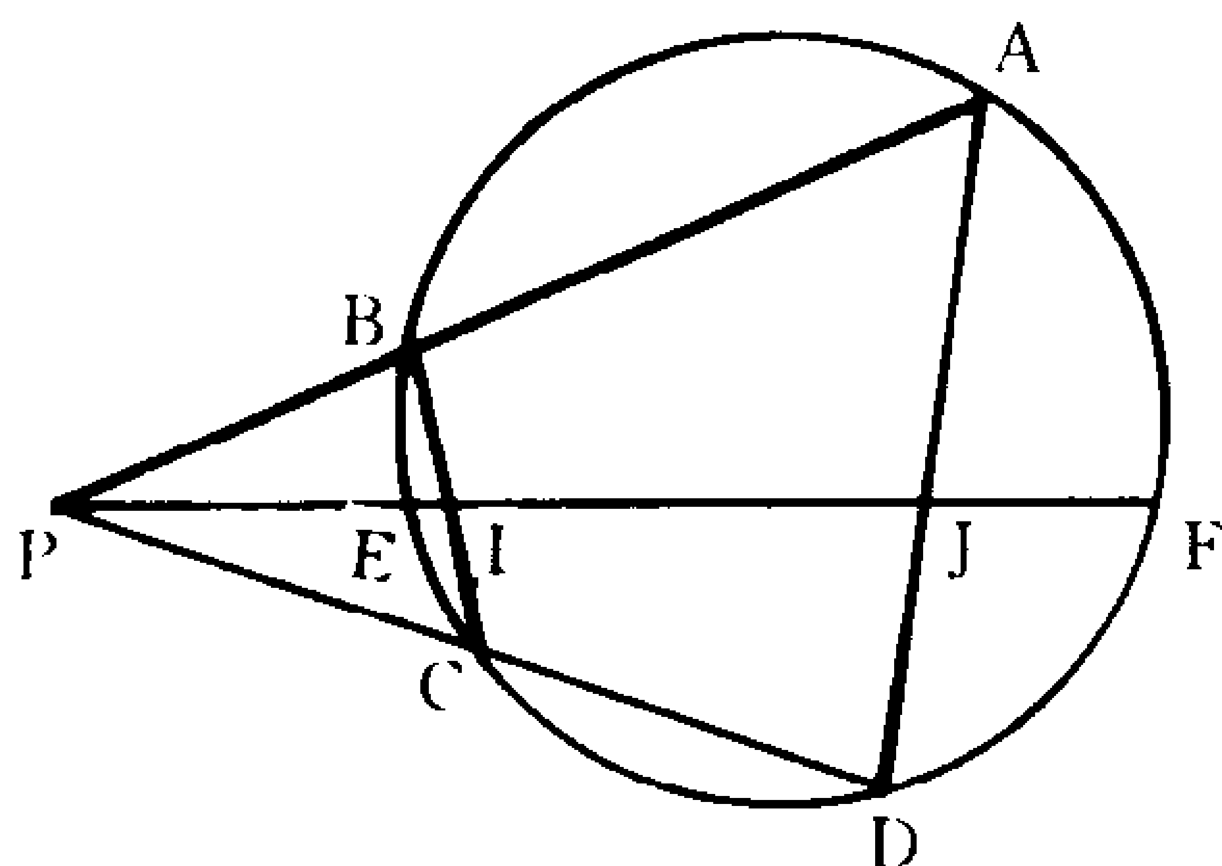


图　25

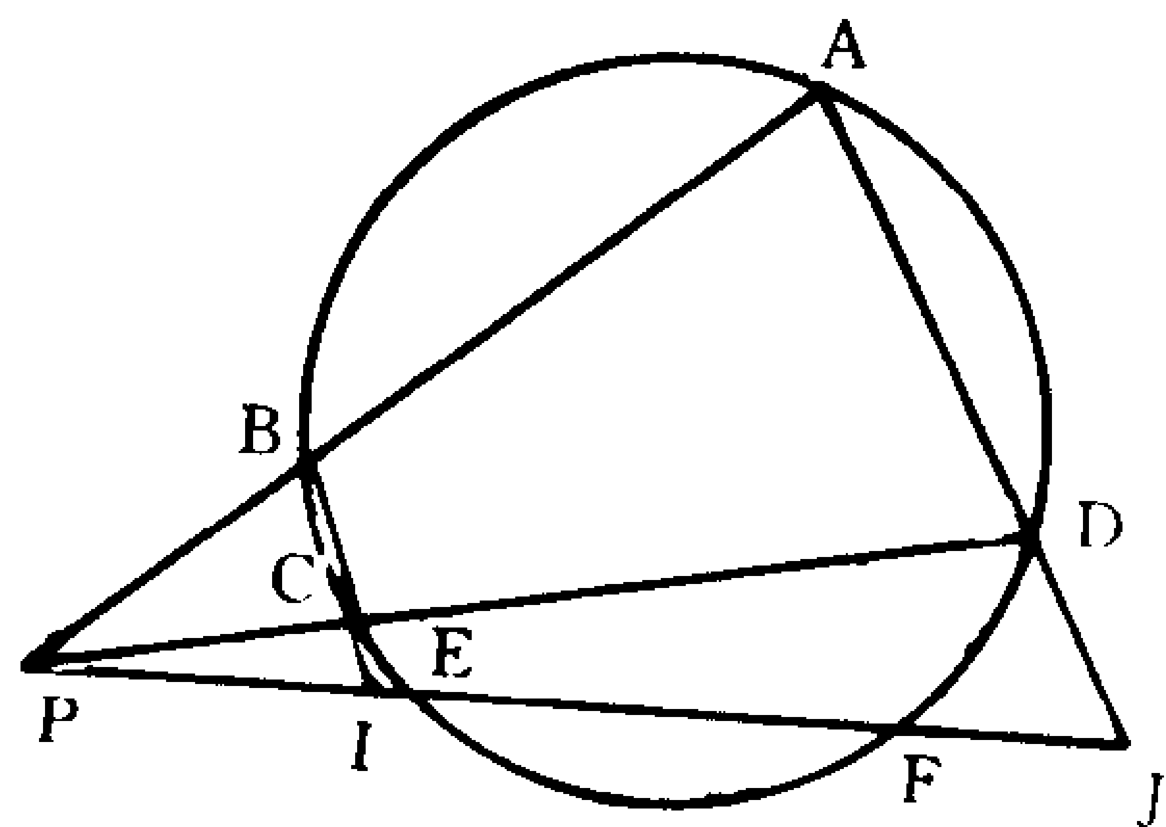


图　26

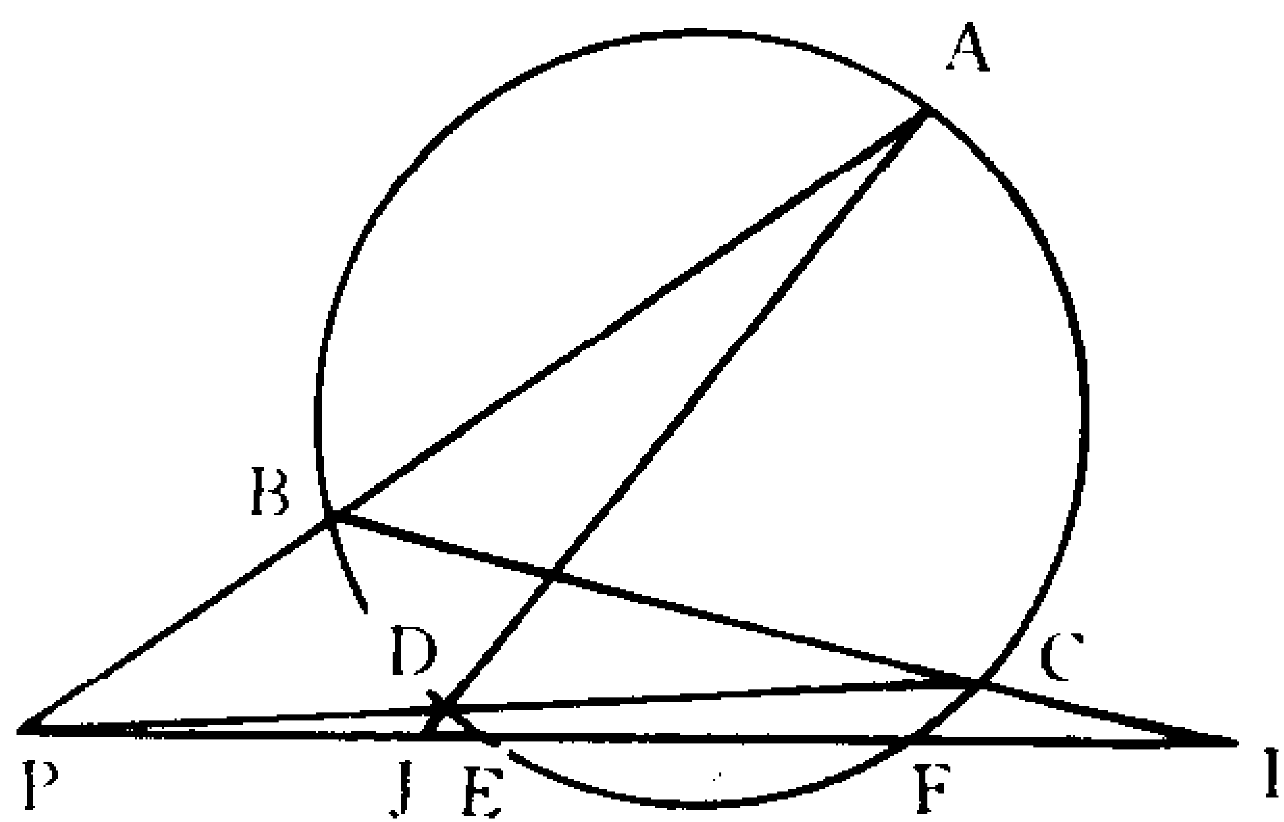


图　27

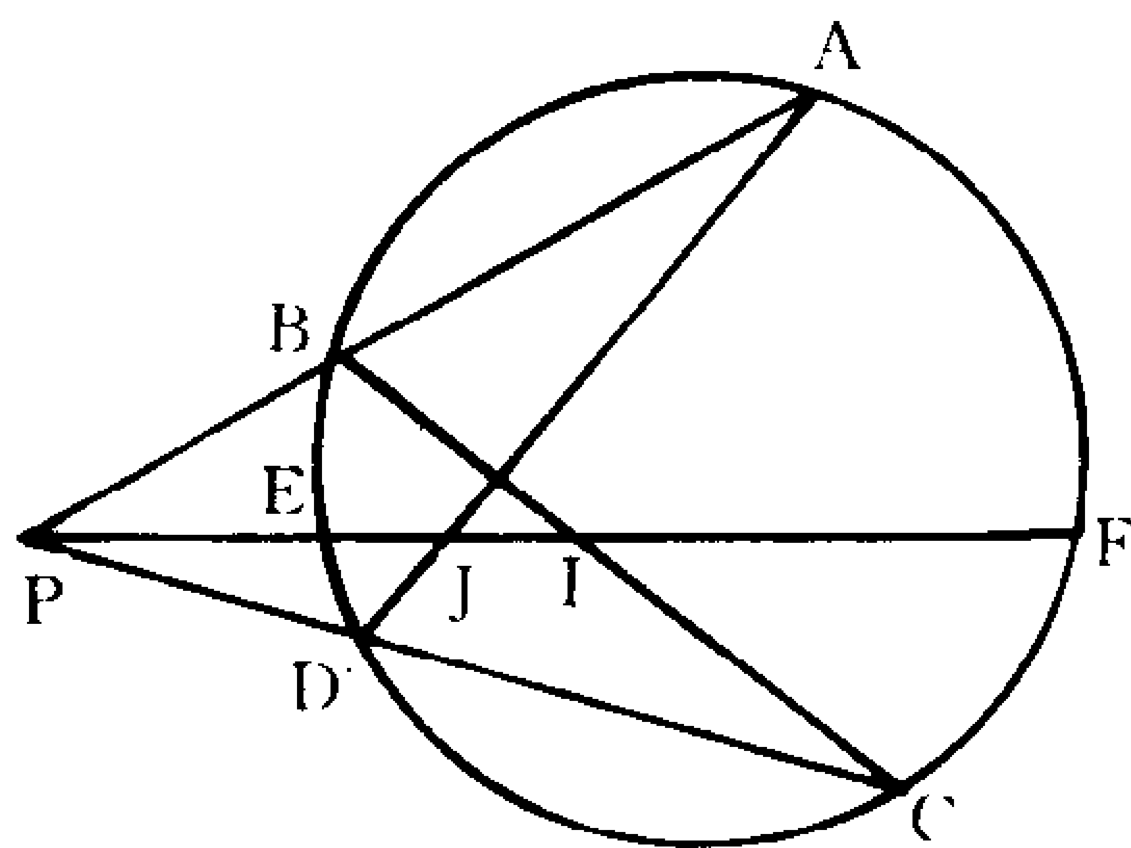


图　28

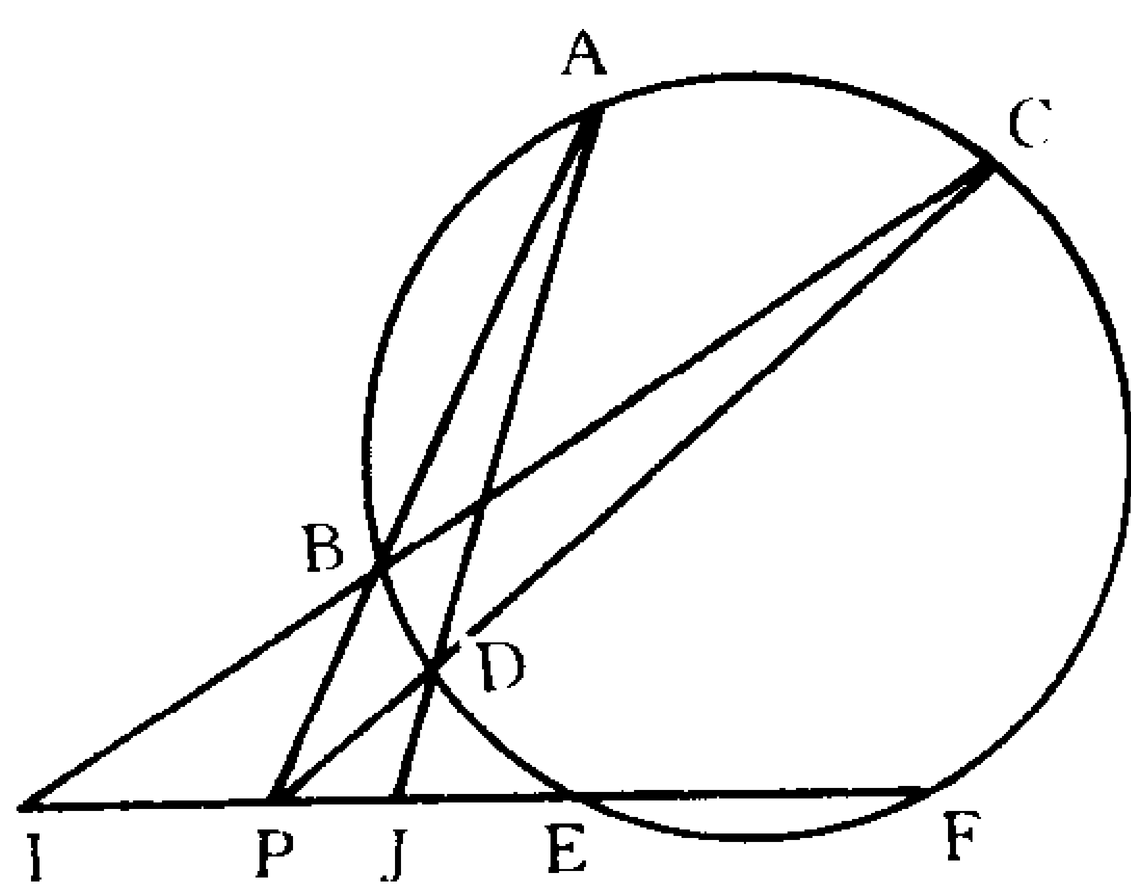


图 29

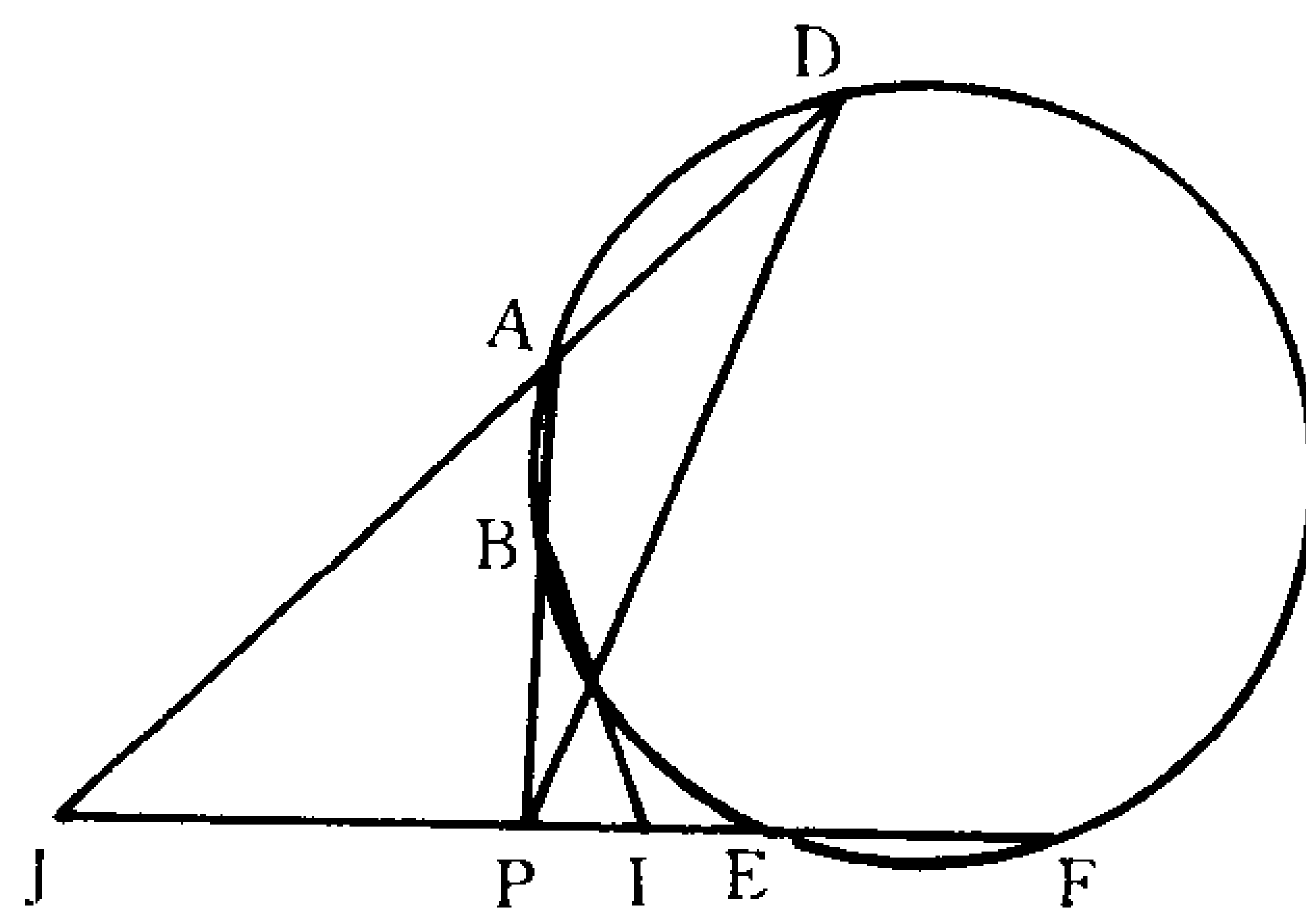


图 30

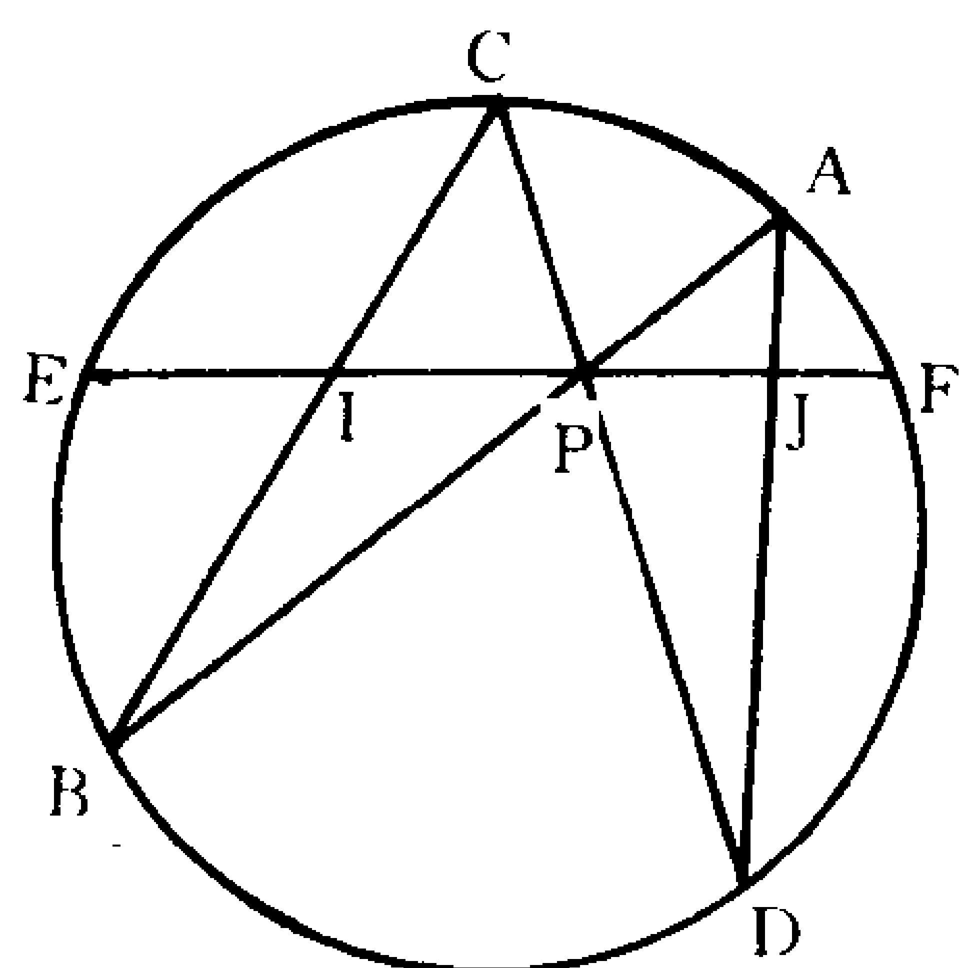


图 31

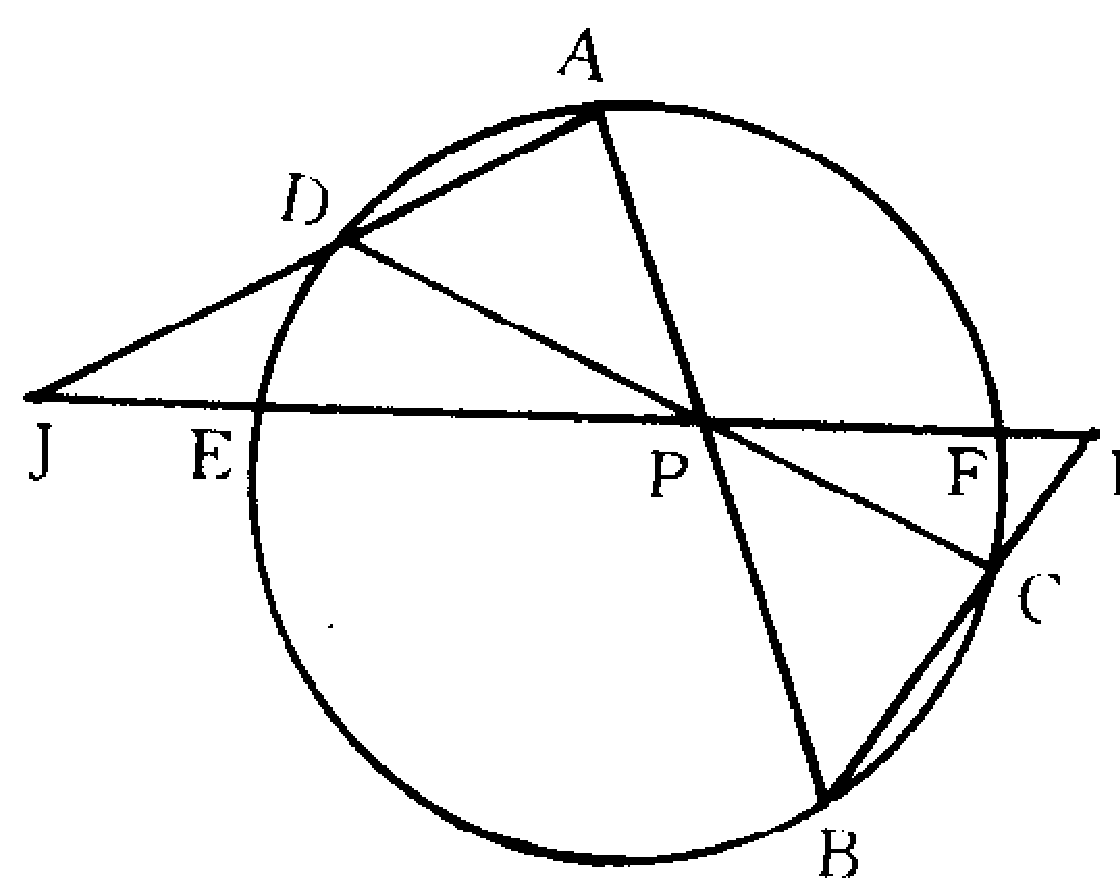


图 32

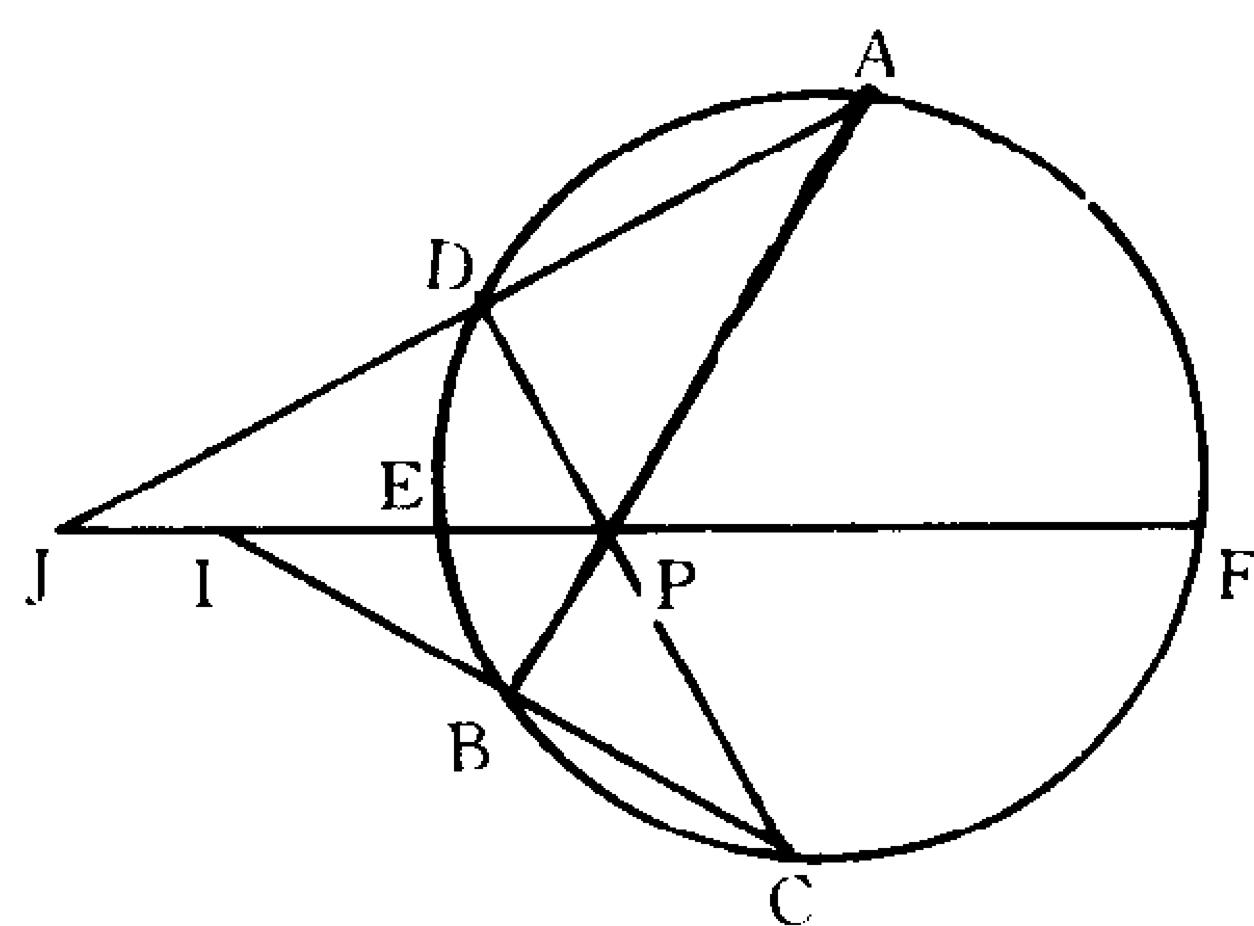


图 33

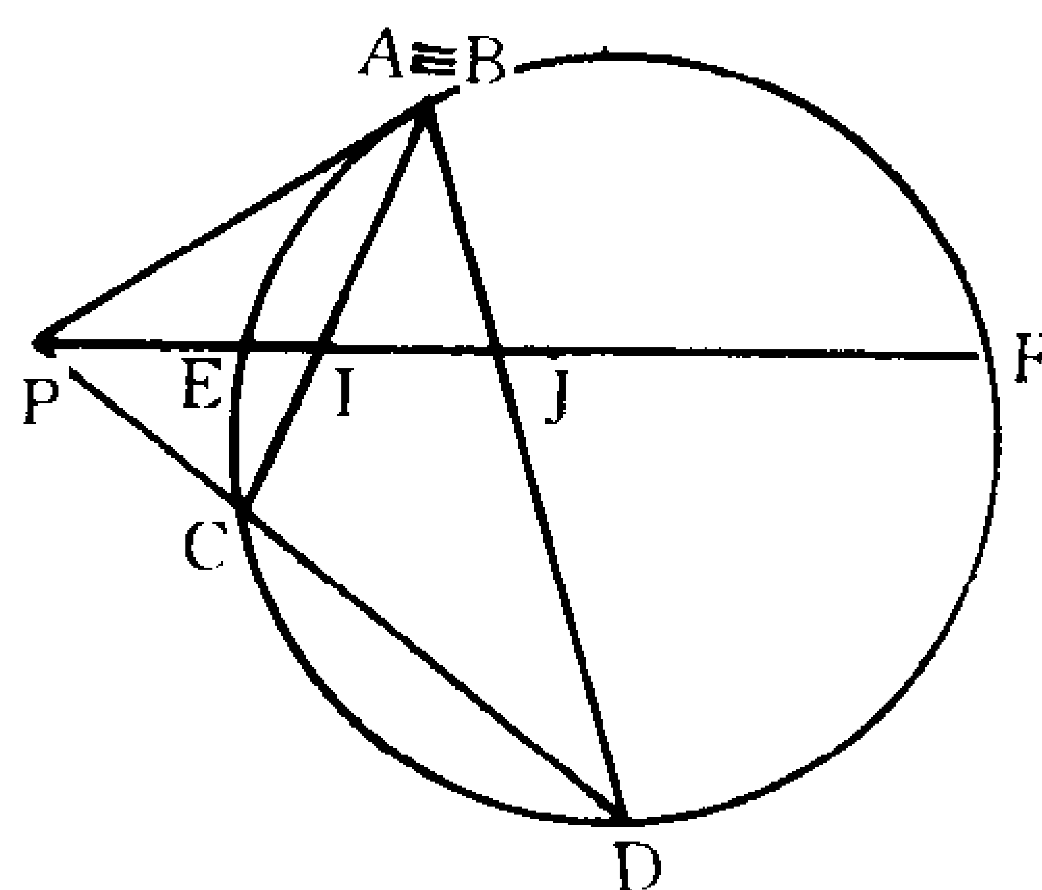


图 34

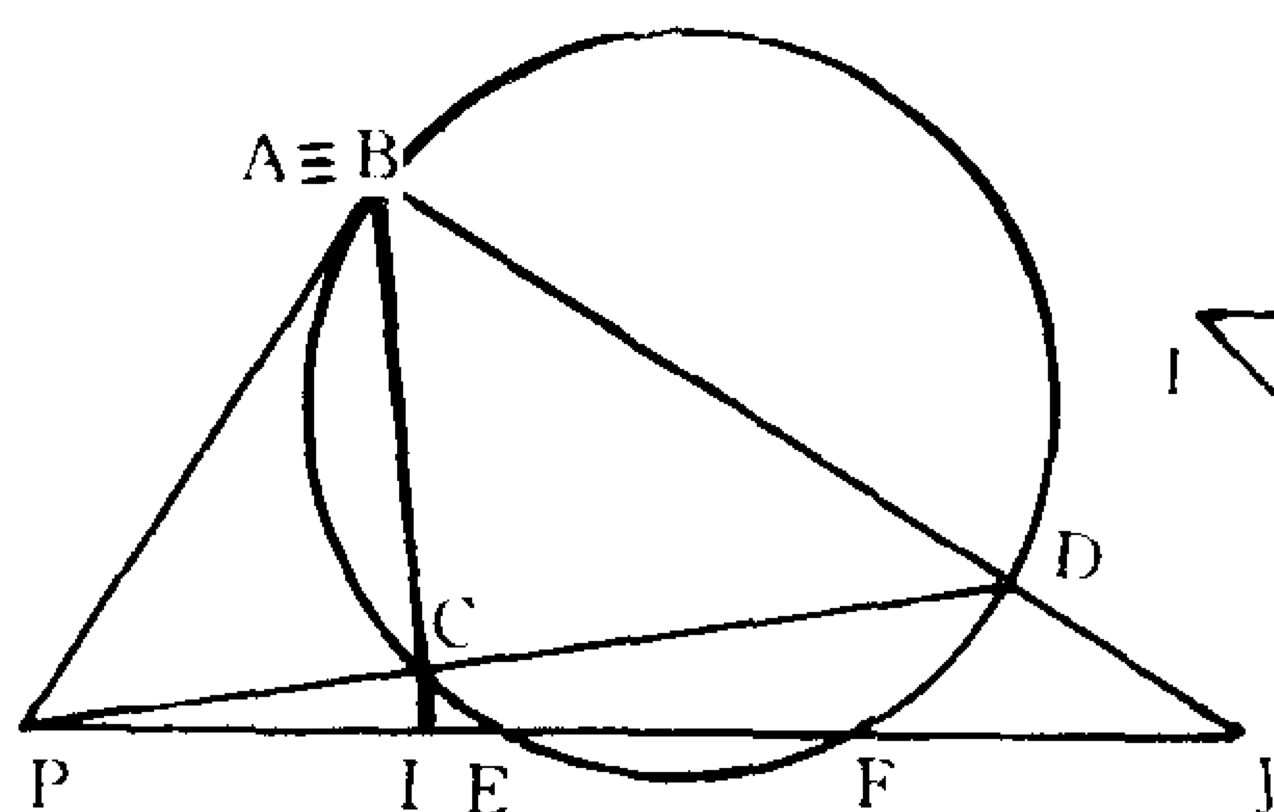


图 35

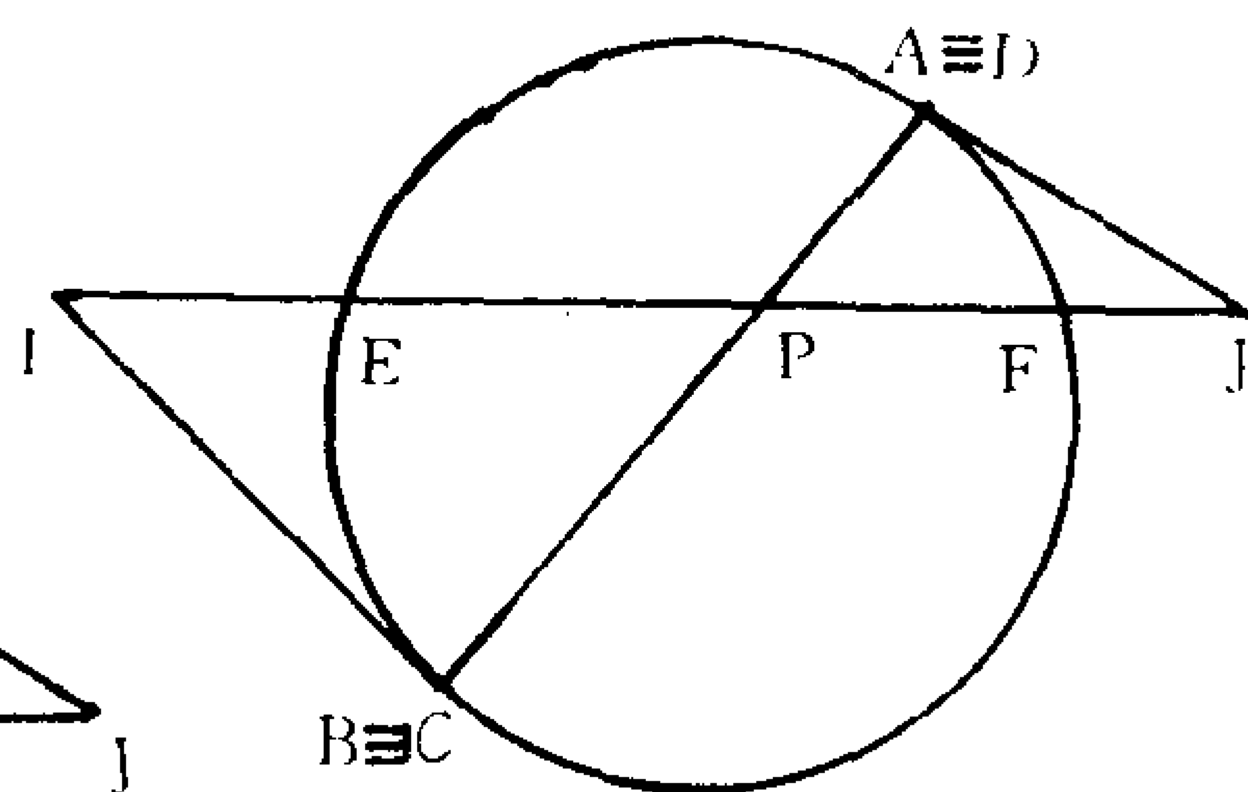


图 36

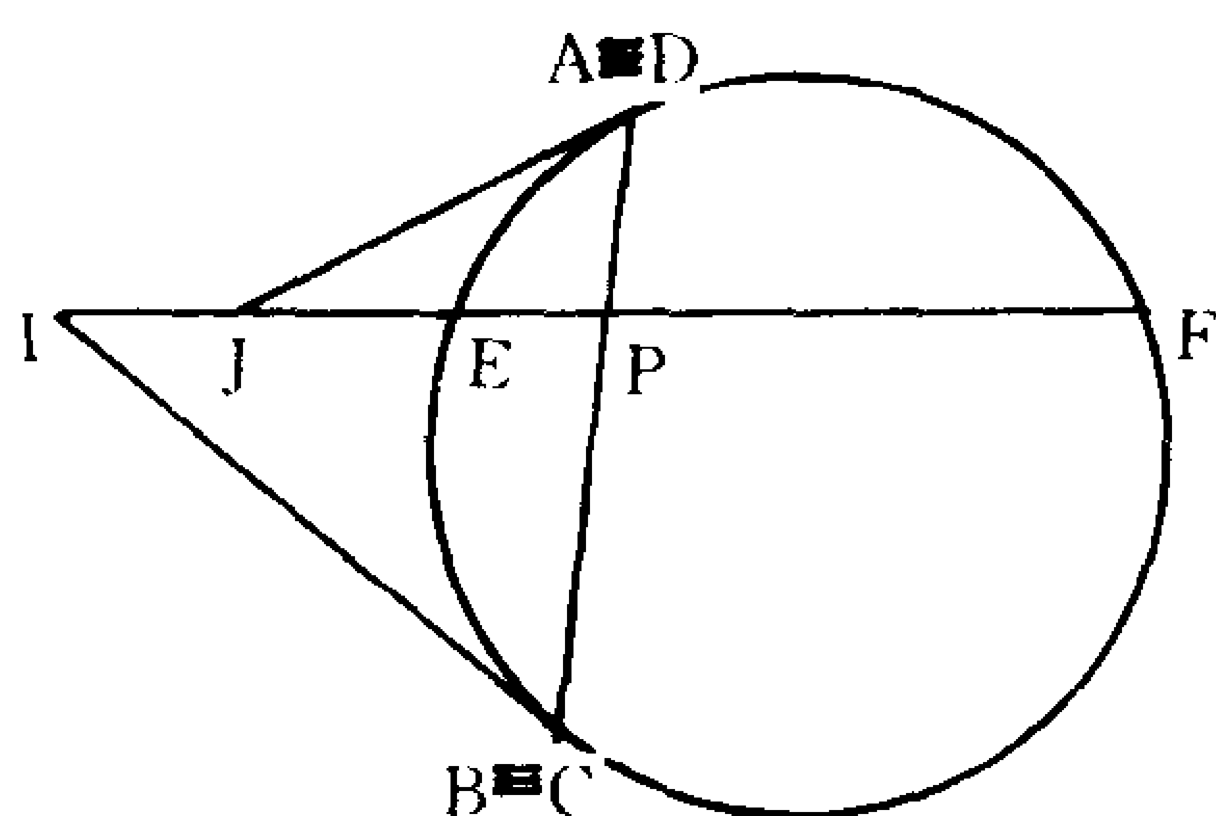


图 37

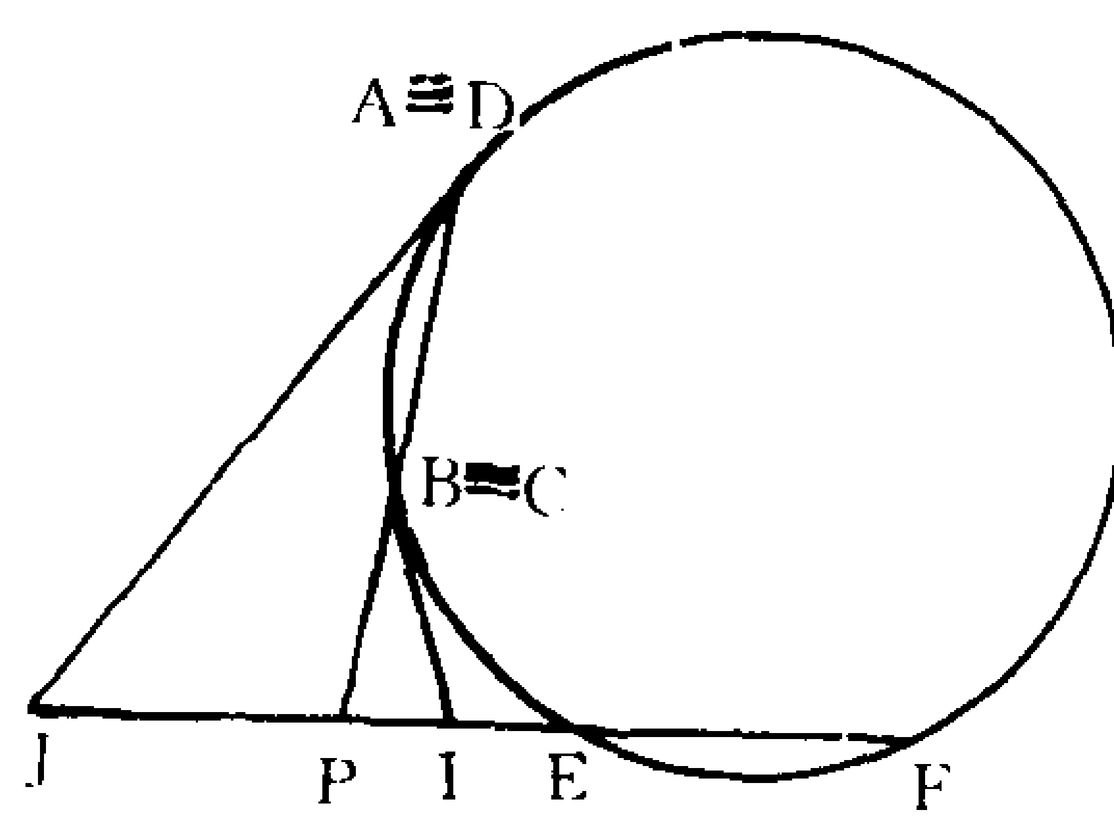


图 38

如果改用绝对量，则定理 4 可改述为

定理 4′ 条件同定理 4，记 $PE = a, PF = b, PI = u, PJ = v$，则

i) 当点 P 在圆外时，如果 I、J 在点 P 的同侧，则 $u^{-1} + v^{-1} = |a^{-1} + b^{-1}|$；如果 I、J 在点 P 的异侧，则 $|u^{-1} - v^{-1}| = a^{-1} + b^{-1}$；

ii) 当点 P 在圆内时，如果 I、J 在点 P 的同侧，则 $u^{-1} + v^{-1} = |a^{-1} - b^{-1}|$；如果 I、J 在点 P 的异侧，则 $u^{-1} - v^{-1} = a^{-1} - b^{-1}$.

其中，ii) 的后一结论正是坎迪定理，故定理 4 是坎迪定理的一个推广，而定理 3 则是坎迪定理的更为一般的情形（注意文[6] 作为坎迪定理的 一个非常一般的推广，并不包含定理 4′ 的所有结论）.

在定理 3 中，当 $DA \parallel EF$ 时，点 J 消失于无穷远，因而$\frac{1}{PI} = \frac{1}{PE} + \frac{1}{PF}$，反之，必有 $DA \parallel EF$（见图 39 ～ 41），于是有

定理 5 设圆内接四边形的一组对边（所在直线）交于 P，过 P 任作一条直线与 BC（所在直线）交于 I，与圆交于 E、F，则 $EF \parallel AD$ 的充分必要条件为$\frac{1}{PI} = \frac{1}{PE} + \frac{1}{PF}$.

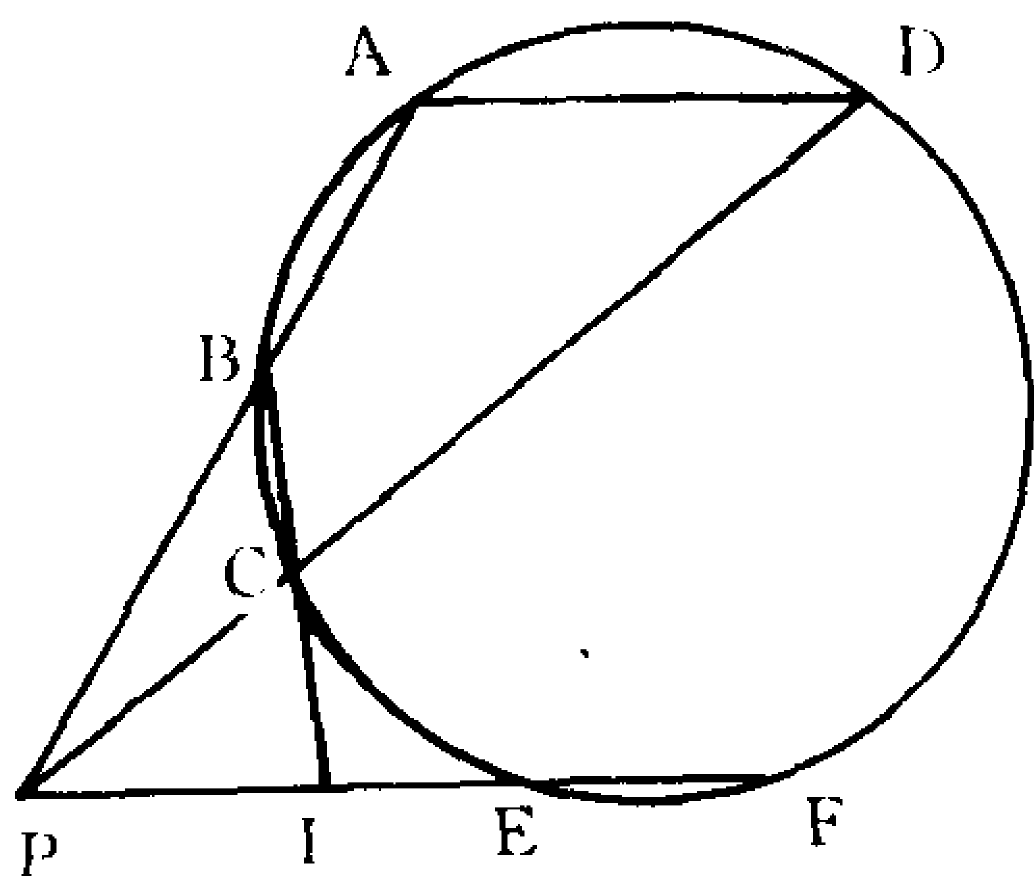


图 39

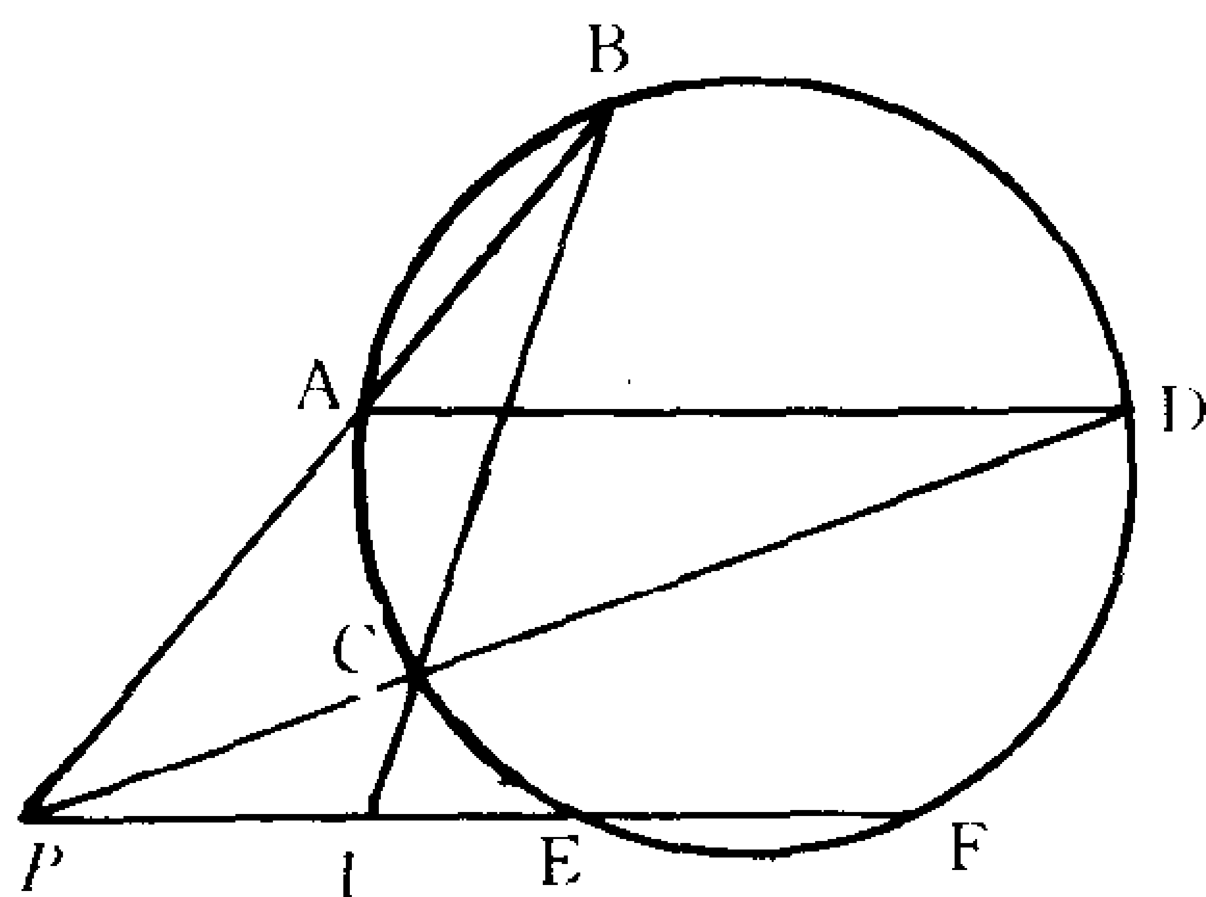


图 40

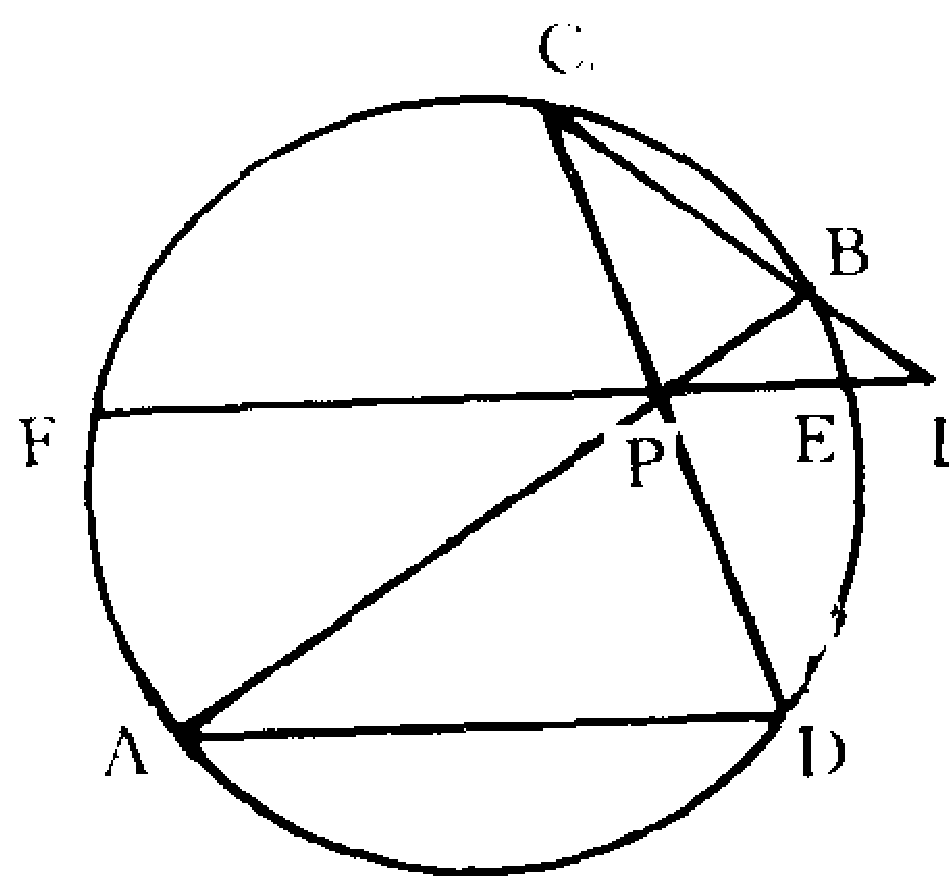


图 41

特别地，当点 P 在圆外，且割线 PEF 变为切线 PT 时（如图 42 ～ 43），$E \equiv F \equiv T$，且 I、T 都在点 P 的同侧，由于$\frac{1}{PI} = \frac{2}{PT}$当且仅当 I 为 PT 的中点，于是有

命题 1 设圆内接四边形 $ABCD$ 的一组对边 AB、CD（所在直线）相交于圆外一点 P，过 P 作圆的切线 PT（T 为切点），直线 BC 交 PT 于点 I，则 $PT \parallel AD$ 当且仅当 I 为 PT 的中点.

在图 28 中，当直线 PEF 过 BC、AD 的交点 Q 时，$I \equiv J \equiv Q$，于是由定理 4′(i)，有

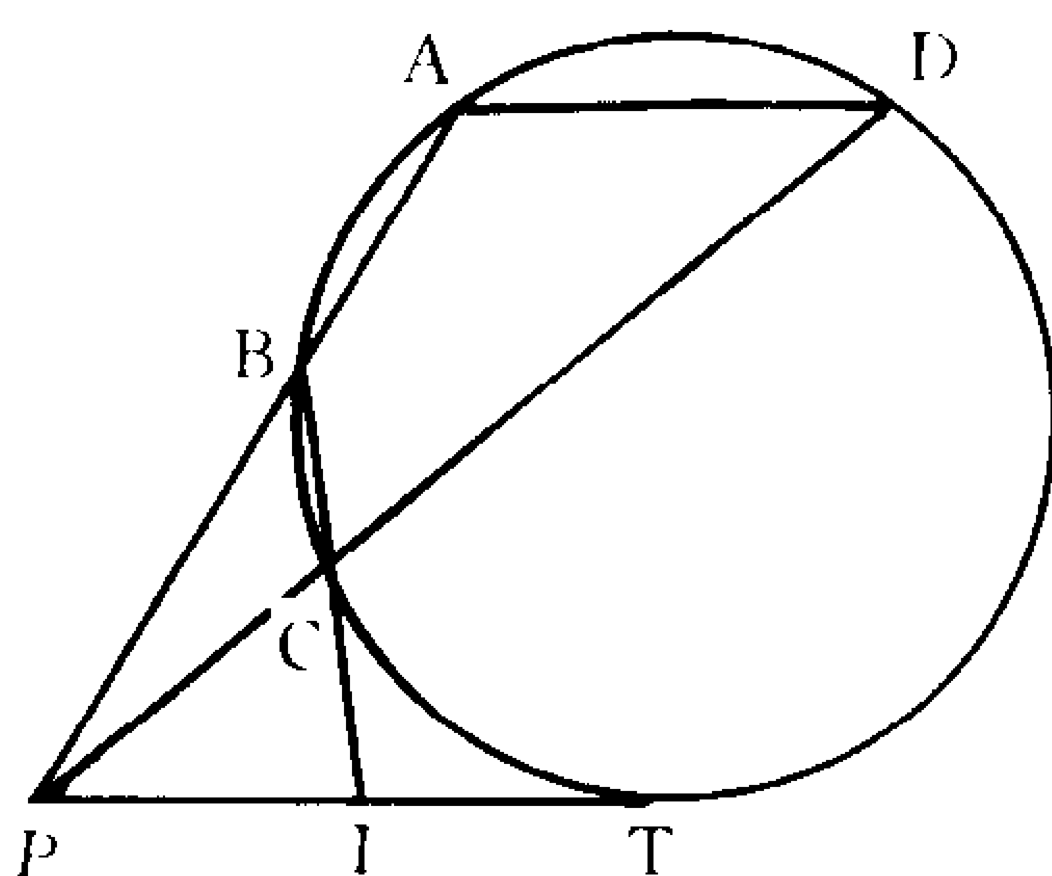


图 42

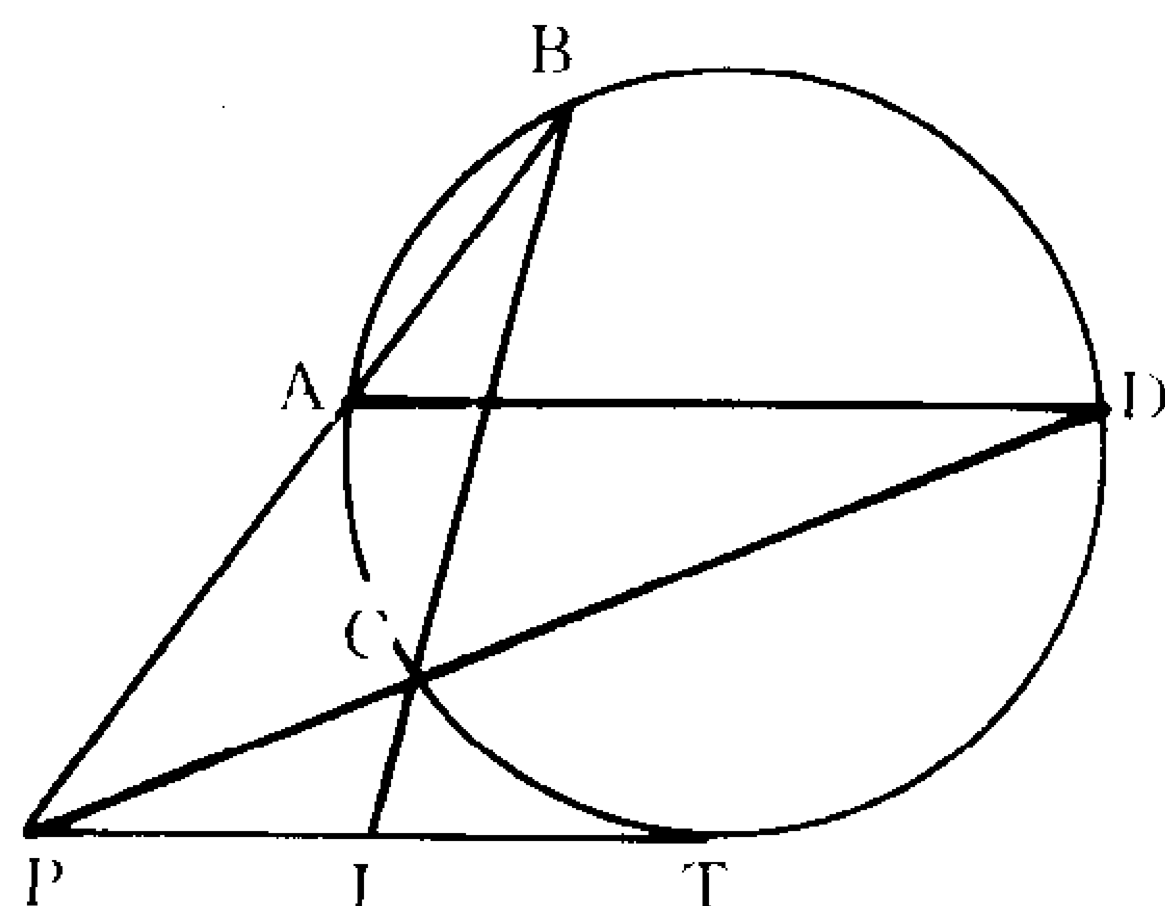


图 43

命题 2 设圆内接凸四边形的一组对边交于 P,两对角线交于 Q,直线 PQ 交圆于 R、S,则 PR,PQ,PS 成调和数列.

特别地,当圆内接四边形退化为弦时,有

命题 3 自圆外一点 P 作圆的两条切线 PA、PB,再过 P 作割线交圆于 R、S,交切点弦 AB 于 Q,则 PR,PQ,PS 成调和数列[7].

在图 35 中,当直线 PEF 变为圆的切线 PT 时,$E\equiv F\equiv T$,于是由定理 4′(i),有

命题 4 自圆外一点 P 作圆的两条切线 PS,PT(S、T 为切点),再过 P 作割线交圆于 A、B,直线 SA、SB 分别交切线 PT 于 Q、R,则 PQ,PT,PR 成调和数列.

(三)

利用前面两节的有关结论还可以导出圆内接四边形中关于多圆共点与多线共点等几个十分有趣的性质,其中还包括圆外切四边形的一个古典结果.

如图 44,设四边形 $ABCD$ 内接于 $\odot(O,r)$,它的两组对边的延长线分别交于 P、Q,两对角线交于 R,圆心 O 在 PQ,QR,RP 上的

射影分别为 M,N,L，由定理3，有 $\frac{2}{\overline{PQ}}=\frac{2\overline{PM}}{OP^2-r^2}$（$\because I\equiv J\equiv Q$），于是由圆幂定理，得 $\overline{PQ}\cdot\overline{PM}=OP^2-r^2=\overline{PA}\cdot\overline{PB}=\overline{PC}\cdot\overline{PD}$. 所以，$M$、$Q$、$A$、$B$ 四点共圆，M、Q、C、D 四点共圆；同理，M、P、A、D 四点共圆，M、P、B、C 四点共圆；又因 $OM\perp PQ$，所以 $\angle DMO=90^\circ-\angle QMD=90^\circ-\angle DAB=\angle DBO$，因此，$D$、$O$、$B$、$M$ 四点共圆；同理，A、O、C、M 四点共圆，也就是说，$\odot(PBC)$，$\odot(PDA)$，$\odot(QAB)$，$\odot(QCD)$，$\odot(OBD)$，$\odot(OAC)$ 六圆共点 M；同理，$\odot(QBD)$，$\odot(QCA)$，$\odot(RBC)$，$\odot(RDA)$，$\odot(OAB)$，$\odot(OCD)$ 六圆共点 N；$\odot(RAB)$，$\odot(RCD)$，$\odot(PBD)$，$\odot(PCA)$，$\odot(OBC)$，$\odot(ODA)$ 六圆共点 L（所述18个圆包括退化成直线的情形），于是我们证明了

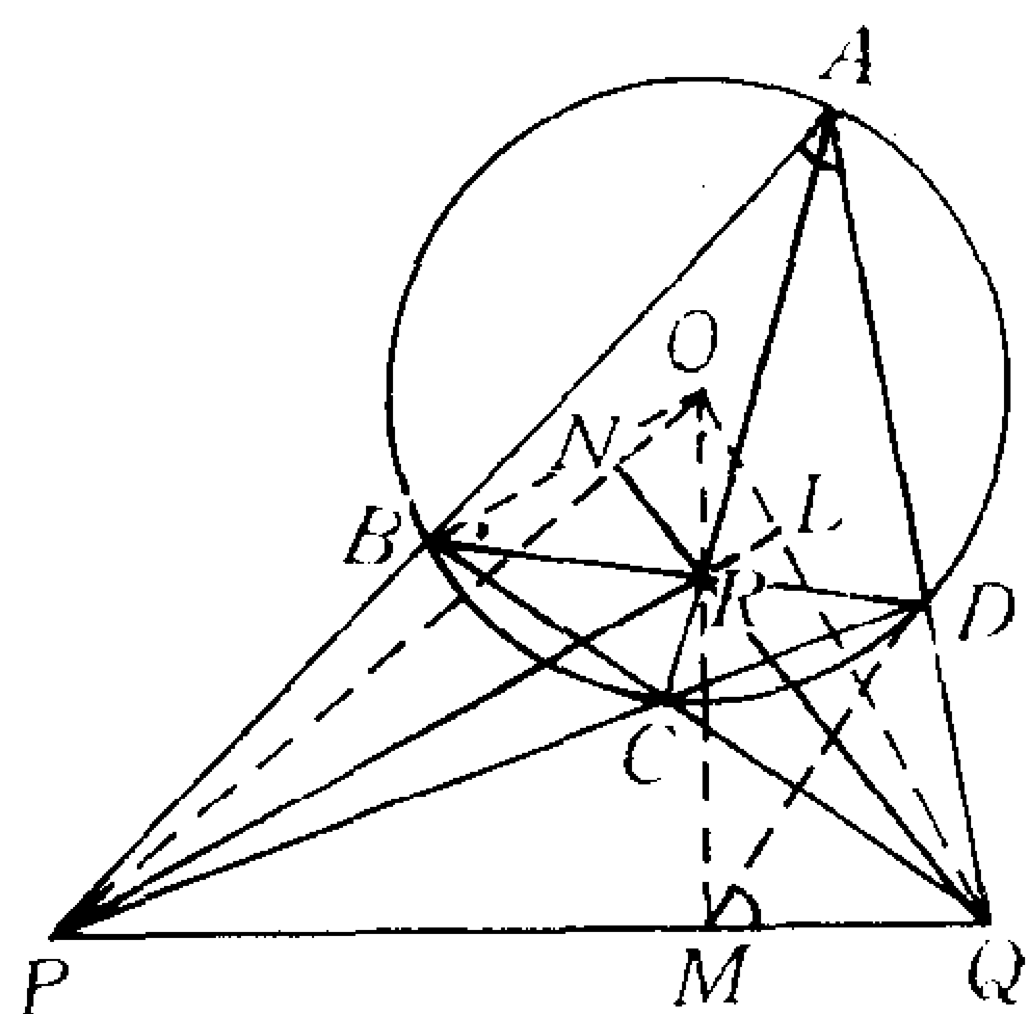


图 44

定理6 设四边形 $ABCD$ 内接于 $\odot O$，它的两组对边的延长线分别交于 P、Q，两对角线交于 R，则 $\odot(PBC)$，$\odot(PDA)$，$\odot(PCA)$，$\odot(PBD)$，$\odot(QAB)$，$\odot(QCD)$，$\odot(QCA)$，$\odot(QBD)$，$\odot(RAB)$，$\odot(RBC)$，$\odot(RCD)$，$\odot(RDA)$，$\odot(OAB)$，$\odot(OBC)$，$\odot(OCD)$，$\odot(ODA)$，$\odot(OBD)$，$\odot(OAC)$ 共18个圆可分为三组，每组六个圆共点，且这三点分别为圆心 O 在 $\triangle PQR$ 三边上的射影.

仍见图44，因三圆 $\odot(OBD)$，$\odot(OCA)$，$\odot O$ 两两相交，所以三公共弦 OM，BD，AC 共点 R，这说明 $OR\perp PQ$；同理 $OP\perp QR$，$OQ\perp RP$. 因此，O 为 $\triangle PQR$ 的垂心，故有

定理 7 设圆内接四边形的两组对边的延长线分别交于 P、Q，两对角线交于 R，则圆心恰为 $\triangle PQR$ 的垂心.

这是《中等数学》编辑部等单位举办的第二届全国数学奥林匹克命题比赛的一道获奖(一等)题，当初是根据高等几何知识得到的.

[**编者注** $\triangle PQR$ 即"自共轭三角形"，其垂心必是上述圆心. 可参阅 R. A. Johnson《近世几何学》(邱丕荣译，商务印书馆 1937 年版)一书 §139，§143；或梁绍鸿《初等数学复习与研究》(平面几何)(人民教育出版社 1958 年版)一书第 373 — 374 页.]

仍见图 44，因 RL 为 $\odot(RAB)$ 与 $\odot(RCD)$ 的公共弦，所以这两个圆的连心线垂直平分 RL，再注意 $OL \perp RL$，因此，$\odot(RAB)$ 与 $\odot(RCD)$ 的连心线通过 OR 的中点，同理，$\odot(RBC)$ 与 $\odot(RDA)$ 的连心线也通过 OR 的中点(这样便得到了 1990 年全国高中数学联赛第二试的第一题)；$\odot(OAB)$ 与 $\odot(OCD)$ 的连心线、$\odot(OBC)$ 与 $\odot(ODA)$ 的连心线均通过 OR 的中点. 同样，OP 的中点与 OQ 的中点也有类似的性质，因而我们证明了

定理 8 设四边形 $ABCD$ 内接于 $\odot O$，直线 AB 与 CD 交于 P，BC 与 DA 交于 Q，AC 与 BD 交于 R，$\odot(PBC)$ 与 $\odot(PDA)$、$\odot(PCA)$ 与 $\odot(PBD)$、$\odot(QAB)$ 与 $\odot(QCD)$、$\odot(QCA)$ 与 $\odot(QBD)$、$\odot(RAB)$ 与 $\odot(RCD)$、$\odot(RBC)$ 与 $\odot(RDA)$、$\odot(OAB)$ 与 $\odot(OCD)$、$\odot(OBC)$ 与 $\odot(ODA)$、$\odot(OBD)$ 与 $\odot(OAC)$ 共九对圆的连心线分别为 $l_1, l_2, \cdots, l_9$，则 l_1, l_2, l_8, l_9, OP 五线共点；l_3, l_4, l_9, l_7, OQ 五线共点；l_5, l_6, l_7, l_8, OR 五线共点，且这三点分别为 OP、OQ、OR 的中点(见图 45). □

如图 46 ～ 47，设 $EFGH$ 为 $\odot O$ 的内接四边形，两对角线交于点 P，过四边形 $EFGH$ 的四个顶点分别作 $\odot O$ 的切线得到 $\odot O$ 的一个外切四边形 $ABCD$，则不难知道，OA 的中点与 OC 的中点分别为 $\triangle OHE$ 与 $\triangle OFG$ 的外心，由定理 8 知，这两个外心的连线通

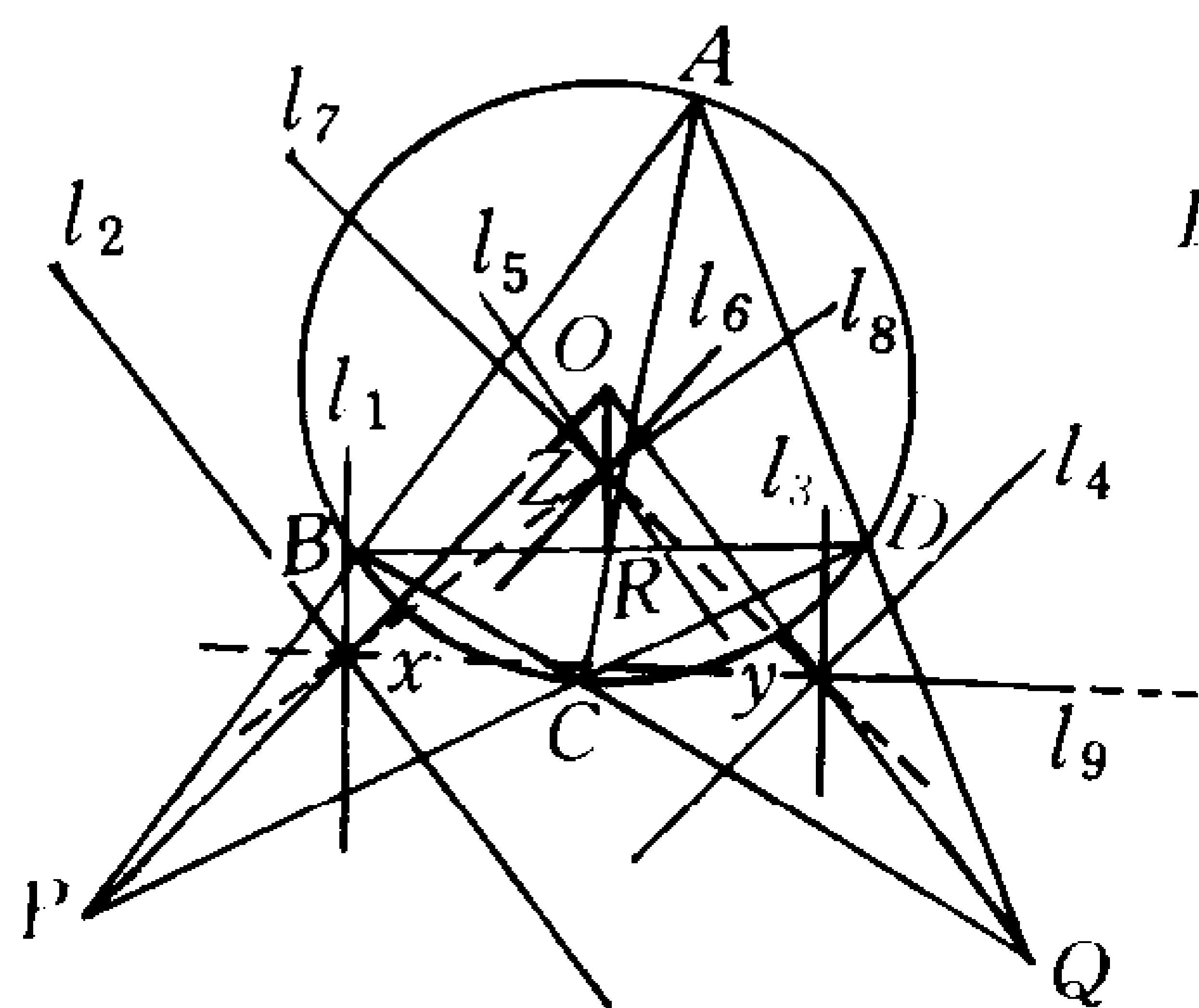


图 45

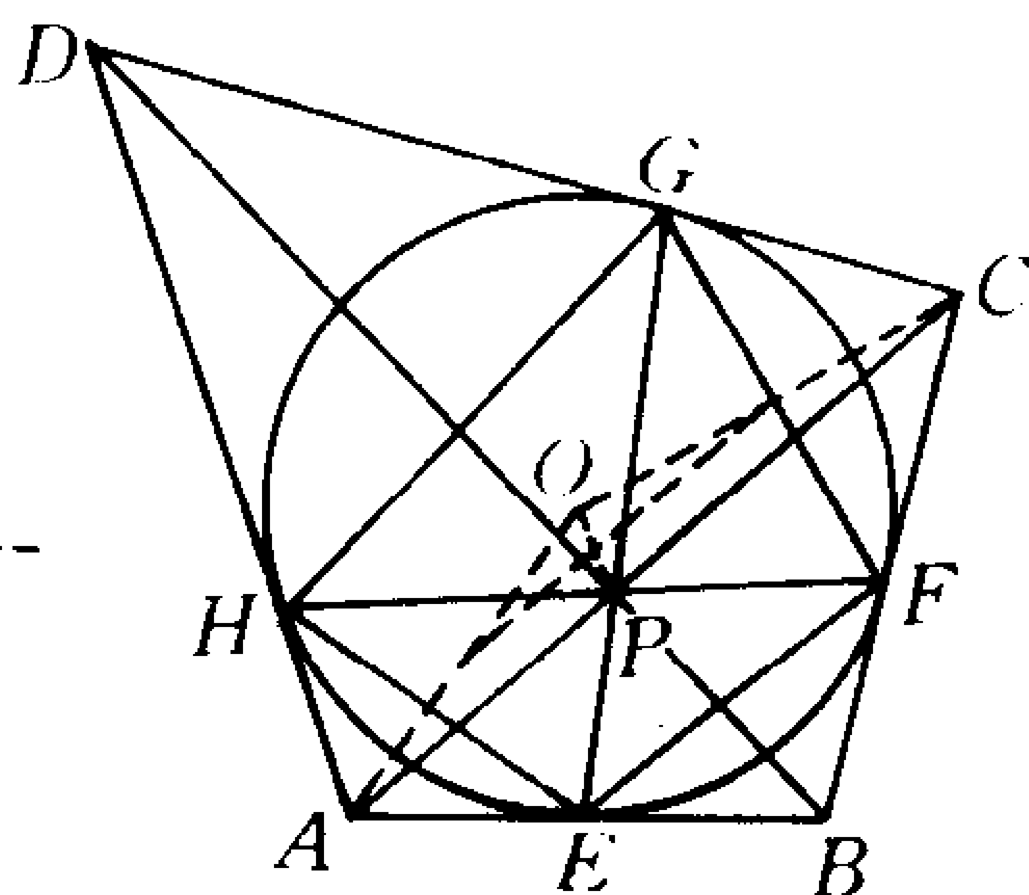


图 46

过 OP 的中点，换句话说，OA，OP，OC 三线段的中点共线，因而 A、P、C 三点共线，即 AC 过点 P；同理，BD 也过点 P，于是我们证明了如下的

牛顿定理[8] 圆外切四边形对边切点的连线与两对角线四线共点.

这个巧妙的方法是上海教育出版社叶中豪先生给出的.

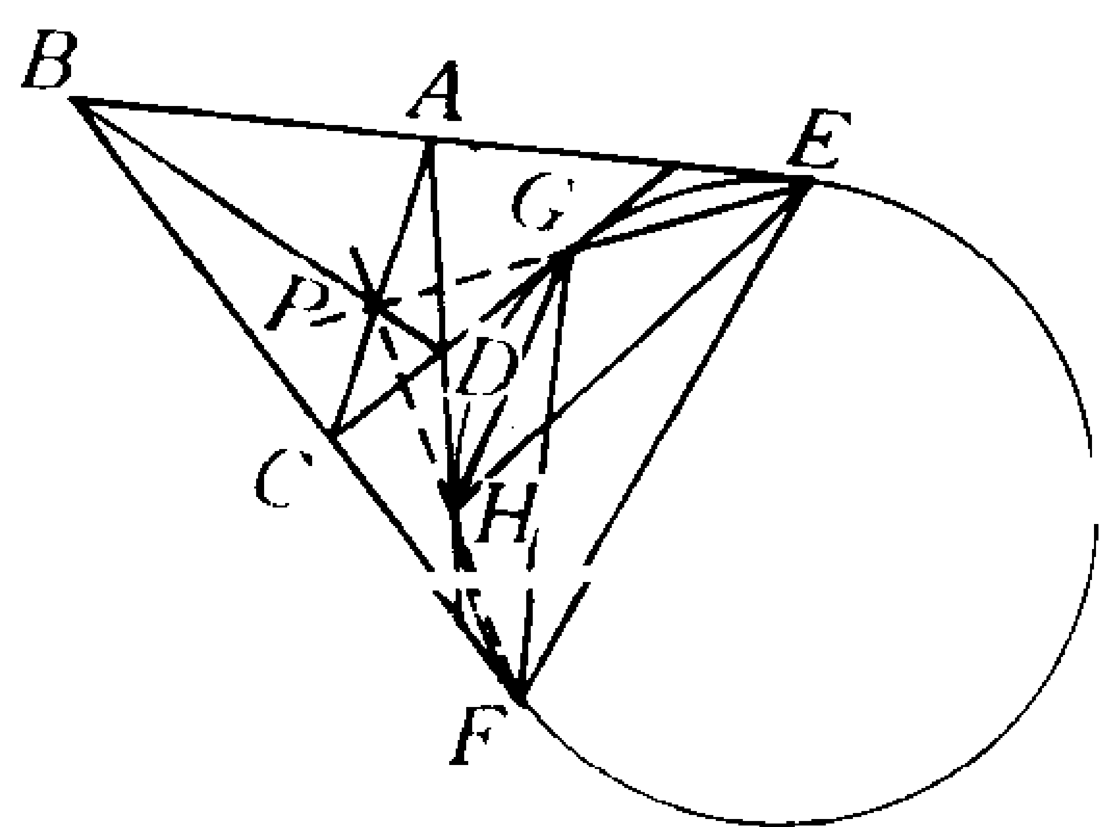


图 47

参考文献

[1] 单墫,《数学竞赛研究教程》,江苏教育出版社,1993 年,P383.

[2] 梁绍鸿,《初等数学复习及研究》(平面几何),人民教育出版社,1958

年,464 — 481.
[3] 吴伟标,蝴蝶定理推广,《上海中学数学》,1991年第1期,20.
[4] 左宗明,《世界数学名题选讲》,上海科学技术出版社,1990年,97 — 108.
[5] 李裕民,蝴蝶定理的推广和演变,《数学通报》,1993年第12期,16 — 20.
[6] 朱履乾,广义蝴蝶定理,《数学通讯》,1994年第4期,14 — 16.
[7] 单墫,程龙,《解析几何的技巧》,中国科学技术大学出版社,1989年,134.
[8] 陈圣德,《平面几何一题多证》,福建人民出版社,1985年,467.

剖分与覆盖的几个问题

中国计量学院数学部　　徐士英

本文讨论剖分和覆盖的一些问题：正方形的锐角三角剖分和钝角三角剖分，平面的正多边形剖分，骨牌覆盖棋盘何时存在不可分解覆盖？求覆盖给定三角形的最小正方形.

（一）　正方形的三角剖分

对正方形的三角剖分，我们证明下面两个结论：

1. 正方形可剖分成 n 个钝角三角形的充要条件是 $n \geqslant 6$.

2. 正方形可剖分成 n 个锐角三角形的充要条件是 $n \geqslant 8$.

先讨论钝角三角剖分，充分性由图 1 及任一钝角三角形总能剖分成两个钝角三角形(图 2) 即知.

为证必要性，我们先对正方形的三角剖分的剖分点进行分类.

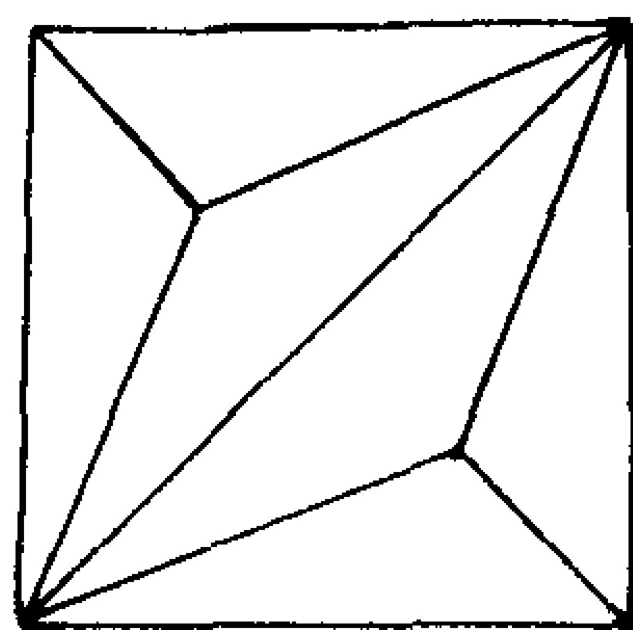


图　1

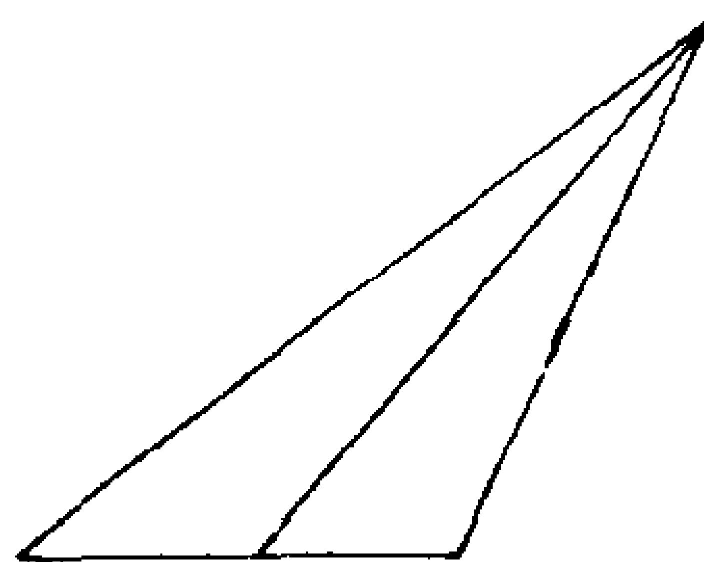


图　2

第一类剖分点：正方形边界上的剖分点或在某一剖分三角形的边上但不是该三角形顶点的内剖分点.

第二类剖分点：不在剖分三角形边上的内剖分点.

图 3 中 F、G 为第一类剖分点，E 为第二类剖分点.

对任给的正方形的钝角三角剖分，它将正方形分成 n 个钝角

三角形，我们证明有 $n \geqslant 6$.

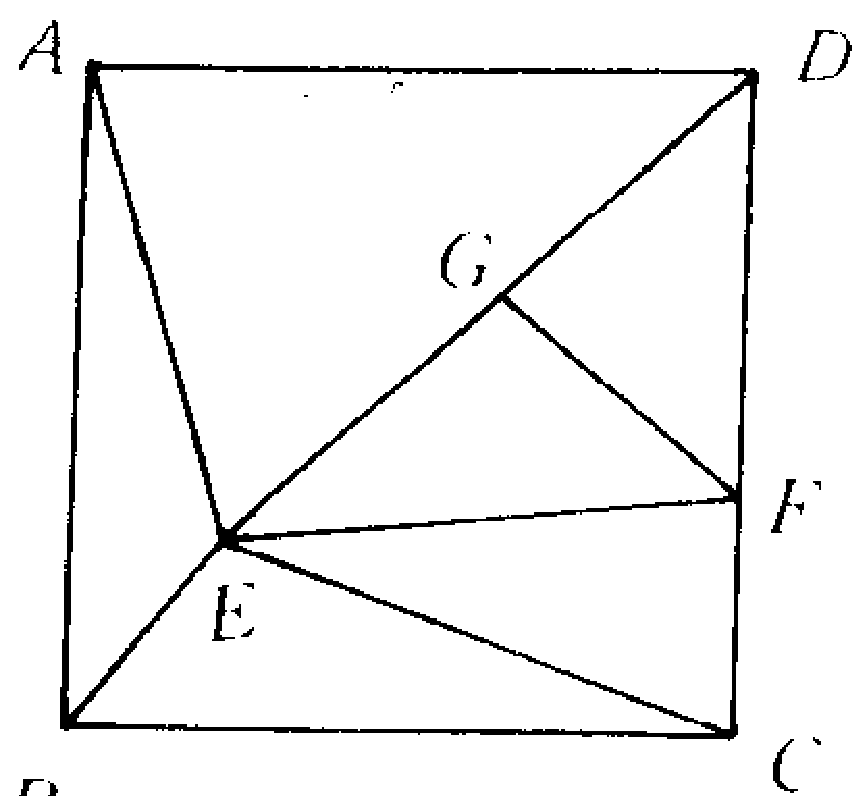


图 3

设此剖分有 r 个第一类剖分点，s 个第二类剖分点，由于第一类剖分点至多提供一个钝角，第二类剖分点至多提供三个钝角，故有 $r+3s \geqslant n$.

计算 n 个钝角三角形的总度数有：

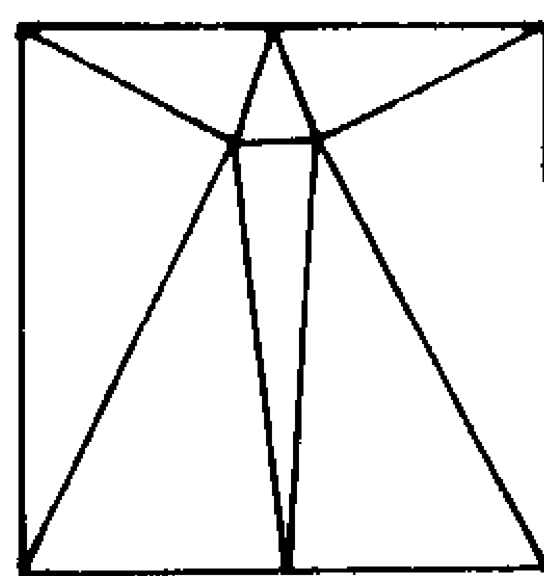
$$n \times 180° = r \times 180° + s \times 360° + 4 \times 90°,$$

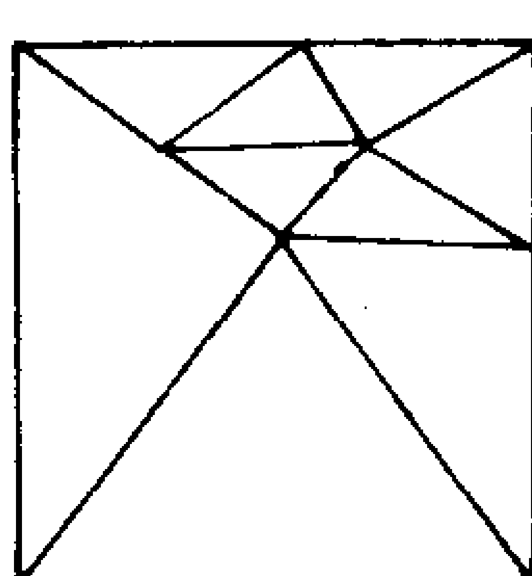
$$n = r + 2s + 2,$$

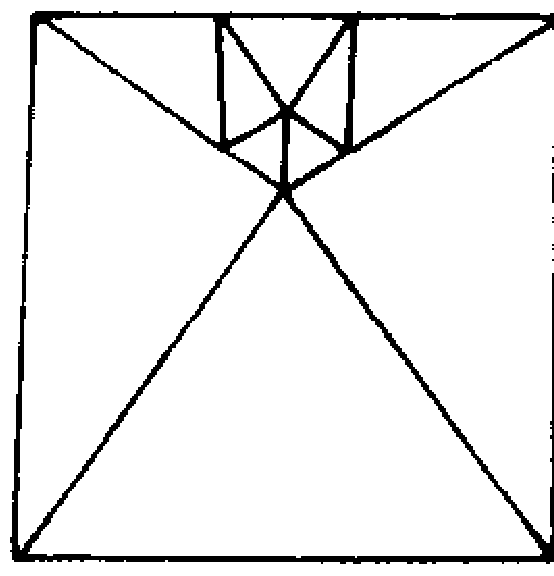
所以 $s \geqslant 2, n \geqslant 2s+2 \geqslant 6$.

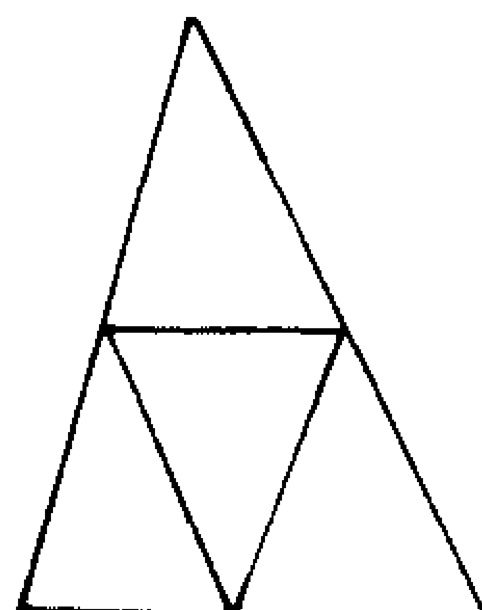
再讨论锐角三角剖分

充分性由图 4、5、6 及任一锐角三角形可以分成四个小锐角三角形(图 7) 即知


图 4


图 5


图 6


图 7

再证必要性：对任给的正方形的锐角三角剖分，它将正方形分成 n 个锐角三角形，设有 r 个第一类剖分点、s 个第二类剖分点. 第一类剖分点至少提供三个锐角，第二类剖分点至少提供五个锐角，正方形的四个直角必须剖分至少提供八个锐角，故有

$$3r + 5s + 8 \leqslant 3n.$$

计算 n 个三角形的总度数，可得

$$n = r + 2s + 2,$$

所以有　$s \geqslant 2$.

即正方形的任何锐角三角剖分至少含有两个第二类剖分点.

每个第二类剖分点至少关联五个锐角三角形，两个第二类剖分点至少关联十个锐角三角形，其中至多有两个锐角三角形同时与两个第二类剖分点关联，所以此剖分至少含锐角三角形 $2\times5-2=8$ 个.

（二） 平面的正多边形剖分

把平面剖分成一种或多种正多边形，假定各剖分点处正多边形的配置是一样的，且不允许正多边形的顶点放在另一正多边形的边上，求所有可能的剖分方案.

1. 若环绕每个剖分点有六个正多边形，易见此时六个正多边形都只能是正三角形，剖分方案为(3,3,3,3,3,3).

2. 若环绕每个剖分点有五个正多边形，由于 $60^\circ\times2+90^\circ\times3>360^\circ$，所以至少有三个正三角形，而 $360^\circ-60^\circ\times3=180^\circ$，余下的两个正多边形只能是两个正方形或一个正三角形和一个正六边形，即有两种剖分方案：

(3,3,3,4,4)、 (3,3,3,3,6).

3. 若环绕每个剖分点有四个正多边形，设此四个正多边形的边数为 n_1、n_2、n_3、n_4，满足 $n_1\leqslant n_2\leqslant n_3\leqslant n_4$.

由于 $\sum\limits_{i=1}^{4}\frac{n_i-2}{n_i}\times180^\circ=360^\circ$，有 $\sum\limits_{i=1}^{4}\frac{1}{n_i}=1$，

因 $\frac{1}{n_1}\geqslant\frac{1}{n_i}$， 故 $\frac{1}{n_1}\geqslant\frac{1}{4}$，$n_1\leqslant4$.

A. $n_1=4$，有 $\frac{1}{n_2}+\frac{1}{n_3}+\frac{1}{n_4}=\frac{3}{4}$，剖分方案为(4,4,4,4).

B. $n_1=3$，有 $\frac{1}{n_2}+\frac{1}{n_3}+\frac{1}{n_4}=\frac{2}{3}$，由 $\frac{1}{n_2}\geqslant\frac{1}{n_3}\geqslant\frac{1}{n_4}$，有 $\frac{1}{n_2}\geqslant\frac{1}{3}\cdot\frac{2}{3}=\frac{2}{9}>\frac{1}{5}$，$n_2\leqslant4$.

(i) $n_2=4$，有$\frac{1}{n_3}+\frac{1}{n_4}=\frac{2}{3}-\frac{1}{4}=\frac{5}{12}$，

$\frac{1}{n_3}\geqslant\frac{1}{2}\cdot\frac{5}{12}>\frac{1}{5}$， $n_3=4$，剖分方案为(3,4,4,6).

(ii) $n_2=3$，有$\frac{1}{n_3}+\frac{1}{n_4}=\frac{1}{3}$，$\frac{1}{n_3}\geqslant\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{3}=\frac{1}{6}$，故$n_3\leqslant 6$.

$n_3=6$，$n_4=6$，剖分方案为(3,3,6,6).

$n_3=5$，n_4 无解.

$n_3=4$，$n_4=12$，剖分方案为(3,3,4,12).

$n_3=3$，n_4 无解.

(3,3,4,12)虽满足不定方程$\sum_{i=1}^{4}\frac{1}{n_i}=1$，但(3,3,4,12)型的剖分方案并不存在.

事实上，若(3,3,4,12)型剖分方案存在，则每个正三角形$\triangle ABC$各顶点处均应配上一个正三角形、一个正方形和一个正十二边形.

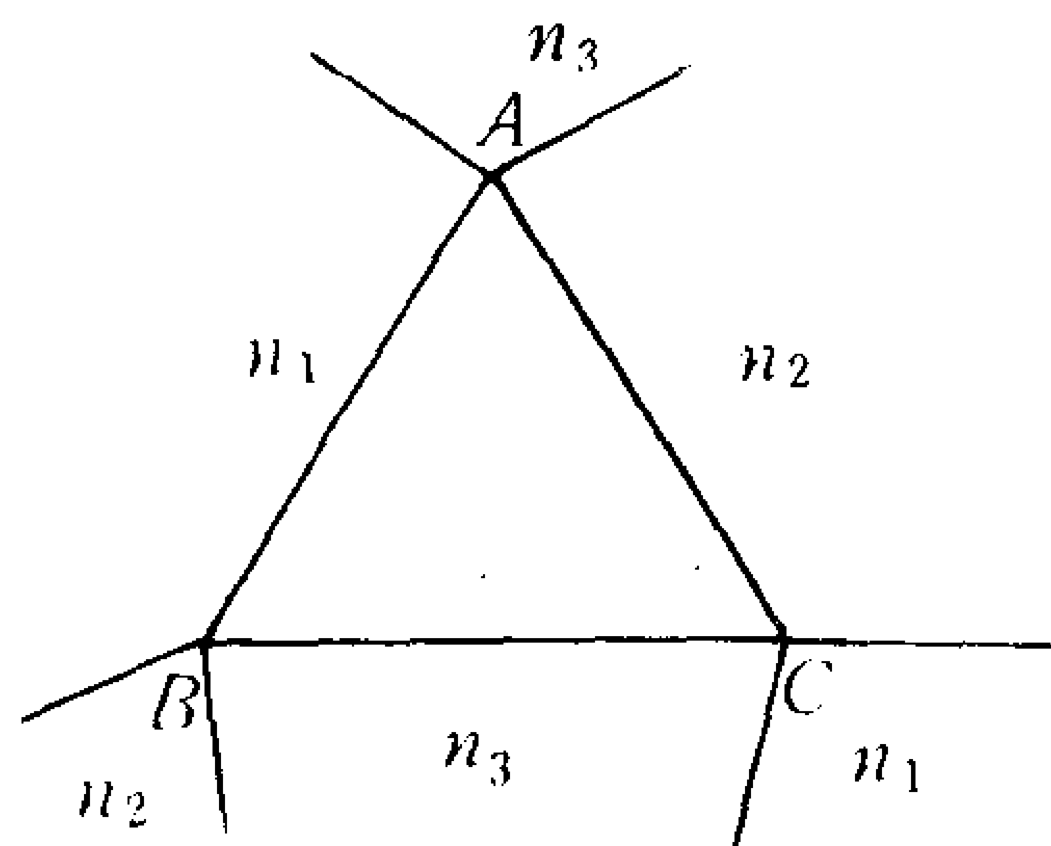


图 8

设与AB相邻的为正n_1边形，AC相邻的为正n_2边形，则$\angle A$相对的必为正n_3边形(其中n_1、n_2、n_3各取3、4、12之一). $\angle B$相对的不能为正n_3边形，不然，BC相邻的只能是正n_2边形，在剖分点C处配置将不同. 所以$\angle B$相对的为正n_2边形，BC相邻的为正n_3边形，$\angle C$相对的为正n_1边形，如图8的配置.

$\triangle ABC$三顶点所对的三个正多边形边数分别取n_1、n_2、n_3，不妨设$\angle A$相对的为正三角形，假设AB相邻的为正方形(AC相邻为正方形时，证明相同)，此时BC边相邻的为正三角形，正方形BD边相邻的为正十二边形，与DE边相邻的为正三角形，与EF、

AF 边相邻的都应是正十二边形，环绕 F 点的正多边形配置不同，所以(3,3,4,12) 型剖分不存在.

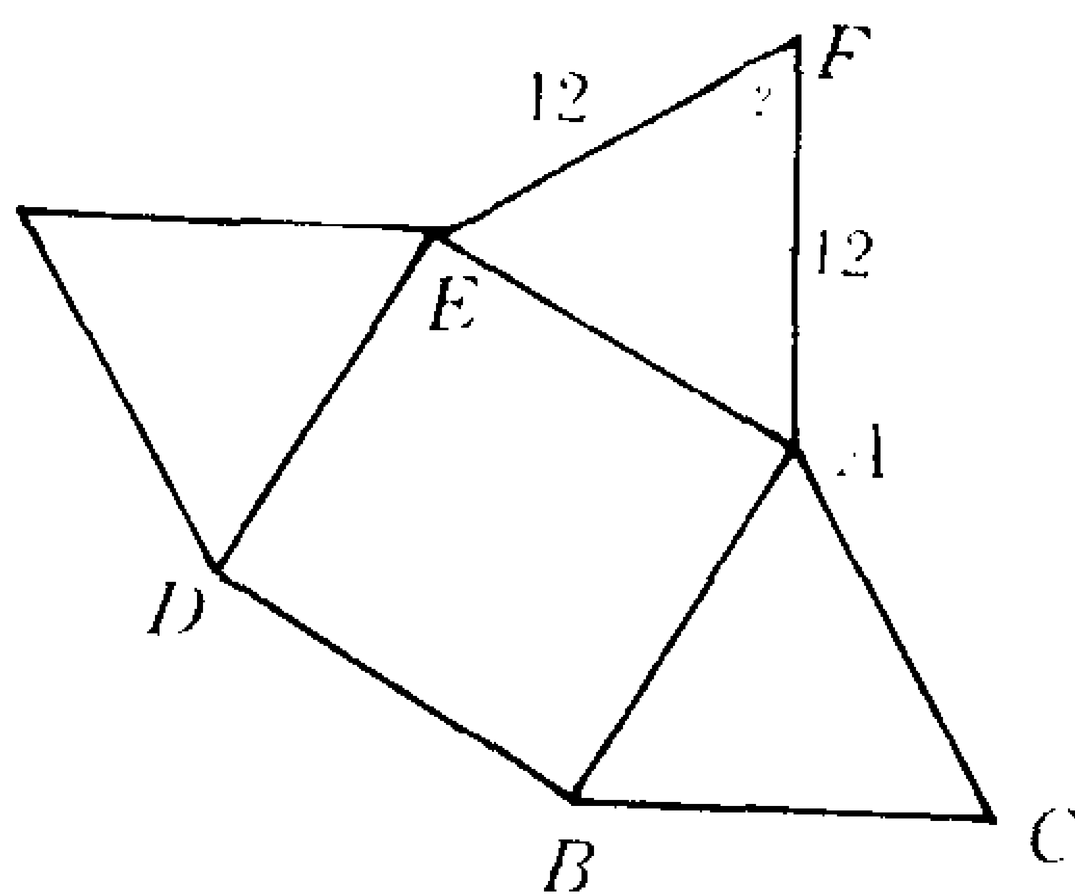


图 9

4. 若环绕每个剖分点有三个正多边形，设边数分别为 n_1、n_2、n_3，满足 $n_1 \leqslant n_2 \leqslant n_3$，

则由 $$\sum_{i=1}^{3} \frac{n_i - 2}{n_i} \times 180° = 360°,$$

有 $$\sum_{i=1}^{3} \frac{1}{n_i} = \frac{1}{2}.$$

$$\frac{1}{n_1} \geqslant \frac{1}{3} \times \frac{1}{2} = \frac{1}{6}, n_1 \leqslant 6.$$

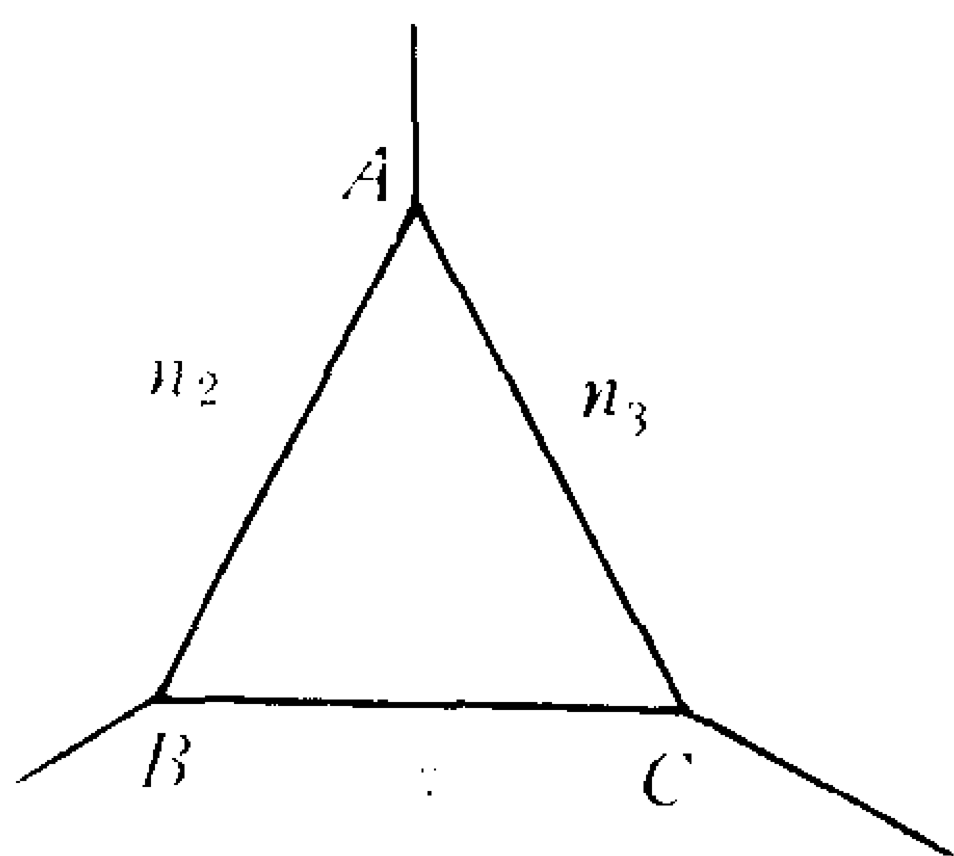


图 10

A. $n_1 = 3$

考虑正 $\triangle ABC$，设与 AB 相邻为正 n_2 边形，与 AC 相邻为正 n_3 边形，若 $n_2 \neq n_3$，与 BC 边相邻的正多边形将无法确定，所以必须 $n_2 = n_3$，此时剖分方案为(3,12,12).

B. $n_1 = 4$

$$\frac{1}{n_2} + \frac{1}{n_3} = \frac{1}{4},$$

$$\frac{1}{n_2} \geqslant \frac{1}{2} \times \frac{1}{4} = \frac{1}{8}, \quad n_2 \leqslant 8.$$

(i) $n_2 = 4$， n_3 无解.

(ii) $n_2 = 5$， $n_3 = 20$，(4,5,20) 满足不定方程 $\frac{1}{n_1} + \frac{1}{n_2} + \frac{1}{n_3} = \frac{1}{2}$，但(4,5,20) 型的剖分方案不存在. 事实上，考虑正五边形 $ABCDE$，不妨设与 AB 相邻为正方形，则与 BC、AE 相邻为正二十边形，与 CD，DE 相邻为正方形，环绕 D 点配置不同(图 11).

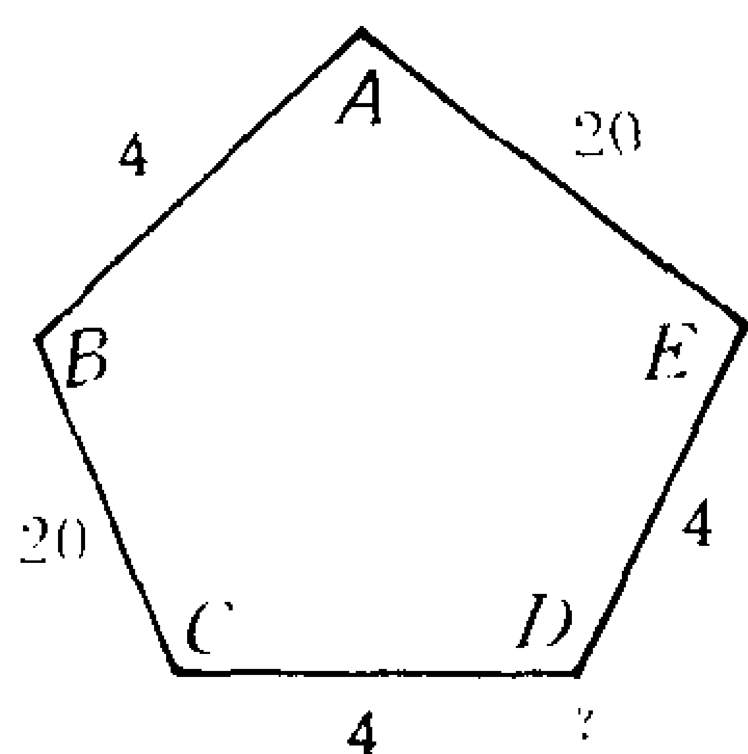


图 11

(iii) $n_2 = 6, n_3 = 12$，剖分方案为(4,6,12).

(iv) $n_2 = 7, n_3$ 无解.

(v) $n_2 = 8, n_3 = 8$，剖分方案为(4,8,8).

C. $n_1 = 5$

$(5, n_2, n_3)$ 型剖分方案要存在，必须 $n_2 = n_3$，须满足 $\frac{2}{n_2} = \frac{1}{2} - \frac{1}{5} = \frac{3}{10}$，无解.

D. $n_1 = 6$

$$\frac{1}{n_2} + \frac{1}{n_3} = \frac{1}{2} - \frac{1}{6} = \frac{1}{3}.$$

剖分方案为(6,6,6).

上述讨论得到的十种可能剖分方案，不难通过画图实现，所以共有十种剖分方案，列表如下

剖分方案 \ 环绕剖分点的正多边形个数 \ 正多边形种数	3	4	5	6
1	(6,6,6)	(4,4,4,4)	/	(3,3,3,3,3,3)
2	(3,12,12) (4,8,8)	(3,3,6,6)	(3,3,3,4,4) (3,3,3,3,6)	/
3	(4,6,12)	(3,4,4,6)	/	/

（三） 棋盘的不可分解覆盖

$2m \times n$ 棋盘，用 2×1 骨牌将其无重复无遗留地覆盖，对此覆盖，若能按水平方向或垂直方向分开棋盘，而不分割骨牌，则称此覆盖可分解；若不存在上述分解，则称此覆盖为不可分解. 我们讨论不可分解覆盖存在的条件，有结论：

1. $2m \times (2n-1)$ 棋盘，存在不可分解覆盖的充要条件是：$\min(m,n) \geqslant 3$.

2. $2m \times 2n$ 棋盘，存在不可分解覆盖的充要条件是：$\min(m,n) \geqslant 3$，$\max(m,n) \geqslant 4$.

证明　充分性：

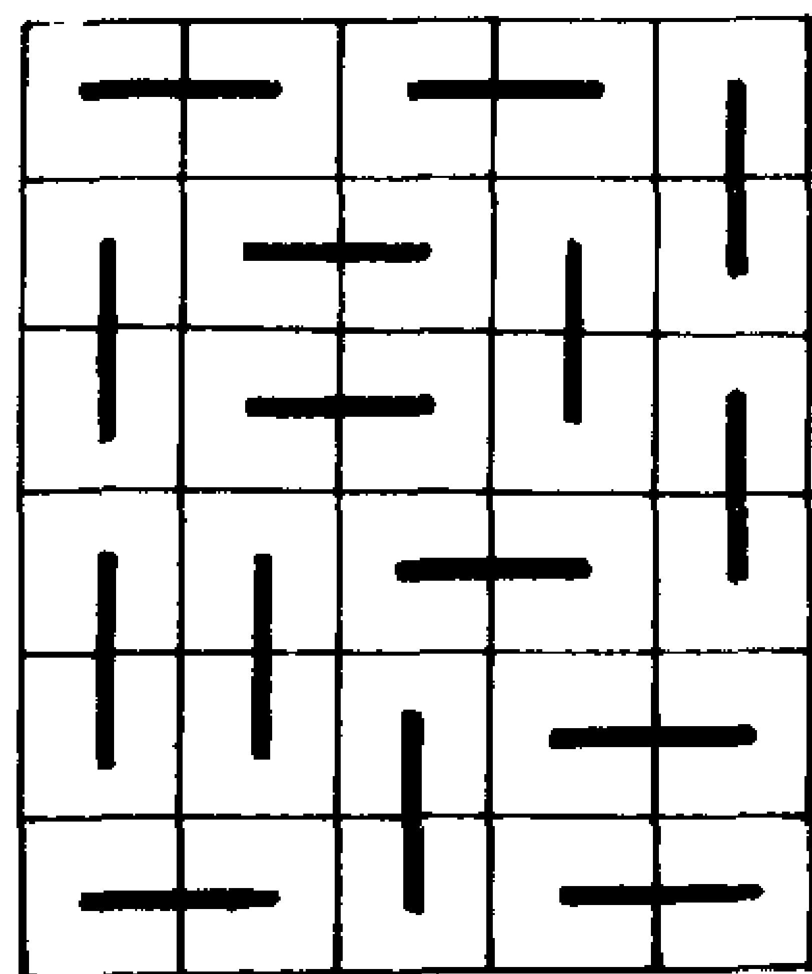


图　12

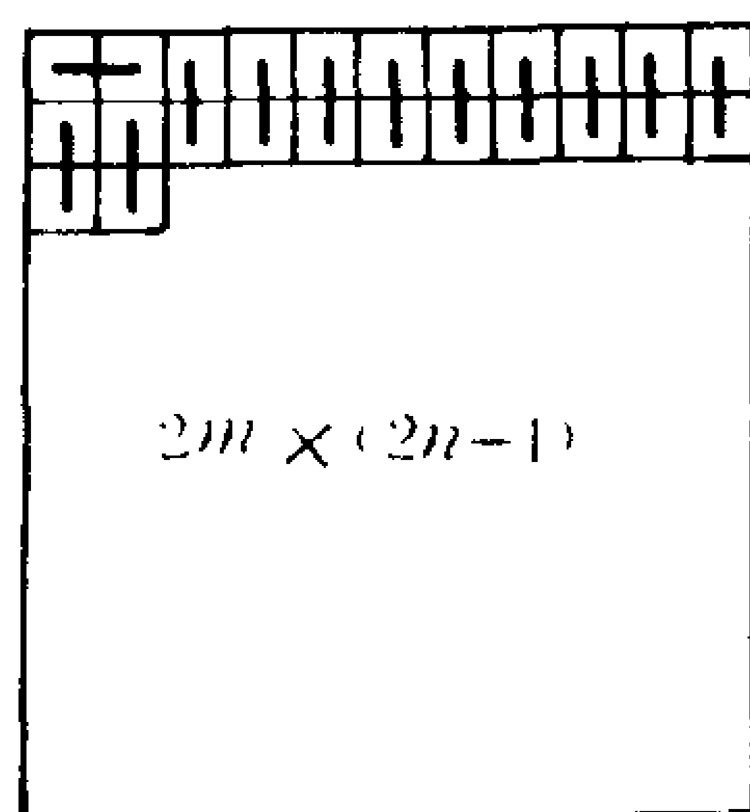


图　13

先讨论 $2m \times (2n-1)$ 棋盘，如图 12，6×5 棋盘存在不可分解覆盖，且此覆盖左上角骨牌横放右上角骨牌竖放，若 $2m \times (2n-1)$ 棋盘存在左上角横放骨牌右上角竖放骨牌的不可分解覆盖，则 $(2m+2) \times (2n-1)$ 棋盘也存在同样类型的不可分解覆盖，构作方法如图 13，对 $(2m+2) \times (2n-1)$ 棋盘下方的 $2m \times (2n-1)$ 棋盘，由假设存在左上角横放骨牌右上角竖放骨牌的不可分解覆盖，对下方的 $2m \times (2n-1)$ 棋盘放上上述不可分解覆盖，并去掉左上角横放的一个骨牌，然后对 $(2m+2) \times (2n-1)$ 棋盘中未覆盖部分如图 13 放上骨牌，易验证此时形成的总覆盖不可分解，且仍保持左上角横放骨牌右上角竖放骨牌.

类似地若 $2m \times (2n-1)$ 有左上角横放骨牌右上角竖放骨牌的不可分解覆盖，则如图 14 可证得 $2m \times (2n+1)$ 棋盘也有同类不可分解覆盖.

对于 $2m \times 2n$ 棋盘，由于 6×8 棋盘存在左上角横放骨牌右

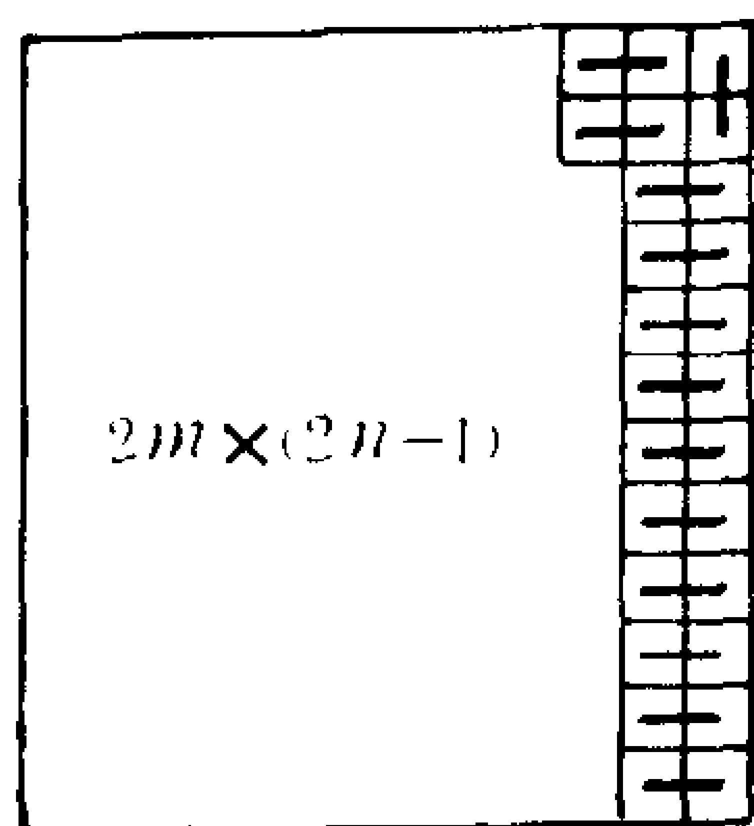


图 14

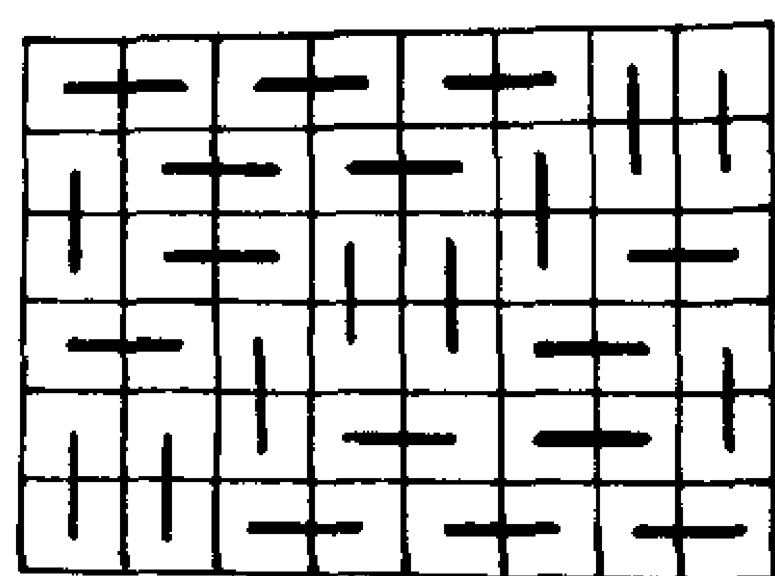


图 15

上角竖放骨牌的不可分解覆盖(图 15),类似地用归纳法即可证得.

必要性:

只须证明 $4\times n$、$2\times n$、$2m\times 3$,$2m\times 1$,6×6 的任何覆盖必可分解,我们只证 $4\times n$ 的情形,其它显然或类似地可证.

1. $4\times(2n-1)$ 棋盘:

若存在不可分解覆盖,则棋盘的任何水平线、垂直线必与此覆盖的骨牌相交. 第一条水平线分 $4\times(2n-1)$ 棋盘为两部分,每部分均含奇数个小方格,所以与第一条水平线相交 的骨牌必为奇数个,第二条水平线分 $4\times(2n-1)$ 棋盘为各含偶数个小方格的两部分,所以与第二条水平线相交的骨牌必为偶数个,同样与第三条水平线相交的骨牌为奇数个;而每条竖直线分 $4\times(2n-1)$ 棋盘为各有偶数个小方格的两部分,故每条竖直线与骨牌相交偶数个. 计算与所有水平线竖直线相交骨牌的总数,它至少有

$$1+2+1+2\times(2n-2)=4n\text{ 个},$$

多于覆盖 $4\times(2n-1)$ 棋盘的骨牌总数 $4n-2$,矛盾.

2. $4\times 2n$ 棋盘:

类似地计算与所有水平线、竖直线相交的骨牌总数,至少有

$$2\times 3+2\times(2n-1)=4n+4,$$

多于覆盖 $4\times 2n$ 棋盘的骨牌总数 $4n$,矛盾.

(四) 覆盖三角形的最小正方形

对给定的 $\triangle ABC$,不妨设 $\angle A\leqslant\angle B\leqslant\angle C$,我们来讨论覆盖

$\triangle ABC$ 的最小正方形.

先讨论正方形是 $\triangle ABC$ 的最小覆盖的必要条件:

1. 如 $\triangle ABC$ 至少有两顶点不在正方形的周界上,则如图 16 将正方形略加缩小仍能覆盖 $\triangle ABC$,所以原正方形不是 $\triangle ABC$ 的最小覆盖.

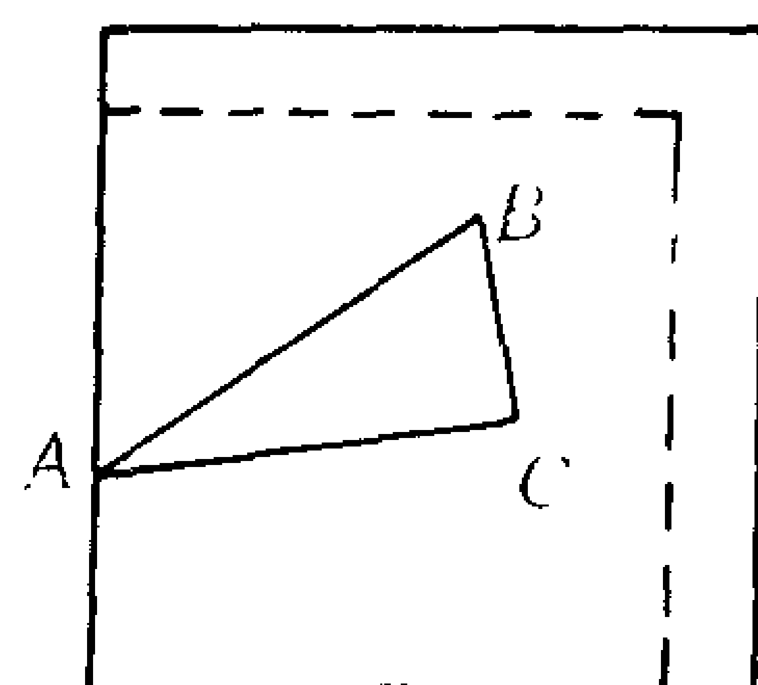


图 16

2. 如 $\triangle ABC$ 有两顶点 A、B 在正方形的周界上,第三顶点 C 不在周界上,且 AB 不是正方形的对角线,此时如图 17 将 $\triangle ABC$ 绕 A 作适当旋转至 $\triangle AB'C'$,使 B', C' 在正方形内,由情况 1,原正方形不是 $\triangle ABC$ 之最小覆盖.

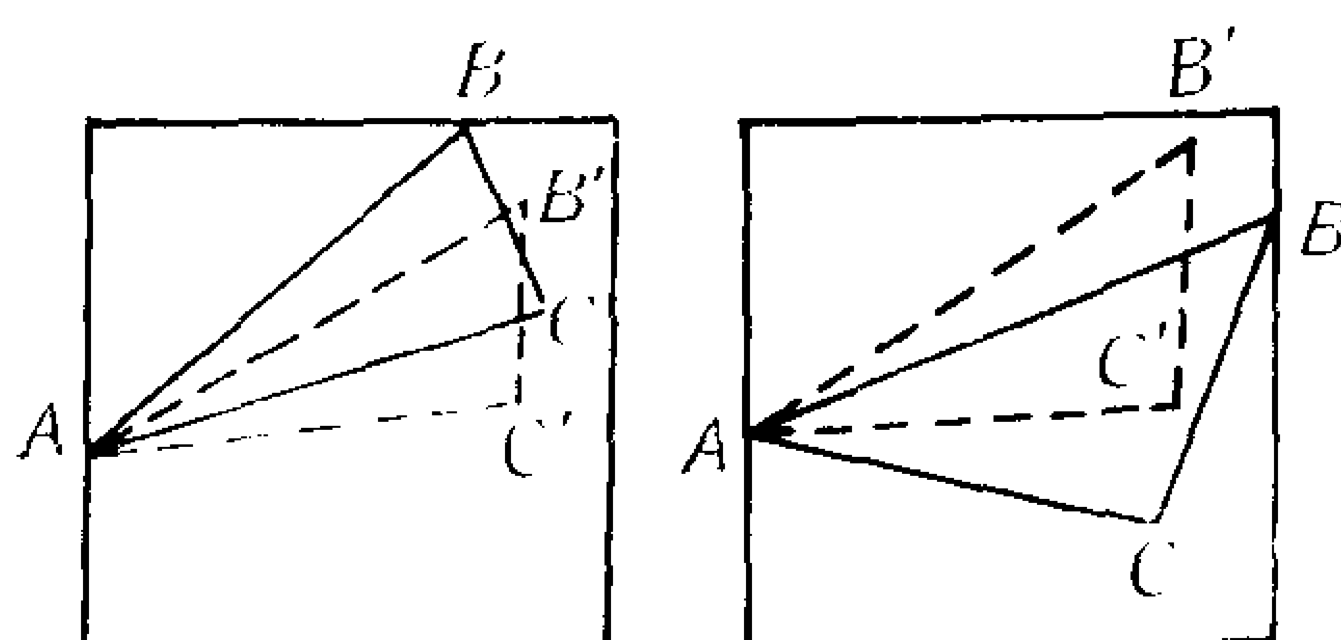


图 17

3. 如果 $\triangle ABC$ 三顶点都在正方形的周界上.

(i) 若 $\triangle ABC$ 的边不在正方形的边上,且三顶点均不是正方形的顶点,如图 18 将 $\triangle ABC$ 略作平移得 $\triangle A'B'C'$,由情况 2 原正方形不是 $\triangle ABC$ 之最小覆盖.

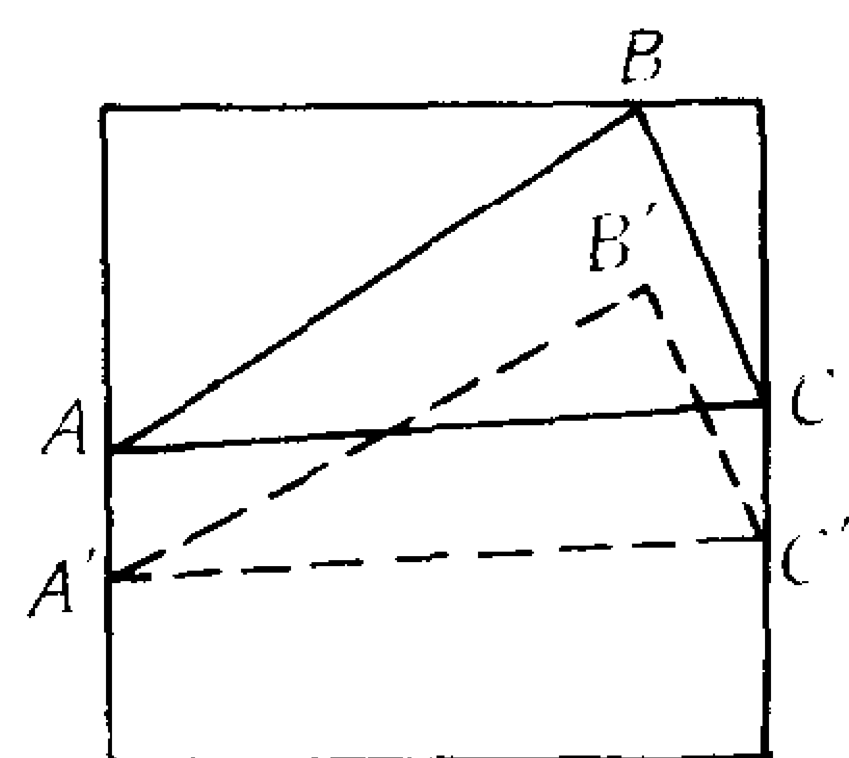


图 18

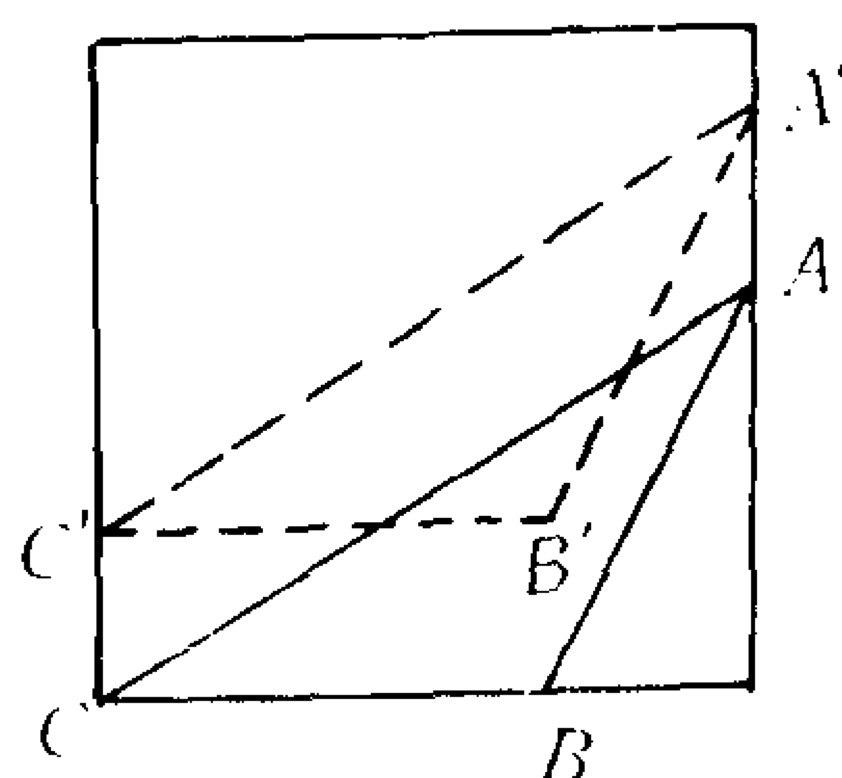


图 19

(ii) 若 $\triangle ABC$ 的一边在正方形的边上,$\triangle ABC$ 的另一顶点在

正方形该边的邻边上，此时如图 19 将 $\triangle ABC$ 略作平移得 $\triangle A'B'C'$，由情况 2 或情况 1 原正方形不是 $\triangle ABC$ 之最小覆盖.

由上讨论可知：若正方形是 $\triangle ABC$ 的最小覆盖，则它与 $\triangle ABC$ 的关系只可能是下列情况：

a. $\triangle ABC$ 的最长边是正方形的对角线，另一顶点落在正方形内.

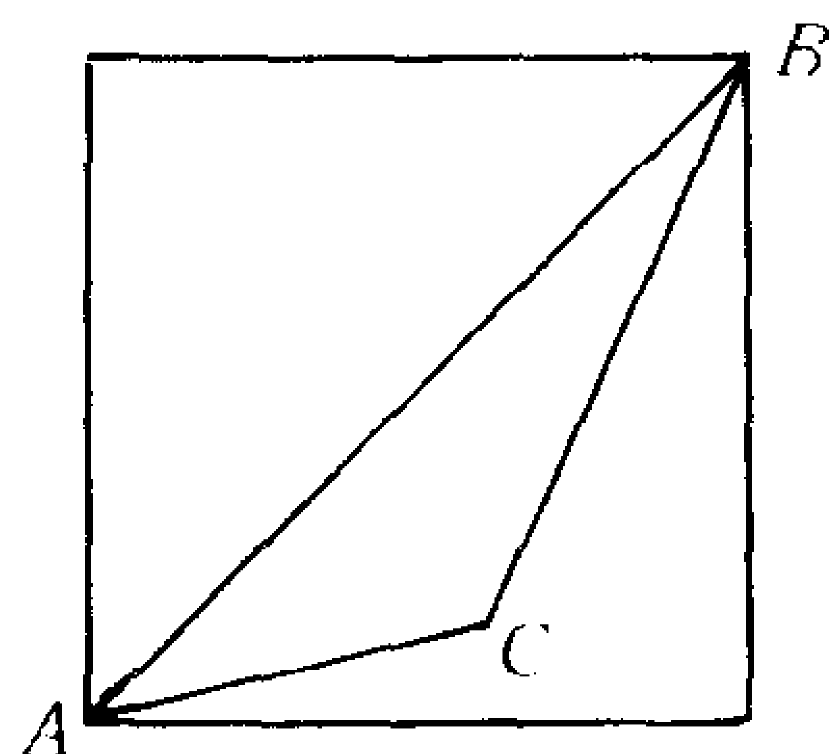


图 20

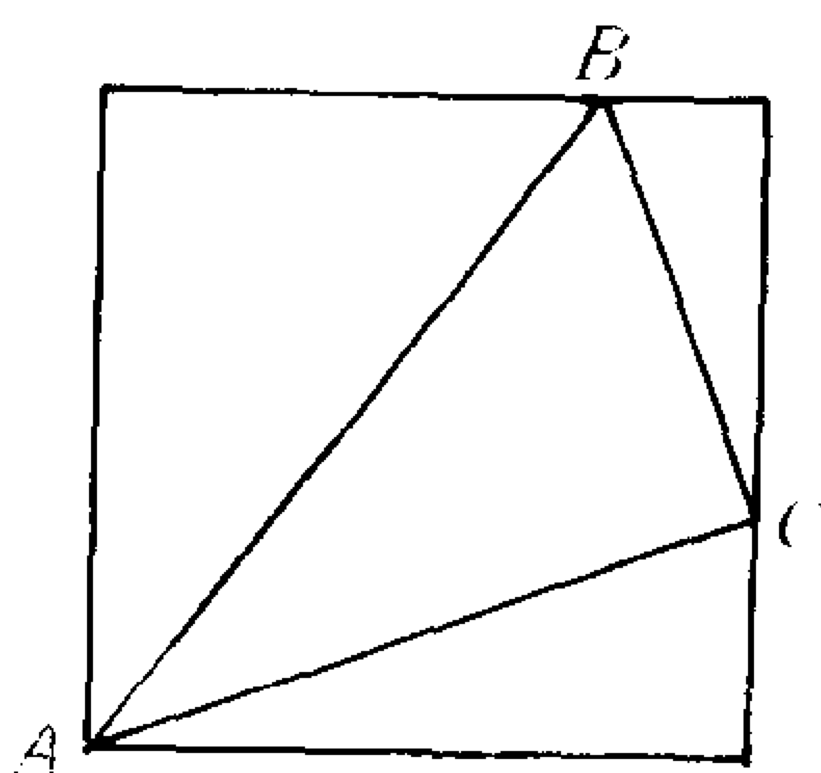


图 21

b. $\triangle ABC$ 的三顶点在正方形的周界上，三角形的边不在正方形的边上，且有顶点与正方形的顶点重合.

c. $\triangle ABC$ 的一边在正方形的边上，另一顶点在正方形该边的对边上.

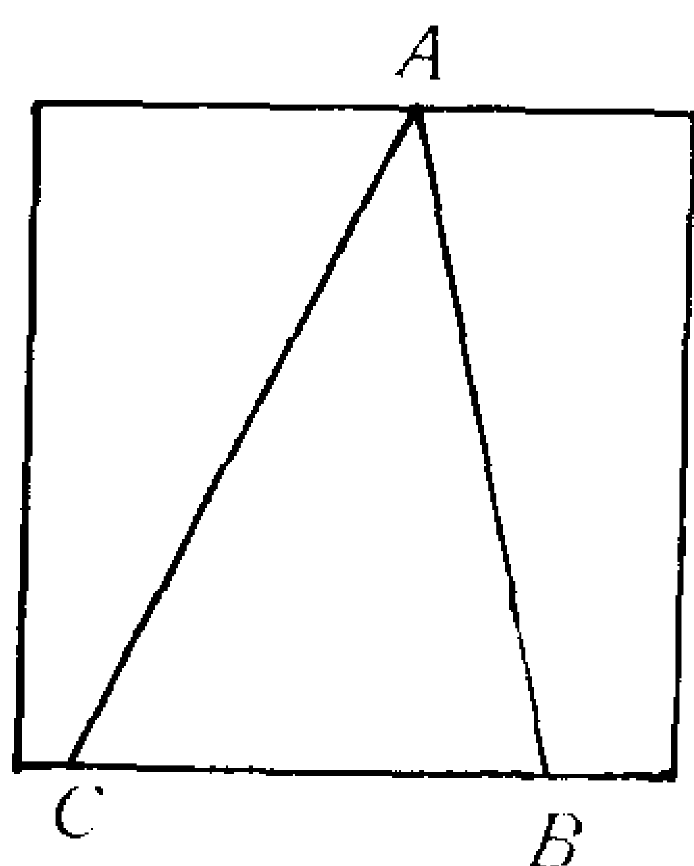


图 22

设 $\angle A \leqslant \angle B \leqslant C$，我们分别情况来计算覆盖 $\triangle ABC$ 的最小正方形的边长.

A. 若 $\angle B \leqslant 45°$，则 $\angle A \leqslant 45°$，$\angle C \geqslant 90°$；以 AB 为对角线之正方形覆盖 $\triangle ABC$，且若另有正方形覆盖 $\triangle ABC$，此正方形的对角线不能小于 AB，所以以 AB 为对角线的正方形是覆盖 $\triangle ABC$ 之最小正方形，其边长为 $\frac{\sqrt{2}}{2}c$.

B. 若 $\angle B > 45°$，$\frac{bc}{2R} \geqslant a$：

由于 $\angle B > 45°$，情况 a 不可能出现.

讨论情况 b 的正方形边长，设 $\angle CAF = \alpha$，则由 $AF = AE$ 有

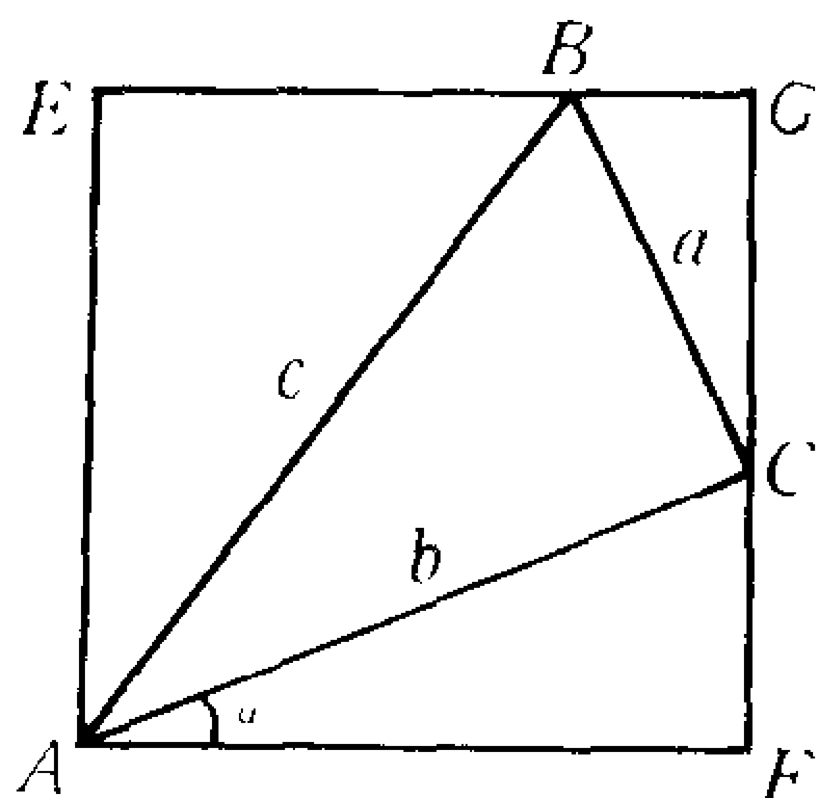


图 23

$$b\cos\alpha = c\sin(A+\alpha) = c(\sin A\cos\alpha + \cos A\sin\alpha)$$

$$\mathrm{tg}\alpha = \frac{b - c\sin A}{c\cos A},$$

$$AF = b\cos\alpha = \frac{b}{\sqrt{1+\mathrm{tg}^2\alpha}} = \frac{bc\cos A}{\sqrt{b^2+c^2-2bc\sin A}}.$$

由图 23 知

$h_b = c\sin A < c\sin(A+\alpha) = AE = AF = b\cos\alpha < b$，同理有 $h_c < c$.

我们指出 $\triangle ABC$ 的顶点 B 或 C 在正方形顶点的情况 b 不可能发生，事实上，若否，则如上讨论应有 $h_a < a$，与 $\frac{bc}{2R} \geqslant a$ 矛盾.

BC 在正方形边上的情况 c 的正方形边长等于 $h_a = \frac{bc}{2R}$.

AC 在正方形边上的情况 c 不可能发生，若否，应有 $h_b \geqslant b$，即 $\frac{ac}{2R} \geqslant b$. 由于 $a \leqslant b, c \leqslant 2R$，要 $h_b \geqslant b$，只能 $a = b, c = 2R$，即 $\triangle ABC$ 为等腰直角三角形，与 $\angle B > 45^\circ$ 矛盾.

同样 AB 在正方形边上的情况，也不可能发生.

所以，此时最小覆盖正方形的边长为：

$$\min\left(\frac{bc\cos A}{\sqrt{b^2+c^2-2bc\sin A}}, \frac{bc}{2R}\right).$$

C. $\angle B > 45^\circ$，　$\frac{bc}{2R} < a$：

此时 B 在正方形顶点处的情况 b 也能发生，事实上有 $\alpha^* \in (0, \frac{\pi}{2} - B)$，使 $BE = BF$，即 $a\sin(B+\alpha^*) = c\cos\alpha^*$.

令 $f(\alpha)=a\sin(B+\alpha)-c\cos\alpha$，由于 $f(0)=a\sin B-c=\frac{ab}{2R}-c=\frac{ab-2R\cdot c}{2R}<0$，

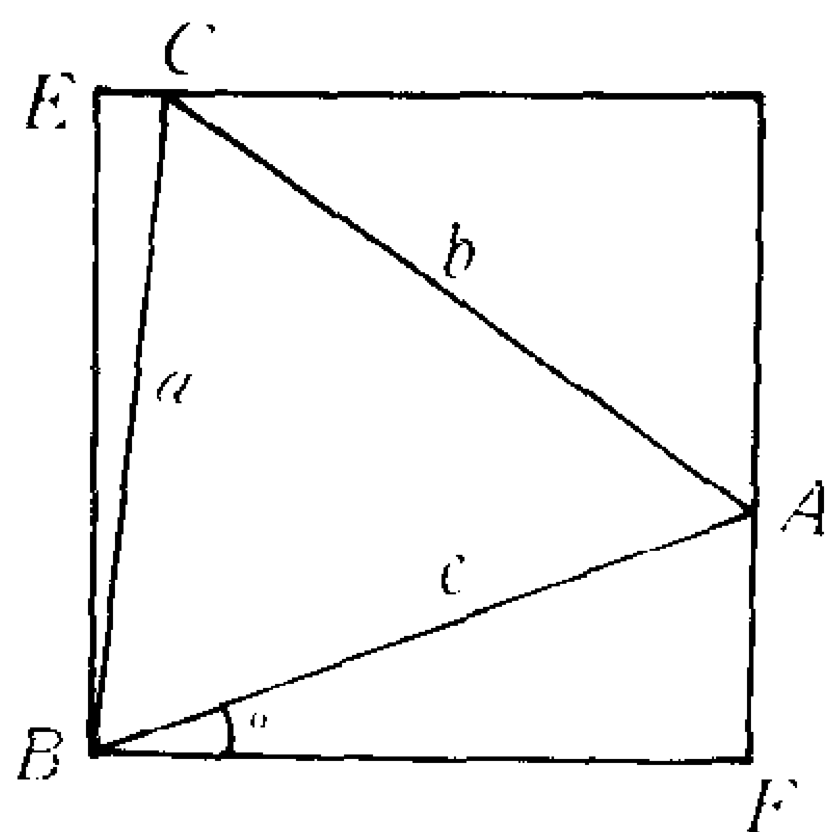


图 24

$f(\frac{\pi}{2}-B)=a-c\sin B=a-\frac{bc}{2R}>0$，所以有 $\alpha^*\in(0,\frac{\pi}{2}-B)$，使 $f(\alpha^*)=0$.

再证此时 $\angle C<90°$.

若否，作 $AD\perp BC$，有 $BD\geqslant BC$，由于 $\angle B>45°$，故 $AD>BD\geqslant BC$，即 $h_a>a$，与 $\frac{bc}{2R}<a$ 矛盾.

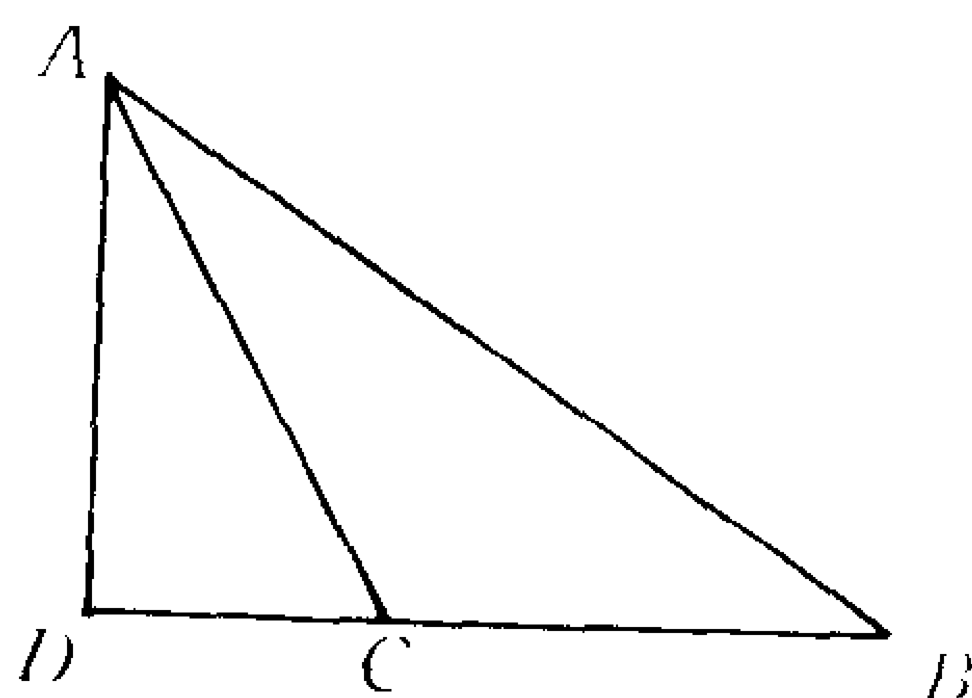


图 25

类似地也可证明 $\triangle ABC$ 的顶点 C 在正方形的顶点处的情况 b 也能发生.

由于 $\frac{bc}{2R}<a$ 更有 $\frac{ac}{2R}<b$、$\frac{ab}{2R}<c$，即 $h_a<a$、$h_b<b$、$h_c<c$，情况 c 均不可能发生.

记 $U=\frac{bc\cos A}{\sqrt{b^2+c^2-2bc\sin A}}$，$V=\frac{ac\cos B}{\sqrt{a^2+c^2-2ac\sin B}}$，

$$W=\frac{ab\cos C}{\sqrt{a^2+b^2-2ab\sin C}},$$

可证明 $U\geqslant V\geqslant W$，所以此时最小覆盖正方形的边长为 $\frac{ab\cos C}{\sqrt{a^2+b^2-2ab\sin C}}$.

综上讨论，对 $\angle A\leqslant\angle B\leqslant\angle C$ 的 $\triangle ABC$，覆盖它的最小正方形的边长为

<table>
<tr><th colspan="2">△ABC 的不同情形</th><th>覆盖 △ABC 之最小正方形的边长</th></tr>
<tr><td colspan="2">$\angle B \leqslant 45°$</td><td>$\frac{\sqrt{2}}{2}C$</td></tr>
<tr><td rowspan="2">$\angle B > 45°$</td><td>$\frac{bc}{2R} \geqslant a$</td><td>$\min\left(\frac{bc\cos A}{\sqrt{b^2 + c^2 - 2bc\sin A}}, \frac{bc}{2R}\right)$</td></tr>
<tr><td>$\frac{bc}{2R} < a$</td><td>$\frac{ab\cos C}{\sqrt{a^2 + b^2 - 2ab\sin C}}$</td></tr>
</table>

翻译报告

关于 R,r 与 s 的不等式

Oene Bottema

(一) 引 言

本文里 R 与 r 分别表示 $\triangle ABC$ 的外接圆与内切圆半径，s 表示三角形的半周长. 从 Euler 时代到现在，已用各种方法发现了一系列关于 R,r 与 s 的不等式，其中最重要的应用是 Blundon[1] 的一篇论文. 文中他对我们通常称为绝对不等式或基本不等式的一个关于 R,r 与 s 的不等式作了研究，发现这个不等式不仅对任意三角形都成立，而且反过来，R,r 与 s 满足这个不等式的三角形必定存在. 换言之，它是三角形存在的必要而充分的条件. 因此，这个关于 R，r 与 s 的基本不等式是我们可以应用的最好条件，它不仅不能被改进，而且就本质而言，其它关于 R,r 与 s 的不等式都是它的推论. 此外，Blundon 还通过把各类相似三角形映射到 Euclid 平面的点集 S 上，给出一种直观的几何解释，他用两个无理函数确定 S 的边界并利用映射证明了不少不等式，特别是那些最强的线性不等式和某些类型的二次不等式.

为完整起见，我们将在(二)中导出基本不等式，在(三)中我们介绍一种略异于 Blundon 的几何映射，并证明了 S 的边界是一条熟知的 Steiner 内摆线(的一部分). 在(四)中我们用几何解释的方法来验证某些熟知的线性不等式. 在(五)中我们处理二次不等式，将着重给出由 Nakajima 得到的一个不等式的证明，并得到另一个更强的不等式. 在(六)中我们处理更高次的不等式，其中包括对由 Bager 猜测的一个四次不等式作出证明.

(二)基本不等式

设 a,b,c 为三角形的三边长，我们令 $u_1=-a+b+c, u_2=a-b+c, u_3=a+b-c$，则三角形存在的充要条件是 $u_i>0$ $(i=1,2,3)$. 事实上，由于 $2a=u_2+u_3, 2b=u_3+u_1, 2c=u_1+u_2$，因而三边显然是正数并且满足三角形不等式.

我们用 R,r 与 s 来表示 u_i 的初等对称函数式，设 F 是三角形的面积，我们有 $F=rs, 4FR=abc, 8F^2=su_1u_2u_3$.

因此

(2.1) $\quad u_1+u_2+u_3=2s,$

(2.2) $\quad u_1u_2u_3=8r^2s.$

并且有

(2.3) $\quad u_2u_3+u_3u_1+u_1u_2=\sum\{a^2-(b-c)^2\}=4\sum bc-4s^2.$

另一方面，由公式

(2.4) $\quad r_a+r_b+r_c-r=4R, rr_a=(s-b)(s-c)$，等等，

这里 r_a,r_b,r_c 是旁切圆的半径，我们得到

(2.5) $\quad r(4R+r)=\sum(s-b)(s-c)=\sum bc-s^2.$

于是由(2.3)与(2.5)得

(2.6) $\quad u_2u_3+u_3u_1+u_1u_2=4r(4R+r).$

因此，以 u_i 为根的三次方程是

(2.7) $\quad u^3-2su^2+4r(4R+r)u-8sr^2=0,$

(2.7)是众所周知的[2].

设 R,r 与 s 是三个(正)数，则三角形存在的充要条件是(2.7)有三个正根. 很明显，从方程各系数的符号可知它没有非正实根. 因此，三角形存在的充要条件是(2.7)有实根.

作代换 $\quad u=2v+\frac{2}{3}s$，方程(2.7)化为

(2.8) $v^3 + pv + q = 0,$

其中

(2.9) $p = \frac{1}{3}(12Rr + 3r^2 - s^2), q = \frac{2}{27}s(18Rr - 9r^2 - s^2).$

方程(2.8)有实根当且仅当

(2.10) $4p^3 + 27q^2 \leqslant 0.$

因而条件化为

(2.11) $(12Rr + 3r^2 - s^2)^3 + s^2(18Rr - 9r^2 - s^2)^2 \leqslant 0.$

消去s^6与Rrs^2项，左边还有因式$27r^2$，这样便得到如下关于R，r与s的基本不等式：

(2.12) $\mathrm{I} \equiv (r^2 + s^2)^2 + 12Rr^3 - 20Rrs^2 + 48R^2r^2 - 4R^2S^2 + 64R^3r \leqslant 0.$

由于 I 是关于s^2的二次函数，其零点可表示为关于R与r的无理式. 这样便可导出由 Blundon 给出的形如$f_1(R,r) \leqslant s^2 \leqslant f_2(R,r)$的不等式.

（三）几何解释

为了研究满足(2.12)的三元数组R，r，s，我们注意到 I 显然是一个齐次多项式，因而只须考虑R，r与s的比值关系即可. 为此，我们引入由下式确定的变量x与y：

(3.1) $Rx = r, Ry = s,$

从而可得

(3.2) $k \equiv (x^2 + y^2)^2 + 12x^3 - 20xy^2 + 48x^2 - 4y^2 + 64x \leqslant 0.$

我们把x，y看作Euclid平面U上的点的Decartes坐标以便给出几何解释. 那么，满足(3.2)的值x，y对应于位于第一象限$x > 0$，$y > 0$且以方程$k = 0$的曲线K为边界的某一区域G上的点. 由这个方程可以得知K的某些简单性质. 它是一条四次曲线. 由于K与

无穷远直线 l 没有实交点(事实上,K 与 l 相切于 U 的迷向点),它必位于平面的某一有限区域内. 进而可知 K 通过原点 O,而由 y 只有偶次幂知它以 OX 轴为对称轴. 通过确定它的可能存在的二重点,或者根据 $k=0$ 实际上是一个关于 y^2 的二次方程,我们可以得知 K 的更多性质.

我们还可以改用另一种方法来研究曲线 K. 当(2.10)式取等号时,方程(2.7)有两个相等的根,因而三角形为等腰三角形. 可见 K 上的点(位于第一象限)是等腰三角形的映象. 在 $\triangle ABC$ 中,如果 $AC = BC = a$ 以及 $\angle BAC = \varphi$,那么

$$AB = c = 2a\cos\varphi, hc = a\sin\varphi, F = a^2\sin\varphi\cos\varphi,$$

$$s = a(1+\cos\varphi), r = a\sin\varphi\cos\varphi/(1+\cos\varphi), R = a/(2\sin\varphi),$$

从而有

$$(3.3)\qquad \begin{aligned} x &= 2\cos\varphi(1-\cos\varphi),\\ y &= 2\sin\varphi(1+\cos\varphi), \end{aligned}$$

这样我们便可以用参变数 φ 来表示曲线 K. 整条曲线对应着$[0\leqslant\varphi<2\pi]$,而我们感兴趣的是$[0<\varphi<\pi/2]$这一部分. 作代换 $\operatorname{tg}\frac{1}{2}\varphi = t$,我们得到

$$(3.4)\qquad x = 4t^2(1-t^2)(1+t^2)^{-2}, y = 8t(1+t^2)^{-2},$$

于是得知:K 是一条四次有理曲线. 这条曲线必有三个二重点. 容易验证满足 $dx/dt = dy/dt = 0$ 的 $t_1 = \frac{1}{3}\sqrt{3}, t_2 = -\frac{1}{3}\sqrt{3}$ 以及 $t_3 = \infty$. 因此,K 有三个尖点:

$$A_1\left(\frac{1}{2}, \frac{3}{2}\sqrt{3}\right), A_2\left(\frac{1}{2}, -\frac{3}{2}\sqrt{3}\right),$$
$$A_3(-4, 0).$$

我们还有 $A_2A_3 = A_3A_1 = A_1A_2 = 3\sqrt{3}$,这表明:上述尖点是等边三角形的三个顶点. 现在已经看出,K 是一条众所周知的曲线:Steiner 内摆线.

K 的图形如图 1 所示. 它经过 O 与 $D(0,2)$. 中心是 $M(-1,0)$,三条尖点处的切线都经过 M 点. 外接圆与内切圆半径分别为 3 与 1. M 满足(3.2),因而 K 的所有内点也都满足(3.2). 对我们的问题来说,只须考虑第一象限内的点. 结论是:坐标 $x>0,y>0$ 满足基本不等式的点的集合是由 K 的弧 A_1O,A_1D 以及直线 OD 所围成的区域 G.

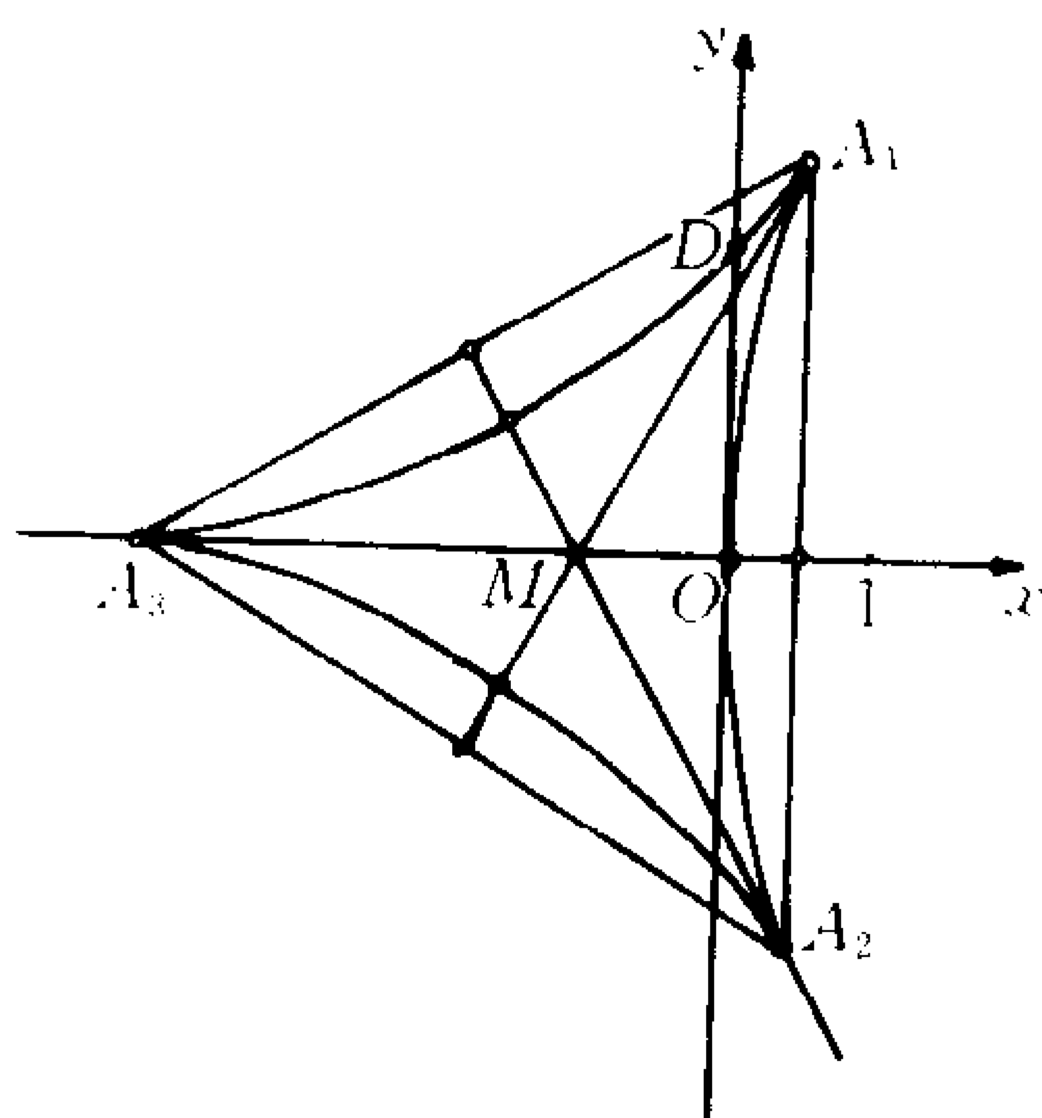


图 1

OD 上的点不属于 G(它们对应着退化三角形),而其它边界点则属于 G. A_1 为等边三角形的映象,对于 OA_1 上的点,我们有 $0<\varphi\leqslant\pi/3$ 或者 $0<t\leqslant\frac{1}{3}\sqrt{3}$,它们与顶角 $\gamma\geqslant\pi/3$ 的等腰三角形相对应, 对于 A_1D 上的点,有 $\pi/3\leqslant\varphi<\pi/2$ 或者 $\frac{1}{3}\sqrt{3}\leqslant t<1$,它们是顶角 $\gamma\leqslant\pi/3$ 的等腰三角形的映象. K 在由直线围成的三角形 OA_1D 内,并且弧 OA_1 与 A_1D 是凸的,这一点很重要.

我们把除去 A_1 的 G 上的所有点(的集合) 用 G' 来表示.

(四) 线性不等式

(2.12) 必然是关于 R,r 与 s 的最强的不等式,等号仅对等腰三角形成立. 所有关于 R,r 与 s 的其它不等式都比它弱,但它们可以是更优美或次数低于 4 的较为简单的不等式. 它们中有许多都已收入最近出版的专著[3](下文记为 GI) 里. 我们注意到关于边 a,b,c 或角 α,β,γ 对称(大多如此) 的不等式常可表为关于 R,r 与 s 的不等式,这是由于关于 a,b,c 的初等对称函数式可表示成

$$a + b + c = 2s,$$
$$bc + ca + ab = s^2 + (4R + r)r, abc = 4Rsr.$$

我们首先来处理一些线性不等式.

直线 $x = \frac{1}{2}$ 通过 A_1 并且 G 上的其它点都在它的左侧. 因而有 $x \leqslant \frac{1}{2}$,即

(4.1) $\qquad r \leqslant \frac{1}{2}R,$

这就是 Euler 不等式(GI,5.1). 另外,$y = \frac{3}{2}\sqrt{3}$ 通过 A_1 并且 G' 在它的下方. 从而有 $y \leqslant \frac{3}{2}\sqrt{3}$,即

(4.2) $\qquad s \leqslant \frac{3}{2}\sqrt{3}R,$

这也是熟知的(GI,5.3). 很明显,任何通过 A_1 而不与三角形 OA_1D 相交(于其它点)的直线都产生一个线性不等式. 作为例子,我们来看 Janic 不等式(GI,5.33):

(4.3) $\qquad s\sqrt{3} \leqslant 5R - r,$

这显然是成立的,因为 G' 在直线 $x + y\sqrt{3} - 5 = 0$ 的下方. 另一例子是由 Gerretsen 等(GI,5.29;7.2) 证明的不等式 $s\sqrt{3} \leqslant (r_a + r_b + r_c)$,它等价于

(4.4) $\qquad s\sqrt{3} \leqslant 4R + r$

(由 (4.1) 知它改进了 (4.2)),这个不等式可以从 G' 在直线 $x - y\sqrt{3} + 4 = 0$ 的下方推出. 用这种几何解释的方法很容易导出最强的线性不等式:它们表示 G' 在直线 OA_1 的上方以及在直线 DA_1 的下方. 从而有 $y \geqslant 3\sqrt{3}x$,即

(4.5) $\qquad s \geqslant 3\sqrt{3}r,$

这是众所周知的(GI,5.11),另外还有 $y \leqslant (3\sqrt{3} - 4)x + 2$,由此可推出 Blundon 不等式(GI,5.4):

(4.6) $s \leqslant 2R + (3\sqrt{3} - 4)r.$

(五)二次不等式

现在我们考虑某些关于R,r与s的二次不等式. 按我们的几何解释,这些不等式表示区域G'位于某一确定的二次曲线的内部或外部. 用R与r来表示s^2的最小值的一般形式是$s^2 \geqslant \lambda_1 r^2 + 2\lambda_2 rR + \lambda_3 R^2$,即$y^2 \geqslant \lambda_1 x^2 + 2\lambda_2 x + \lambda_3$,等号当二次曲线以$OX$为对称轴时成立. 当曲线通过$A_1$与$O$时有$\lambda_3 = 0$以及$4\lambda_2 = 27 - \lambda_1$.

我们考虑函数

(5.1) $f(x,y) = \lambda_1 x^2 - y^2 + \frac{1}{2}(27 - \lambda_1)x.$

如果我们把由(3.4)给出的K的点(的坐标)代入上式,并设$t^2 = z$,那么由于f必定有因子z与$(3z-1)^2$,因而可以得到

(5.2) $f(z) = 2y(1+z)^{-4}(3z-1)^2\{(\lambda_1 - 3)z - (\lambda_1 + 5)\}.$

对于K在第一象限的点,我们有$0 < z < 1$. 由(5.2)推知当且仅当$\lambda_1 + 5 \geqslant 0$时$f(z) \geqslant 0$成立. 这样我们便证得了下面一类不等式:

(5.3) $s^2 \geqslant \lambda_1 r^2 + \frac{1}{2}(27 - \lambda_1)rR, \lambda_1 \geqslant -5.$

其中最强的一个由$\lambda_1 = -5$给出:

(5.4) $s^2 \geqslant (16R - 5r)r.$

它是由Steinig(GI,5.8;5.17)发现并被Blundon认定为最佳的一个不等式. 由$R \geqslant 2r$可知另外的这类不等式都较弱. 当$\lambda_1 = 3$时,有

(5.5) $s^2 \geqslant 3r(4R + r),$

它早在一世纪前就被证明过(GI,5.5;5.6),当$\lambda_1 = 0$时得到的是如下优美的不等式(GI,5.12):

(5.6) $s^2 \geqslant \frac{27}{2}Rr.$

(5.4)、(5.5) 与(5.6) 分别表示 G' 在某一椭圆、双曲线与抛物线的外部. 现在我们试图导出 s^2 的最大值,即形如 $s^2 \leqslant \mu_1 r^2 + 2\mu_2 rR + \mu_3 R^3$ 的式子.

当对应的二次曲线 $y^2 = \mu_1 x^2 + 2\mu_2 x + \mu_3$ 过 A_1 与 D 时,有 $\mu_3 = 4$,及 $\mu_1 + 4\mu_2 = 11$,于是我们来考虑函数

(5.7) $$g(x,y) = \mu_1 x^2 - y^2 + \frac{1}{2}(11 - \mu_1)x + 4.$$

如果把(3.4) 代入,则 $g(z)$ 必出现因子 $1 - z$ 与 $(3z - 1)^2$. 从而可以得到

(5.8) $$g(z) = 2(1 + z)^{-4}(1 - z)(3z - 1)^2 \times \{(1 - \mu_1)z + 2\},$$

据此可知当且仅当 $\mu_1 \leqslant 3$ 时 $g(z) \geqslant 0$ 对 $0 < z < 1$ 成立. 另外,由 $g(x,y) \geqslant 0$ 对 $x = 0, 0 < y < 2$ 成立,我们即可导出下列一类不等式:

(5.9) $$s^2 \leqslant \mu_1 r^2 + \frac{1}{2}(11 - \mu_1)rR + 4R^2,$$

其中 $\mu_1 \leqslant 3$,最强的一个对应于 $\mu_1 = 3$:

(5.10) $$s^2 \leqslant 3r^2 + 4rR + 4R^2,$$

这是为 Steinig(GI,5.8) 所证并被 Blundon(GI,5.9) 证明是此类不等式中最佳的一个.

(关于 $\lambda_1 r^2 + 2\lambda_2 rR + \lambda_3 R^2 \leqslant s^2 \leqslant \mu_1 r^2 + 2\mu_2 rR + \mu_3 R^2$ 的其它最佳式,如 $-9r^2 + 19Rr - \frac{1}{2}R^2 \leqslant s^2 \leqslant 7r^2 + Rr + \frac{9}{2}R^2$,见[5]—— 译者注)

Nakajima(GI,7.3) 不等式可化为

(5.11) $$s^2 \leqslant 4R^2 + \frac{11}{9}\sqrt{3}\, rs,$$

这就是说,对 G 上所有点都有 $h(x,y) \geqslant 0$. 曲线 $h(x,y) = 0$ 是经过 A_1 与 D 的一条双曲线 H,而这个不等式表明:H 的 D 与 A_1 之间的弧位于 K 的同样两点间的弧的上方(H 的另一支位于对称轴

OX 的下方，O 是 H 的中心）. 把(3.4) 代入 $h(x,y)$，我们得到

(5.12) $$h(t)=4(1+t^2)^{-4}\left\{\frac{88}{9}\sqrt{3}\,t^3(1-t)^2-16t^2+(1+t^2)^4\right\}.$$

由于 H 通过 K 的二重点 $A_1\left(t_1=\frac{1}{3}\sqrt{3}\right)$，又过 $D(t=1)$ 及其关于 O 的对称点 $D'(t=-1)$，$h(t)$ 必有因子 $z(1-t^2)$ 与 $\left(t-\frac{1}{3}\sqrt{3}\right)^2$，于是可以得到

(5.13) $$h(t)=4(1+t^2)^{-4}(1-t^2)\left(\frac{1}{3}\sqrt{3}-t\right)^2\times\left(3+6\sqrt{3}\,t-6t^2-\frac{2}{3}\sqrt{3}\,t^3-t^4\right),$$

对此我们要考虑的是 $\frac{1}{3}\sqrt{3}\leqslant t<1$. 因为最后一个因式可写成

$$(1-t^4)+\frac{2}{3}\sqrt{3}\,t(1-t^2)+6t(1-t)+\left(\frac{16}{5}\sqrt{3}-4\right)t+2(1-t),$$

而当 $0<t<1$ 时上式中各项都为正数，则 $h(t)\geqslant0$，从而(5.11)得证，现在我们想用另一条过 A_1 与 D 的双曲线 J（以 O 为中心）来逼近 K 的弧 A_1D，这样来选取 J 看来是可行的，即使它与 K 相切于 D（对于双曲线 H 来说，这不可能）. 其切线是 $y=x+2$. 据此条件我们可得到 J 的方程：

(5.14) $$j(x,y)\equiv(11-6\sqrt{3})x^2+2xy-y^2+4=0,$$

这确实是我们所要的双曲线. 把(3.4) 代入 $j(x,y)$，我们有

(5.15) $$j(t)=4(1+t^2)^{-4}\{4(11-6\sqrt{3})t^4(1-t^2)^2+16t^3(1-t^2)-16t^2+(1+t^2)^4\}.$$

因 J 通过二重点 $A_1\left(t=\frac{1}{3}\sqrt{3}\right)$，又通过 $D(t=1)$ 与 $D'(t=-1)$，$j(t)$ 应有因子 $\left(t-\frac{1}{3}\sqrt{3}\right)^2$，$(1-t)^2$ 与 $(1+t)$，我们可得

(5.16) $$j(t)=12(1+t^2)^{-4}(1-t)^2(1+t)$$

$$\times x\left(t-\frac{1}{3}\sqrt{3}\right)^2\{1+(1+2\sqrt{3})t$$
$$+(-1+2\sqrt{3})t^2+(15-8\sqrt{3})t^3\},$$

从而

$$j(t)\geqslant 0, 0<t<1,$$

等号仅当 $t=\frac{1}{3}\sqrt{3}$ 时成立，这样我们便证得了不等式

(5.17) $$s^2\leqslant 4R^2+2rs+(11-6\sqrt{3})r^2,$$

这看来是一个新的不等式，它比 Nakajima 不等式要强：由(4.5)知(5.11)与(5.17)右边的差 $\frac{1}{9}(11\sqrt{3}-18)r(s-3\sqrt{3}r)\geqslant 0$. J 的弧 A_1D 夹于 K 与 H 的相应弧之间.

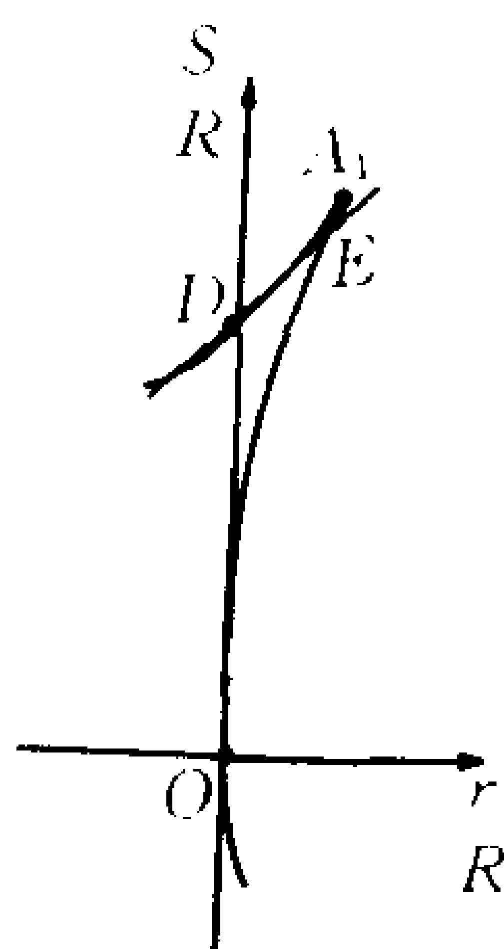


图 2

(六) 高次不等式

同样的方法可以用来处理高次不等式，为此，我们应该在映射平面上确定区域 G 相对于某一高次曲线的位置，我们举两个例子.

在关于三角不等式的一篇论文里，Bager[4] 提出如下猜想：

(6.1) $$\sum\cos\beta\cos\gamma\geqslant\frac{9}{4}\sqrt{3}\prod\cos\alpha.$$

根据

(6.2) $$\sum\cos\beta\cos\gamma=(r^2+s^2-4R^2)/(4R^2),$$
$$\pi\cos\alpha=\{s^2-(2R+r)^2\}/(2rs),$$

它可化为

(6.3) $$rs(r^2+s^2-4R^2)$$
$$-\frac{9}{2}\sqrt{3}R^2\{s^2-(2R+r)^2\}\geqslant 0,$$

或

$$(6.4)\qquad l(x,y)\equiv xy(x^2+y^2-4)+\frac{9}{2}\sqrt{3}(x^2-y^2+4x+4)\geqslant 0,$$

这是一个四次不等式,四次方程 $l=0$ 的曲线 L 经过 D 与 A_1. 进一步的讨论可知,L 在带形 $0\leqslant x\leqslant\frac{1}{2}$ 中的点由三条弧组成,一条是从 D 到 A_1 的弧 b,第二条在 b 的上方(以 OY 为渐近线),第三条在 OX 的下方. 因此我们必须证明 K 的弧 D_1A 在 b 的下方. 把(3.4)代入 $l(x,y)$,我们有

$$(6.5)\qquad l_1=xy(x^2+y^2-4)=2^7(1+t^2)^{-7}t^3(1-t^2)^2(-3t^4+12t^2+1)$$

以及

$$(6.6)\qquad l_2=x^2-y^2+4x+4=4(1+t^2)^{-4}(1-t^2)^3(t^4-6t^2+1).$$

注意到 L 经过 K 的二重点 $A_1(t=\frac{1}{3}\sqrt{3})$,因而通过若干代数运算之后便可以得到

$$(6.7)\qquad l(t)=6(1+t^2)^{-7}(1-t^2)^2(t-\frac{1}{3}\sqrt{3})^2$$
$$\times(3\sqrt{3}t^8+6t^7-6\sqrt{3}t^6-78t^5-92\sqrt{3}t^4+98t^3+54\sqrt{3}t^2+54t+9\sqrt{3}).$$

最后一个因式可写成

$$(6.8)\qquad 3\sqrt{3}t^8+6t^7+6\sqrt{3}(1-t^6)+78t^3(1-t^2)+54\sqrt{3}t^2(1-t^2)+54t(1-t^3)+20t^3(1-t)+2(37-19\sqrt{3})t^4+3\sqrt{3},$$

上式当 $0<t<1$ 时为正. 因而 $l(t)\geqslant 0$ 对 $0\leqslant t\leqslant 1$ 成立,于是猜想(6.1)得证. 这是一个很强的不等式,因为可以证明弧 b 在直线 DA_1 的下面. 尽管 L 在 G' 的外面但它穿过直线构成的三角形 ODA_1.

我们来考虑与(6.1)很相近的另一个不等式. 与(6.2)类似的

有

(6.9) $$\prod \operatorname{tg}\frac{1}{2}\alpha = \frac{r}{s},$$

而作为(5.10)的一个推论，有不等式

(6.10) $$\prod \operatorname{tg}\frac{1}{2}\alpha \geqslant \prod \cos\alpha,$$

这促使我们来比较 $\sum\cos\beta\cos\gamma$ 与 $\frac{9}{4}\sqrt{3}\prod \operatorname{tg}\frac{1}{2}\alpha$ 的大小.

我们将证明 Bager[4] 不等式

(6.11) $$\frac{9}{4}\sqrt{3}\prod \operatorname{tg}\frac{1}{2}\alpha - \sum\cos\beta\cos\gamma \geqslant 0,$$

即三次不等式

(6.12) $$9\sqrt{3}R^2r - s(r^2+s^2-4R^2) \geqslant 0,$$

或者

(6.13) $$m(x,y) \equiv 9\sqrt{3}x - (x^2+y^2-4)y \geqslant 0,$$

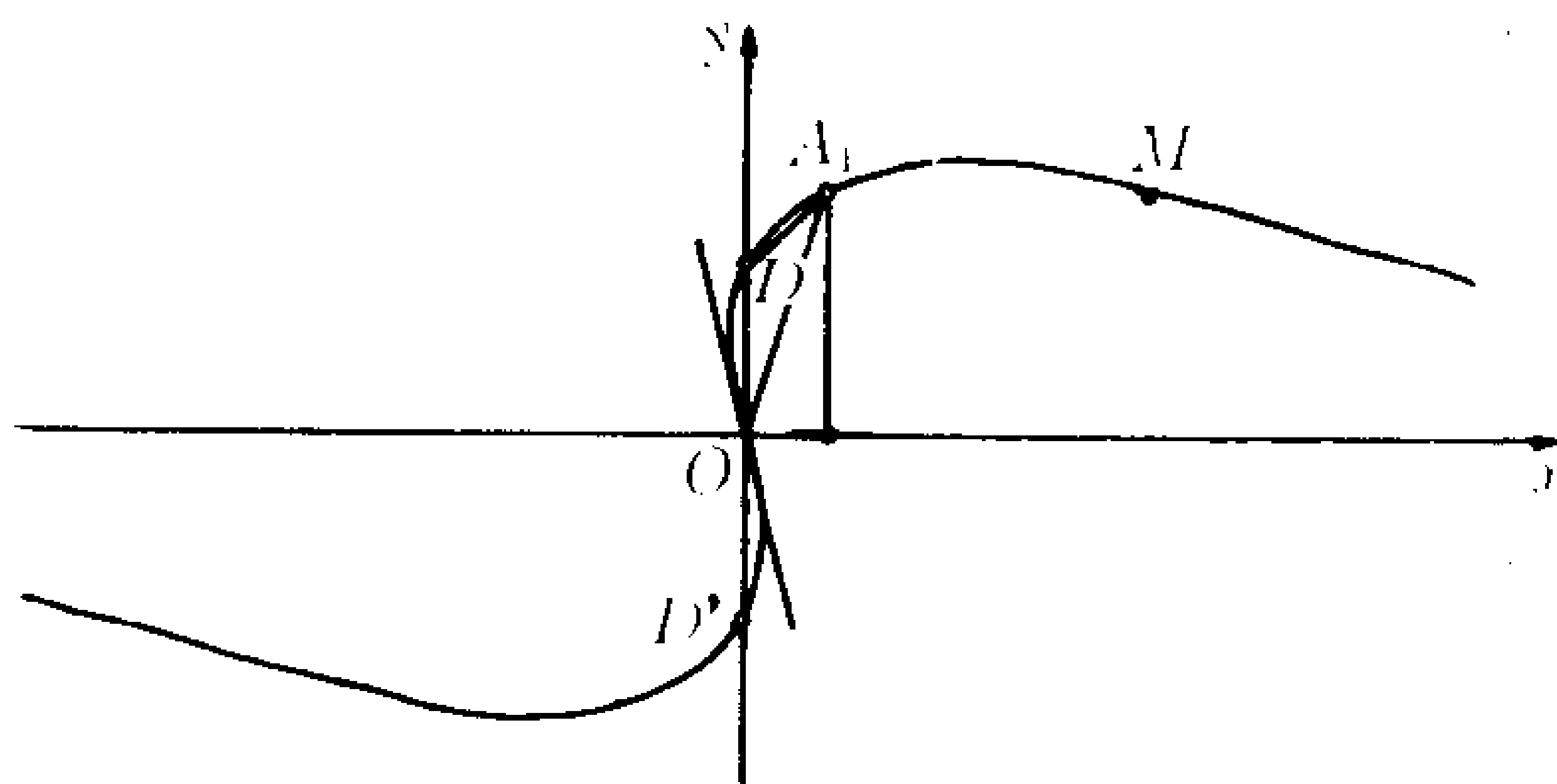


图 3

我们仅用图解法来证明. $m(x,y)=0$ 的曲线关于 O 对称，是一条(环)流形曲线，仅有的一条实渐近线是 OX，当 x 充分大时 y 为正数，M 经过 A_1(A_1 处的切线斜率为正数 $\frac{5}{11}\sqrt{3}$，比 DA_1 的斜率小)，也经过 D(此处切线的斜率为 $\frac{9}{8}\sqrt{3}$，比 DA_1 的斜率大)，还经过 O(为拐点，此处的切线为 $y=-\frac{9}{4}\sqrt{3}x$)以及 D'. M 与 DA_1 的

第三个交点在线段 DA_1 之外. 综合上述各点我们很容易作出 M 的草图(图 3). 区域 G' 在 M 的下方,可见(6.13)成立. 特别值得注意的是 M 通过 G 的三个顶点,等号对等边三角形,也对退化的等腰三角形成立(例如当 $\alpha = 0, \beta = \gamma = \pi/2$ 时取等号,但当 $\alpha = \pi, \beta = \gamma = 0$ 时不取等号 —— 译者注). 另一方面,它并不是一个很强的不等式,因为 M 甚至没有进入直线三角形 ODA_1 中.

(七)注　　记

有些不等式只对锐角(或钝角)三角形成立. 众所周知,当 $s - r - 2R$ 分别为负数,零与正数时,三角形各为锐角,直角或钝角三角形. 在映射平面 U 上,方程 $y - x - 2 = 0$ 表示过 D 以及在 K 的弧 OA_1 上的点 $E(\sqrt{2} - 1, \sqrt{2} + 1)$ 的直线 n,其中 E 对应于

$$t = \sqrt{2} - 1 = \operatorname{tg}\frac{\pi}{8}$$

并且是直角等腰三角形的映象. 直线 n 分区域 G 为两个子区域 G_1 与 G_2,其中 G_1 以 OD,n 与弧 OE 为边界,G_2 以 n,弧 DA_1 与 EA_1 为边界. $G_1(G_2)$ 上的点对应着钝角(锐角)三角形,这一点已被 Blundon 注意到了. 几何映射可以用来证明对锐角(或钝角)三角形成立的不等式(图 2).

译后记　本文原题:Inequalities for R,r and s,译自:Univ. Beograd. Publ. Elektrotehn. Fak. Ser. Mat. Fiz. ,No. 338 — 352(1971),27 — 36. 本文作者 Bottema 是一位杰出的几何学者,他发表了 447 篇论文,出版了 10 本书. 其中最为人熟知的是他与南斯拉夫四位同行 Djordjević,Janić,Mitrinović,Vasić 合著的《几何不等式》(Geometric Inequalities,1969;有单墫的中译本,北京大学出版社,1991 年). Bottema 教授于 1992 年 11 月 30 日逝世,享年 90 岁;他的文著目录收入在 1987 年 11 月《Nieuw Arch. Wisk.》刊登的一篇纪念文章中,有兴趣的读者可查阅.

(陈聪杰　陈计　陈胜利　译)

参考文献

[1] W. J. Blundon, Inequalities associated with the triangle, Canad. Math. Bull., 8(1965), 615 — 626.

[2] A. Laisant, Géométrie du triangle, Paris, 1896, 112.

[3] O. Bottema, R. Z. Dordevic, R. R. Janic, D. S. Mitrinovic, P. M. Vasic, Geometric Inequalities, Groningen, 1969.

[4] A. Bager, A family of goniometric inequalities, Univ. Beograd. Publ. Elektrotehn. Fak. Ser. Mat. Fiz., No. 338 — 352(1971), 5 — 25.

[5] 陈计，从三角形的圆心距谈起，《数学竞赛》，第19辑，湖南教育出版社，1994年，82 — 87.

[6] 朱再宇，陈计，关于锐角三角形的一个不等式，《中国中学数学教师优秀论文集》，第二卷，贵州教育出版社，1995，177 — 178.

未决问题

梁定祥猜想与哥德巴赫猜想

武汉大学数学系　高　宏

(一)数论的五大特点

数论是数学中最古老的一个分支,它的起源,可以追溯到人类文明的起源——记数与平均分配——自然数及其整除性.

数论又是数学中最有趣的一个分支,自然数以及后来的代数整数、超越数的奇妙性质,吸引了许多如痴如迷的爱好者,他们的职业五花八门,但业余爱好都是数论.其中成就最著名的要算法国的费尔马(Fermat)律师,更不要说专门从事数学研究的大师们了,从欧几里德、毕达哥拉斯,到欧拉、高斯、雅可比、勒让德,几乎著名的数学大师们都研究过数论.

数论又是数学中最易于入门的一个分支,因为它专门研究自然数、代数整数等的性质,大学生、中学生,甚至职员、工人农民都能理解数论的某些问题,并尝试着去解决.

数论又是数学中最具有生命力的一个分支.在探求数论问题的解答过程中,迸发出的思想火花往往照亮了其它数学分支的前程.库默(Kummer)在求解费尔马(Fermat)大定理时创造的"理想数(Ideal Number)",其思想移植到代数学中去,成为抽象代数的重要基础之一——理想(Ideal).没有"理想"的概念,抽象代数的结构是很难完善地形成的.这类例子还有不少.

如果说数学各分支的难题之间不便比较谁更难——事实上人

们知道有的数论难题是对人类的智慧挑战——的话，那么可以说数论是数学中难题最多的一个分支. 往往为了解决某个数论难题，因为认识的深化，却又派生出了几个新难题. 从这个意义上讲，能提出新的数论问题也是一个贡献.

（二）一位爱好数论的老农

对数论有了以上初步的共识之后，我们可以进入正题了.

前两年，在中国科学院武汉数学物理研究所等单位工作的武大校友周志平和徐平，给我送来了一包材料. 打开一看，是广西大学数学系麦积华教授的一封信和周、徐等人通过电子计算机验算并打印出的数据结果. 他们二位在校的时候听过我的课，也知道我的兴趣在数论方面，所以把这包材料送给我看，并对我讲了下面这个有关数论问题的真实故事.

海南省的一位农民梁定祥，已经五十出头了，在劳动之余，爱看书，爱思索. 他发现了自然数的一个规律，从 1 开始，把自然数逐一代入验算，还没有发现不适合的，但他无法证明. 于是就向一些知名大学、科研单位发函，说明自己新发现的规律，并请求专家指教如何证明. 广西大学数学系麦积华教授是认真回信的一位. 信中虽然没有为梁定祥指点迷津，但是高度评价梁定祥的新发现，并热情地鼓励梁定祥继续努力. 在 1992 年湖北省暨武汉数学会理事会换届的大会上，我向与会代表介绍了梁定祥的新发现，称之为梁定祥猜想[1]，建议有兴趣的同志共同研究. 散会也确有同志找我谈过，但是我们至今都无法予以证明. 现在我借此机会向大家作一个介绍.

(三)奇妙的梁定祥猜想

梁定祥发现的数论规律,原始命题是这样的:

A:6的任何倍数的平方,恰好是两组孪生素数之和.

例如在数列:6,12,18,24,30,…,$6n$,…中,梁定祥顺次取数作平方再分拆,有:

$6^2=36=18+18=(17+1)+(15+3)=(13+5))+(11+7)$,

这里5,7与11,13是两组孪生素数;

$12^2=144=72+72=(69+3)+(67+5)$

$=(65+7)+(63+9)=(61+11)+(59+13)$,

这里11,13,与59,61是两组孪生素数;

$18^2=324=162+162=(159+3)+(157+5)$

$=(155+7)+(153+9)=(151+11)+(149+13)$,

这里11,13与149,151是两组孪生素数;

$24^2=576=288+288=(285+3)+(283+5)$

$=(281+7)+(279+9)=(277+11)+(275+13)=\cdots$

$=(271+17)+(269+19)$,

这里17,19与269,271是两组孪生素数;

$30^2=900=450+450=(447+3)+(445+5)=(543+7)$

$+(451+9)=\cdots=(349+101)+(347+103)$,

这里101,103与347,349是两组孪生素数;

……

梁定祥用笔算一直验算了这个数列中的前一百多项,没有发现例外的.

梁定祥的信函寄到中国科学院武汉数学物理研究所之后,引起周志平等人的注意,他们编好程序利用个人计算机演算,花了很多时间,验算了这个数列中的前六百多项,也没有发现例外的现

象.——当然,这不是证明,但是令人倾向于接受这个猜想.

更为有趣的是,周志平与徐平分别编程序上机验算,程序的细节不完全相同.以 12^2 为例:

$12^2=144=72+72$,

其中一位是从 36 的附近开始分拆:

$12^2=(35+37)+(33+39)=(31+41)+(29+43)$,

这里 29,31 与 41,43 是两组孪生素数,另一位是从 72 的附近开始分拆:

$$
\begin{aligned}
12^2 &=(69+3)+(67+5)=(65+7)+(63+9)\\
&=(61+11)+(59+13),
\end{aligned}
$$

这里 59,61 与 11,13 是两组孪生素数.

这说明:$12^2=(31+41)+(29+43)=(61+11)+(59+13)$ 分拆为两组孪生素数之和的方法不唯一.

这并不是唯有的例子,还有:

$$
\begin{aligned}
18^2 &=162+162=(151+11)+(149+13)\\
&=(103+59)+(101+61)
\end{aligned}
$$

有两种方式分拆为两组孪生素数之和;

$$
\begin{aligned}
24^2 &=288+288=(281+7)+(283+5)\\
&=(271+17)+(269+19)=(229+107)+(179+109)\\
&=(181+107)+(179+109)
\end{aligned}
$$

有四种方式分拆为两组孪生素数之和;

$$
\begin{aligned}
30^2 &=450+450=(17+433)+(19+431)\\
&=(29+421)+(31+419))=(101+349)+(103+347)\\
&=(139+311)+(137+313)=(179+271)+(181+269)
\end{aligned}
$$

有五种方式分拆为两组孪生素数之和;

……

我们猜想:分拆方式的数目随着被分拆数的增大而增加.

梁定祥猜想还可以改述为等价命题 A′:

自然数 n 的平方的 36 倍，即 $36n^2$，至少可用一种方式分拆为两组孪生素数之和.

(四)梁定祥猜想与哥德巴赫猜想

继续上面改述命题的话题，梁定祥猜想不能改述为下列命题 B：自然数 n 的平方的 18 倍，即 $18n^2$，至少可用一种方式分拆为两个素数之和.

这是因为命题 B 这种叙述方式与命题 A 不同：首先放宽了结论的要求，不再要求是两组孪生素数之和，仅仅要求是两个素数之和. 以命题 A′与命题 B 作比较，当 $n=2$ 时，适合命题 A′即命题 A 和只有两种分拆方式、四组孪生素数之和：

$$36\times 2^2=144=72+72=(31+41)+(29+43)$$
$$=(61+11)+(59+13),$$

而适合命题 B 的不止是上述四组孪生素数包含的四对素数之和：

$$18\times 2^2=72=31+41=29+43=61+11=59+13,$$

还有，

$$18\times 2^2=72=67+5=19+53=\cdots$$

两对，共六对. 事实上，

$$72+72=(67+5)+(65+7)=(19+53)+(17+55)$$

均不适合命题 A′，即命题 A.

其次，命题 B 的结论与哥德巴赫猜想一样，被分拆数可被分拆两个素数之和；但是命题 B 条件却比哥德巴赫猜想的条件强多了，命题 B 要求被分拆数是形如 $18n^2$ 的特殊偶数，而哥德巴赫猜想只要求被分拆数是充分大的普通偶数即可. 所以命题 B 是在哥德巴赫猜想的基础上大大倒退，因而价值不大. 然而命题 A′或者命题 A 是在哥德巴赫猜想的适用范围内，进一步挑选特殊的形如

$36n^2$ 的偶数，并指出它们具有更加特殊得多的性质：都至少能用一种方式分拆为两组孪生素数之和. 命题 A′或者命题 A 并不与哥德巴赫猜想等价. 命题 A 与哥德巴赫猜想都讨论偶数的素数分拆问题，然而命题 A 即梁定祥猜想的外延真包含于哥德巴赫猜想的外延，所以梁定祥猜想的内含比哥德巴赫猜想的内含丰富华丽得多.

（五）梁定祥猜想的内蕴

正为人们倾向于承认哥德巴赫猜想一样，我们也倾向于承认梁定祥猜想. 这不是出于类似宗教的蒙昧，而是基于大量数据的验证——我们知道这不是证明，但是这雄辩地影响了我们的倾向性.

基于倾向于承认梁定祥猜想的立场，我愿意进一步指出梁定祥猜想丰富的内蕴和潜在的理论价值与实用价值.

在数论中差为 2 的素数对，称为孪生素数对. 如：

3，5；5，7；11，13；17，19；29，13；…；101，103；…；10^9+7；10^9+9；…

孪生素数对是否有无穷多？这个问题在数论中是个难题，至今未解决.

进而问：孪生素数对分布在哪里？ 更无门径.

而梁定祥猜想若能证明成立，那么不仅回答了孪生素数对有无穷多，而且回答了它们的分布问题：它们分布在形如 $a_n=36n^2$ 的整数所含有的分拆数对之中. 这是多么简洁而明确的回答！

除了理论上和价值之外，在实际应用方面也是有潜在价值的. 有些实际应用的问题的解决，最终归结为寻找大素数. 例如《参考消息》1994 年 5 月 2 日第七版上，以“六百多人用一千六百台计算机攻关八个月破译世界最长最难密码”为题发表了路透社纽约 4 月 26 日电，电文称：“五大洲的 600 多人用 1600 台计算机工作 8

个月才取得了这项成果.破译这个名为 RSA129 的密码是一件十分艰难的工作.这个密码是 17 年前由 3 位数学家和计算机科学家想出的.破译这个密码对于世界各地使用长数码保护储存在秘密商业及政府安全系统中的电子数据有着深远的意义.这 3 位科学家之一的罗纳法·里韦斯特说,人们曾数百次企图找出相乘产生 RSA129 密码的两个素数,这一难题的破解将编码人员今后在编密码时必须使用长得多的素数."但是找大素数谈何容易!

国内外目前寻找大素数均采用所谓"素数的概率检验法",把大概、也许、差不多是素数的数当作素数使用.这是很靠不住的、危险的.最近我已研究出准确地直接判定大素数的两种方法.其中一种方法可以由小素数直接生成大素数;另一种方法可对选出的样数判定它是不是素数,其计算量远小于著名的威尔逊(Wilson)定理.

我的方法是这样的:奇数 p 是素数的充分必要条件是:
$[((p-1)/2)!]^2 \equiv (-1)^{(p+1)/2} \pmod p$.证明略去.

那么到哪里去找样数来作素数检验呢?途径之一,可以沿梁定祥猜想在 $36n^2$ 的偶数的分拆数对中去寻找.当然,要辅助以其它数论知识来搜寻.

数论发展到今天,已积累了许多重大的应用,她不再是高踞人群之上的"女皇",而是俯首甘为孺子牛的女仆.梁定祥猜想的价值之一是它在实际应用方面的潜在价值,可能造诣于人类.

感谢《初等数学前沿》为我提供了介绍梁定祥猜想的机会,以上看法是抛砖引玉,如有不妥,敬请专家、学者及其它有识之士指正.若能引起大家对梁定祥猜想的关注,甚至有人去积极研究证明梁定祥猜想,那么我的这篇小文章目的便达到了.

参 考 文 献

[1] 梁定祥,征解问题93*,《数学通讯》,1992年第6期,41.

[2] 杨之,《初等数学研究的问题与课题》,湖南教育出版社,1993年,333.

平面组合几何问题三则

中国科技大学数学系　**李炯生**

组合几何主要研究空间中有限点集的集族所具有的共同特征.它是组合数学与几何学联姻的一门学科.国际上有一支以著名数学家 Erdös 为首的优秀数学家队伍长期致力于组合几何的研究,五十年代初前苏联数学家 Yaglom 和 Boltyanskiĭ 的著作《凸图形》(Convex Figures)以及 60 年代初德国数学家 Hadwiger 等著作《平面组合几何》(Combinatorial Geometry in the Plane)系统总结了组合几何的理论与方法.自从这两本名著问世以来,组合几何研究已有长足的发展.在我国,也有相当数量的数学家与数学工作者介入了这一领域,取得了可喜的进展.90 年代初,河北师范大学数学系丁仁教授组织举办了中德首届组合几何学术会议,对促进我国组合几何研究作出了贡献.这里仅给出一组平面组合几何问题,供有志于组合几何的同行们研究和参考.

(一) Erdös—Moser 数 EM(n)

设 S 是平面上 n 个点的集合.如果 S 是一个凸 n 边形的顶点集合,则称 S 是凸的.对于给定的 n 点凸集合 S,$f(S)$表示点集 S 中距离为 1 的点对的个数.记

$$\mathrm{EM}(n)=\max\{f(S);S\text{ 为 }n\text{ 点凸集合}\}.$$

数 FM(n)称为 Erdös—Moser 数.

问题 1　求 Erdös—Moser 数 FM(n).

数 EM(n)的存在性是明显的. 其原因是,对于边长为 1 的正 n 边形的顶点集合 S,有 $f(S)=n$. 因此如果记 $T=\{f(S):S$ 为 n 点凸集合$\}$,则 $n\in T$,即非负整数集合 T 是非空的. 又对任意一个 n 点凸集合 S,S 至多有 C_n^2 个点对,每对点间的距离为 1,因此 T 是一个非空的有限的非负整数集合. 所以 T 中必有一个最大正整数,它就是数 EM(n). 中国科技大学数学系 89 级学生沈建红应用图论方法确定了最初几个 Erdös－Moser 数 EM(n)的值:EM(3)＝3,EM(4)＝5,EM(5)＝6,EM(6)＝8 和 EM(7)＝10. 下面以 EM(5)＝6 为例来说明沈建红的方法.

定理 1　EM(5)＝6.

证明　考虑图 1 所示的 5 点凸集合 $S=\{v_1,v_2,v_3,v_4,v_5\}$,其中$\triangle v_1v_2v_5$ 是边长为 1 的正三角形,而 $v_5v_2v_3v_4$ 是边长为 1 的正方形. 易见 $f(S)=6$. 因此 EM(5)$\geqslant$6.

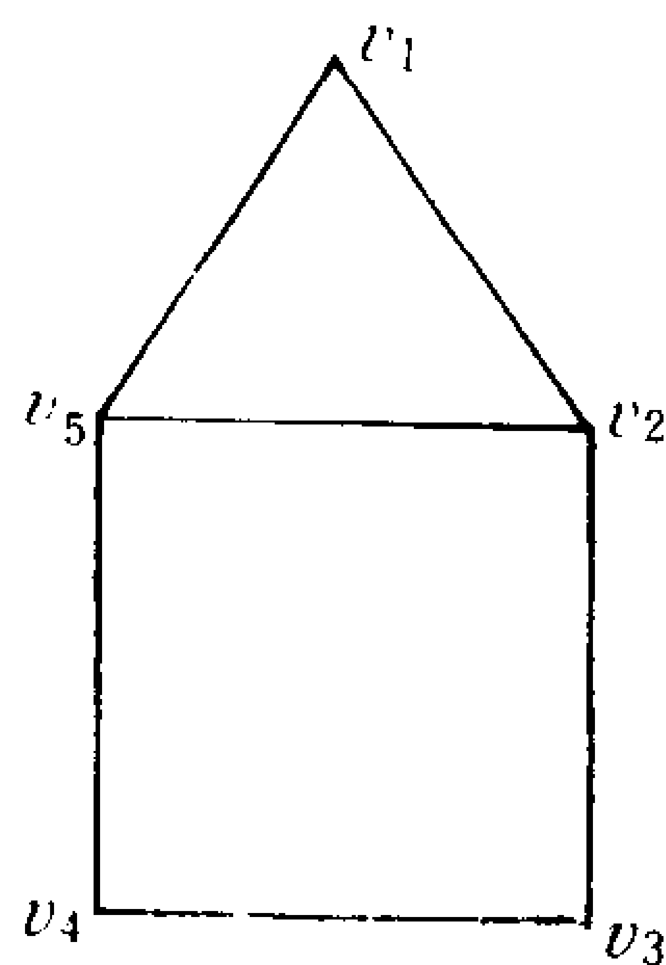


图　1

现在设 EM(5)$\geqslant$7,且 $S=\{v_1,v_2,v_3,v_4,v_5\}$是一个 5 点凸集合,使得 $f(S)=$EM(5). 将 S 看成 5 阶图 G 的顶点集合,而且对 $v_i,v_j\in S$,当距离 v_iv_j 为 1 时顶点 v_i 与 v_j 相邻. 则图 G 的边数为 $f(S)=$EM(5)$\geqslant$7. 由图的度边定理得到,

$$d(v_1)+d(v_2)+\cdots+d(v_5)=2f(S)\geqslant 14, \tag{1}$$

其中 $d(v_i)$是图 G 中顶点 v_i 的度,$i=1,2,\cdots,5$. 设 $d(v_1)$是诸$d(v_i)$中最大者. 由式(1)得到,$d(v_1)\geqslant 3$. 另一方面,G 是 5 阶图,因此 $d(v_1)\leqslant 4$. 下面分 $d(v_1)=4$ 和 $d(v_1)=3$ 两种情形讨论.

情形 1:$d(v_1)=4$. 此时图 G 中顶点 v_1 和其他所有顶点都相邻. 换句话说,集合 S 中点 v_1到其他各点的距离都是 1. 因此点 v_2,v_3,v_4 和 v_5 都在以点 v_1 为圆心的单位圆周上(图 2). 设 $S_1=\{v_2,v_3,v_4,v_5\}$,在图 G 中顶点集合 S_1 的导出子图记作 G_1. 由于图 G 中

含有 $f(S)$ 条边，而且 $d(v_1)=4$，因此图 G_1 含有 $f(S)-4$ 条边. 由于 $f(S)\geqslant 7$，所以图 G_1 至少含有 3 条边. 设 $d_{G_1}(v_i)$ 为顶点 v_i 在图 G_1 中的度，$i=2,3,4,5$. 对图 G_1 应用度边定理得到，

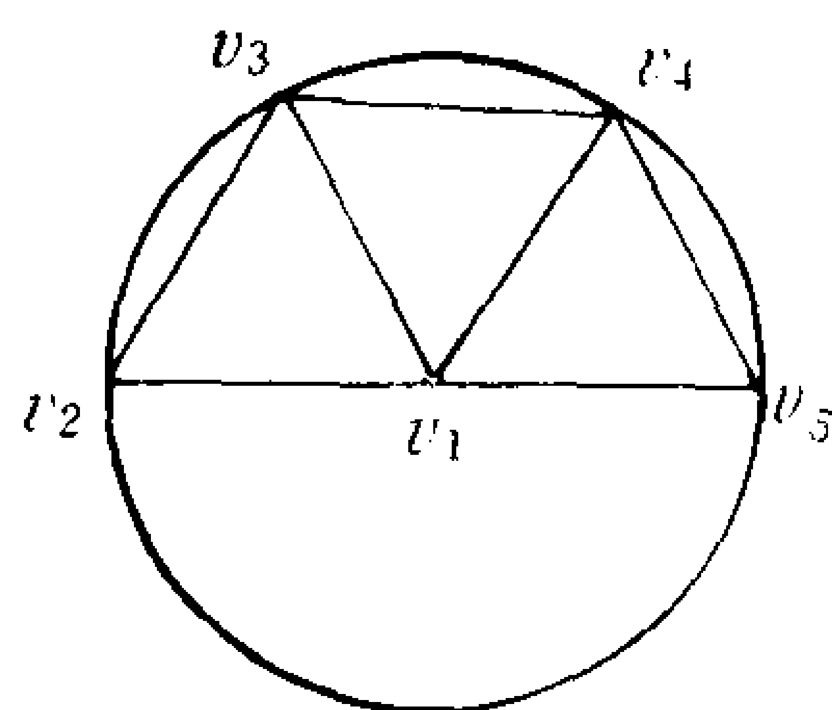


图 2

$$d_{G_1}(v_2)+d_{G_1}(v_3)+d_{G_1}(v_4)+d_{G_1}(v_5)\geqslant 6. \qquad (2)$$

因此必有某个 i，使得 $d_{G_1}(v_i)\geqslant 2$，其中 $2\leqslant i\leqslant 5$. 不妨设 $d_{G_1}(v_3)\geqslant 2$，且设点 v_3 与 v_2,v_4 相邻. 即设点 v_3 到 v_2，v_4 的距离都是 1. 于是 $\triangle v_1v_2v_3$ 和 $\triangle v_1v_3v_4$ 是正三角形. 易见点 v_2 和 v_4 不相邻. 由于图 G_1 至少含有 3 条边，所以点 v_5 与 v_2,v_4 有一个相邻. 设点 v_5 和 v_4 相邻，则 $\triangle v_1v_4v_5$ 是正三角形. 这表明，v_1,v_2，v_3 三点共线，即 S 不是凸的，矛盾. 因此情形 1 不可能.

情形 2：$d(v_1)=3$. 和情形 1 类似可以证明，情形 2 也不可能. 读者无妨自证之.

于是 $\mathrm{EM}(5)\leqslant 6$. 从而 $\mathrm{EM}(5)=6$. □

最早提出问题 1 的是 Erdös 和 Moser[1]，他们于 1959 年给出了数 $\mathrm{EM}(n)$ 的下界：$\mathrm{EM}(n)\geqslant\left[\frac{5(n-1)}{3}\right]$，其中 $[x]$ 是不超过实数 x 的最大整数. 1987 年，Füredi 给出了上界：$\mathrm{EM}(n)\leqslant cn\ln n$，这里常数 $c\leqslant 12$. 1991 年 Edelsbrunner 和 Hajnal[2] 将 Erdös 和 Moser 的下界改进为 $\mathrm{EM}(n)\geqslant 2n-7$. 这些结论离问题 1 的解决还有相当距离. 看来问题 1 的解决有相当的难度. 欢迎同行们进一步研究.

（二）Erdös－Szekeres 数 ES(k)

对于给定的正整数 k，$k\geqslant 3$，用 $\mathrm{ES}(k)$ 表明这样的最小正整

数，使得当 $n \geqslant ES(k)$ 时平面上任意给定的无三点共线的 n 点集 S，总含有 k 点凸子集. 数 $ES(k)$ 称为 Erdös－Szekeres 数.

问题 2 求 Erdös－Szekeres 数 $ES(k)$.

不难看出，$ES(3)=4$. 最早考虑问题 1 的是 1935 年匈牙利的女大学生 Ester Klein. 她证明了 $ES(4)=5$（见 Erdös 和 Szekeres [3]）. 这一结论受到人们广泛欣赏，经常出现在有关数学竞赛的辅导读物中（例如见常庚哲和李炯生主编的竞赛教程[4]中杜锡录教授所写的文章）. 对于 $k \geqslant 5$，Ester Klein 无法给出问题 2 的解答，遂请教她的同学 G. Szekeres. 后来 Klein 和 Szekeres 结为伉俪，而 Szekeres 也成为著名数学家. 一题结姻缘，无疑是数学界的一段颇具浪漫色彩的佳话. 1935 年 Erdös 和 Szekeres 在文[3]中首先引述了 Klein 关于 $ES(4)=5$ 的结论，并给出了 Klein 的证明. 然后指出，E. Makai 已经证明 $ES(5)=9$. 他们同时还证明了下面的.

定理 2 $2^{k-2}+1 \leqslant ES(k) \leqslant \binom{2k-4}{k-2}+2.$

Erdös 和 Szekeres 的这一结论肯定了数 $ES(k)$ 的存在性，并给出它的界. 由于 $ES(3)=3=2^1+1$，$ES(4)=5=2^2+1$，$ES(5)=9=2^3+1$，所以 Erdös 和 Szekeres 提出下面的

猜想 $ES(k)=2^{k-2}+1$.

Erdös 和 Szekeres 的文章[3]引起了组合数学界的广泛注意，因为他们所讨论的问题 2 与组合数学中 Ramsey 理论有着密切联系. 著名数学家 Rota 推崇它是本世纪组合数学的一篇经典性论文，并收入其主编的名著[5]中，成为学习组合数学的必读论文之一.

时光流逝，转眼已过了六十年. 除 Erdös 和 Szekeres 的文章[3]所得到的结论外，问题 2 迄今未见任何进展，这无疑是对人类智慧的挑战.

(三) Heilbronn 数

设 K 是平面上任意给定的面积为 1 的凸图形，S 是 K 内任意给定的 n 点集合. S 中任意三点构成的三角形之面积的最大值记作 $\Delta(S)$. 设

$g(K)=\max\{\Delta(S):S$ 为 K 中 n 点集合$\}$，且

$H_n=\max\{g(K):K$ 为单位面积的凸图形$\}$. 数 H_n 称为 Heilbronn 数.

问题 3 求 Heilbronn 数 H_n.

据 Roth[6]报导，Heilbronn 曾经猜想，数 H_n 存在，而且存在常数 c，使得 $H_n \leqslant c \cdot \frac{1}{n^2}$. 80 年代初，Komlós，Pintz 和 Szemeréli[7,8]证明了下面的结论.

定理 3 存在常数 c_1 和 c_2，使得

$$c_1 \frac{\ln n}{n^2} \leqslant H_n \leqslant \frac{1}{n^{8/7}} \exp(c_2\sqrt{\ln n})\text{，其中 } \exp(f(x))=e^{f(x)}.$$

定理 3 中右端不等式说明，Heilbronn 数 H_n 是存在的，而且给出了数 H_n 的上界，而左端不等式说明，Heilbronn 猜想并不成立. 看来要改进数 H_n 的界是困难的，要确定数 H_n 的精确值恐怕更加困难. 最近陈计等[9－14]对确定数 H_n 的值作了有益的尝试，确定了最初几个 Heilbronn 数 H_n 的值如下：$H_3=1$，$H_4=\frac{1}{2}$，$H_5=\frac{1}{2}(1-\frac{\sqrt{5}}{5})$，$H_6=\frac{1}{6}$. 从陈计和王振的这些结论来看，数 H_n 和自然数 n 之间并无简单的关系. 因此很值得人们深入研究.

参 考 文 献

[1] P. Erdős，L. Moser，Canad. Math. Bull.，2(1959)，43.

[2] H. Edelsbrunner, P. Hajnal, J. Combinatorial Theory, 56A(1991), 312—316.

[3] P. Erdős, G. Szekeres, Compositio Math., 2(1935), 463—470.

[4] 常庚哲、李炯生主编,《高中数学竞赛教程》,江苏教育出版社,1989年.

[5] G. C. Rota, Classic paper in combinatorics, Quinn—Woodbine Inc., 1987.

[6] K. F. Roth, J. London Math. Soc., 26(1951), 198—204.

[7] J. Komlós, J. Pintz, E. Szemerédi, J. London Math. Soc., 24(1981), 385—396.

[8] J. Komlós, J. Pintz, E. Szemeréli, J. London Math. Soc., 25(1982), 13—14.

[9] 陈计,王振,最初几个 Heilbronn 数的计算,《福建省初等数学研究文集》,福建教育出版社,1993年,49—52.

[10] 陈计,刘竞欧,关于圆形区域的最初几个 Heilbronn 数,《宁波大学学报》(理工版),1989年第1期,6—8.

[11] 杨路,张景中,曾振柄,关于三角形区域的 Heilbronn 数,《数学学报》,1994年第5期,678—689.

[12] 杨路,张景中,曾振柄,关于最初几个 Heilbronn 数的猜想和计算,《数学年刊》A辑,1992年第4期,503—515.

[13] 杨路,张景中,正方形内六点问题,《数学讲座》(下),四川人民出版社,1980年,159—175.

[14] Yang Lu, Zhang Jingzhong, A conjecture concerning six points in a square, Mathematical Olymiad in China, Hunan Educational Publishing House, 1990, 37—49.

[15] 何明秋,陈计,平面凸图形内 n 点问题,《中学教研》(数学版),1993年第12期,23—24.

治学法与辩证法七题

清华大学应用数学系　张贤科

我们的国家正在振兴，我们的时代正是千载一时的科学的春天. 大批青年学生和研究生正向科学高峰攀登. 我愿以所知、所历、所见、所悟，与他们一起探讨治学方法问题. 当然我的所知所悟是极其有限的，而这里讨论的"治学"主要是指理论科学研究. 针对性是辩证唯物主义的方法的生命，所以我们着重强调矛盾二方的一方. 比如我们强调自信，而对谦虚则较少提及，这并不是说可以不要谦虚等等.

下面，我们分两个部分来谈：治学者的心理素质——大志，自信，勤奋；治学者的辩证方法——动眼，动脑，动手，动脚.

治学者的心理素质对学业的影响，远较治学方法为大，离开了前者，后者就失去了依托，成为毫无意义之物. 相反，有志于攀登科学高峰的学者，或迟或早总会在实践中摸索出他的方法的. 华罗庚说："熟能生出百巧来". 所以对心理素质的训练实为重要.

（一）大志是成功的基因

首先，治学者要有大志，即攀登到科学顶峰之志. 人生贵在有志，志不立，则事无可成. 所谓"有志者事竟成"，"精诚所至，金石为开"，是有其道理的. 我未读过"圣经"，但知圣经中有这样的话："敲门即开门". 圣经大多是古代民间传说记录，"敲门即开门"这句话，

应视为古代人民的经验之谈：只有去敲门，门才得以开；只要去敲门，门就可以开！[1]让我们勇敢地不断地去叩击科学宫殿的大门吧！

强调“立志”，是否是哲学上的“唯心论”或“唯意志论”呢？唯物主义应当只强调客观物质世界的呀?！——让我们读一读马克思吧. 马克思在“关于费尔巴哈的提纲”中对费尔巴哈这位“古典”唯物主义大师有十一条批评，其中赫然写在第一条的是：

“从前的一切唯物主义，包括费尔巴哈的在内，其主要缺点是：把事物、现实、感性，只从客体的形式或是从直观的形式去理解，而不是当作人的感性活动，当作实践去理解的，不是主观地去理解的. 所以，结果竟是这样：那能动的方面是和唯物主义相反地由唯心主义加以发展了，——但只是由它抽象地加以发展了，因为唯心主义当然不知道现实的感性活动之为现实的感性活动的”.

马克思的话多好啊，再也不能把主观能动的方面让给唯心主义去发展了！比上述论断早一年，马克思还有过更为明确的，格言般的论断：

“光是思想力求体现为现实是不够的，
现实本身也应该力求趋向思想”.

光是思想去体现现实，那是机械唯物论. 同时还要求现实趋向思想（真理），以思想改造现实，那才是辩证唯物主义. 事实上，马克思本人在他博士论文序中就早已立下了“在自己的斗争和苦难中注定要成为普罗米修斯第二的誓言：

“不惧神威，不畏闪电，
也不怕天空的惊雷……

[1] 此话原文为：“敲门，则将门向你开”，在马太7章7—8节. 全文为：“Ask and it will be given to you; Seek and you will find; knock and the door will be opened to you. For everyone who asks receives; he who seeks finds; and to him. who knocks, the door will be opened.”

——普罗米修斯是哲学史书上最高尚的圣者和殉道者!”

立志,也是一个过程,甚至是一个终生的过程.它不是一劳永逸的,更不是一朝一夕就能宣布完成了的.我想有以下几点可谈:

1. 大志者不愧于时代.现在的形势可谓

“千载一时,胡不立志?!”

试想有志于科学者数千年来,何时有现在的好时机.以前的自不待说,即便是新中国成立后,国家这样鼓励、需要科学工作者也是从未有过的.科学史表明,处于上升阶段的国家在达到它的顶峰以前,必然涌现出大批科学家.正如恩格斯热情地讴歌“文艺复兴”时代那样:“这是一次人类从来没有经历过的最伟大的、最进步的变革,是一个需要巨人——在思维能力、热情和性格方面,在多才多艺和学识渊博方面的巨人的时代”.现在的中国,正处于比“文艺复兴”更辉煌的阶段.人民、国家、时代在需要大批科学人才.马克思说:“人生来就是这样安排的:他只有为了社会进步和同时代人的幸福而努力,才能够使自己完善起来”.因此为振兴中华造福人类而树立大志,“誓凌绝顶”,才不愧这伟大的时代.

2. 大志者择书而读.从治学立志角度看,书可分为两类.一类是补志鼓气的,如历史(世界史,各类科学史,断代史),伟人传记,哲学,特别是各种学术著作.一类是夺志泄气的,如很大一部分文艺作品(包括许多优秀古典作品),一些通俗读物均属于此类.前者多是真实的,是成功者的记录,读来能激励人们的奋发向上精神.而后者多是失败者或闲暇者的哀叹、悲观、抱怨,虽然从作品当时的背景看,它政治上是好的,艺术水平也是高的,但它总是给人某种心灰意懒的情绪,悲观出世的惑诱,如不警觉,易被夺志.当然,休息时翻翻自己喜爱的文艺作品作为调剂也未尝不可.

3. 大志者崛起于受挫.从一定意义上讲,“挫折”甚至更有利于治学.司马迁在“报任少卿书”中讲到:

“文王拘而演周易;仲尼軺而作春秋;屈原放逐乃赋离骚;左丘

之明厥有国语；孙子膑脚兵法修例；不韦迁蜀世传吕览；韩非囚秦说难孤愤；诗三百篇大抵贤圣发愤之所为作也”.

现代也有很多例子，郭沫若受挫流亡日本时，识译了甲骨文，奠定了他考古学和历史学的基础.

“学问积成于不必学之时，

成功奠基在大失意之日.”

事实常常就是这样，这是治学的辩证法. 究其实，做学问需要安静、专心、时间，这些都在失意寂寞之时才有，在得意热烈之时所缺的. 歌德说得好：“追求伟大事物的人必须全力以赴，巨匠在限制中才能表现自己，而规律只能给我们以自由.”

所以在受到挫折时，且不可失掉志向. 若在受挫之日，心灰意懒，自谓“学有何用?”，则无人能真助他. 究竟学有何用，当时谁也无法回答，只是待要用之日，有用之时，学也晚了！

4. 大志者不止于所得. 在取得一些胜利后，或者在条件好了的时候，也往往可以令人失去大志，纨绔子弟自不待言，“自古雄才多磨难，纨绔子弟少伟男”早为人所知. 就是有志之人，也容易失去远大目标，所谓

“芳草有情皆碍马，好云无处不遮楼.”

“谁在争取一切，谁在争取全胜，谁就不能不提防：不要让微小的成果束住手脚，不要误入歧途，不要忘记目的地还很远”. 这是大志者列宁的话.

5. 大志者善于调节. 事物都有两个方面，所谓“立志”有时也需要调节，并不是一条大道跑到底. 志向是一种长远的、总的抱负、目标. 但在何时、何具体方向上、何种规模上实现志向以及以何种方式为志向而奋斗，都要依客观情况而定. 可以把人的志向比喻为植物的“向阳趋光性”，这是一种内心的趋向，一种主观的追求，如何实现，是要审时度势”的，不可钻牛角尖. 大志在胸，方式上有一定的灵活性. 重要的是始终坚持这种“向阳趋光性”，那么终究“乘

风破浪会有时,直挂云帆济沧海".

(二)自信是成功的钥匙

自信是一种自我肯定,即高度坚信而且不断证明自己是有能力的.

1. 自信是成功者的特点之一. 美国加利福尼亚大学医学院查尔斯·加菲尔德教授分析了1500多名卓有成就者,总结出他们的共同点有六条:(1)过安排得当的生活,(2)热爱自己的职业,(3)做艰难事之前先在脑中思考,(4)讲求实效而不必顾虑十全十美,(5)甘愿担风险,(6)不低估自己的潜在能力.

这里我们看到,第5、6两条都是自信问题,足以见自信的重要性. 许多卓有成就者,包括马克思,都非常自信. 以致于被一些人目为"自大". 在我国,由于长期封建社会的影响,人们往往容易低估自己的潜力,不愿担风险,失去一次又一次的机会. 不可能想象,一个具有强大内在力的人,会是一个不自信的人.

2. 自信是创造力的表现. 治学是一种主观对于客观的认识运动,自信是在这一斗争中的巨大的精神力量. 科学研究有时会遇到巨大的障碍,无法估量的挫折,几乎毫无希望的一片黑暗,在这样的时候没有高度的自信,定会一事无成. 要攀登前人未有攀上的高峰,解决前人未能解决的问题,没有一点气概是难以想象的.

关于创造性思维的现代理论认为,一个人的创造力可用如下公式衡量:

$$创造力=基础知识\times发散思维能力.$$

其实"自信"是对发散思维的最大解放和激励. 这里发散思维是指对事物从最广泛的角度考虑各种可能,它的目的在于谋求"数量",与之相对的是"收敛思维",这是进行比较、选择的思维. 目前国外的管理科学中有很成功的"智力激励法",管理者邀集一组人对某

一问题征求意见，会上严禁批评，发言完全自由，意在谋求意见的数量．这种会议往往能收得奇效，征求到大量的创造性意见．这实质上是一种集体的发散思维机会．由此可以得到启发："批评"——这个向来很强调的武器，在这儿却是最忌讳的，它简直是悬在"创造性思维"头上方的达摩克勒斯（Damocles）之剑．那么个人的发散思维呢？当然就最忌讳"自我批评"，说得准确些就是忌讳拘谨、自卑、无自信心，忌讳"还没有诞生就已被扼杀"．因此"自信"是发散思维的奶母，是创造翱翔的翅膀．

为什么创造力依赖于发散思维呢？事实上辩证唯物主义从原则上早就回答了这个问题，它要求人们要从最广泛的相互联系中，从各个方面全面的看问题．

3．有自信才能有大志．凌云大志，因何而起？往往起于自信．爱因斯坦说过："有一种人从事科学是因为这里给他提供了施展才能的机会，他喜欢科学，正如运动员喜欢运动一样．"马克思说过："自暴自弃，这是一条永远腐蚀和啃啮着心灵的毒蛇，它吸吮着心灵的新鲜的血液，并在其中注入厌世和绝望的毒液．"

4．自信与骄傲．自信与骄傲不是同一概念．但是却常有人以"骄傲"的罪名去扼杀人们仅存的一点点"自信"的情况．仿佛大家都失去了自信，于是天下太平．所以对所谓"骄傲"要分析．只要它不是在成绩面前固步自封，只要它不是看不起或伤害了其它人，就不要轻意给人家戴上骄傲的帽子．

"九州生气持风雷，万马齐瘖究可哀．

我劝天公重抖擞，不拘一格降人才．"

如果大家都唯唯诺诺，猥猥琐琐，我们的社会何以能进步？那种崇尚谦卑、自视渺小的传统美德，是否真为美德，怕要重新考虑了．实质上它是封建社会愚民政策的遗风，是"多事之秋"人们借以自我保护的"作茧自缚"．对于向科学顶峰进军的志士，则是最有害不过的．

“道德规范”是一个历史范畴，它要随时代不同、历史变迁而变．但是“时间的更替不过是空间的并存的逻辑补充”．因此“道德规范”也随空间不同、环境变迁而变．

不容讳言，由于矛盾的特殊性，自然科学工作与政治行政工作对人的特质要求是不同的．后者主要是与“人”打交道，处理的是人与人之间的关系，强调谦虚谨慎是重要的；前者主要与自然界打交道，处理的是人与物之间的关系，强调自信和创造性是重要的．当然自然科学工作者也要处理人与人之间的关系，也要求他们谦虚谨慎；政治工作者也要处理人与物之间的关系，也要有自信和创造性．但绝不能说二者是没有区别的．

5．自信心的培养．少年时的环境对一个人有没有自信有很大的影响．有不少人在新环境下也容易对自己失去信心．我曾接触过一些大学生和研究生，他们自己承认比别人“笨”，对获得好的成绩缺乏信心．这样盲目自卑往往没多少根据，对自己要有正确分析．现代科学证明即使像爱因斯坦那样的科学家，大脑也只被动用了极少一部分，绝大部分未被开发．所以某科学习暂时不佳的人只是大脑要进一步“开发利用”罢了，另外，一些人的自卑可能源于对别人的盲目推崇．向别人学习是好的，但推崇别人到“自卑”的程度就不好了．其实，哲学上可以有一条定律叫做“远山恒青”．就是说，远处的山，看上去总是一片纯青无比，但其实，你若实地细察，也是乱石满地，荆棘丛生的，与脚下的山并无二致．人们对于不了解的东西常常理想化，如天堂、月宫，但岂知脚下的地球才真正是人类的伊甸园．

其次，争取经常不断取得成果，争取成果得以发表和应用，对培养自信心是很重要的．小成绩是大成功的基石与动力，这种早期的成果会在心底激起自信和胜利感．有一种说法：科学家之所以取得成就，根源于其早期的成绩得到社会鼓励．这是有道理的，这种“早期成绩”不一定是什么大成果，可以是做得很优美的习题，甚至

可以是少年时期的一些“小聪明”. 这也提出一个问题：对青少年的教育，要以表扬鼓励为主. 那种旨在摧毁自尊心、自信心的教学法，纵然是教给了学生一些知识，实在只能算是“给了他一碗红豆汤，而夺去了他的长子权”.

但是治学者不能要求社会上每个人都能正确地来鼓励他，甚至社会上还有所谓“马太效应”存在：越是需要扶持的学者，社会对其成绩越趋向于拒绝. 国外学者是根据《马太福音》的下面一段话给这种社会现象起的名字：

“凡已有者，还要给予，令其有余；

凡无有者，连其所有的，也要剥取. ”①

青年治学者若面对这种情况，怨天尤人，那是弱者的表现；灰心丧气，那等于承认失败；唯有自强不息，不断“积累优势”. 真金不怕土埋，“马太效应”只能淘汰那些假金罢了. 因此，自信者在任何时候的口号都是：

“战斗！——这是口令，

胜利！——这是回响. ”

（三）勤奋是成功的度量

勤奋是成功的度量，就是说，你付出多少劳动，你就会有多少成果. 这可以看作是政治经济学中“价值”的定义，在学术问题上的引伸. 在政治经济学中，商品的价值是物化了的劳动，社会劳动量是商品价值的度量. 在学术领域中，这几乎同样是对的. “勤能补拙是良训，一分辛劳一分才”，华罗庚的这句话，不是轻意说出的. 由于关于勤奋的论述已经相当多，我们在此不宜多说，只重温马克思如下的话：

---

① 原文为：Whoever has will be given more, and he will have an abundance. whoever does not have, even what he has will be taken from him. ”见马太13章12节.

"我只有事先声明,请渴求真理的读者们注意.在科学上面是没有平坦的大道可走的,只有那在崎岖小路的攀登上不畏劳苦的人,有希望到达光辉的顶点".

"在科学的入口处,正像在地狱的入口处一样,必须提出这样的要求:

'这里必须根绝一切犹豫,
这里任何怯懦都无济于事.'"

(四)动脚:掌握资料,获取信息

关于具体的治学方法,我体会最深的是四动:动眼、动脑、动手、动脚,其中最需强调的是"动脚":

"迈动你的双脚,到图书馆去查阅资料!"

不熟悉资料,研究工作是盲目的.人类认识真理的路线"实践——感性认识——理性认识",在具体实现时是一个错综复杂的历史过程.恩格斯说:

"思维的至上性是在一系列非常不至上地思维着的人们中实现的;拥有无条件的真理权的那种认识是在一系列相对谬误中实现的;二者都只有通过人类生活的无限延续才能实现."

就是说,每一个人对于科学的贡献,不过是人类认识链条上的一环,它只能在人类认识的已有基础上发展起来.牛顿说过,如果说他比别人站得高些,看得远些,那是因为他站在巨人肩上.其实每一个科学家都是这样.

现在有"知识爆炸"、"信息时代"的说法,传递信息的手段是各种各样的.但是理论科学工作者获取信息的主要渠道还是书、刊,起码在我国目前是这样.所谓信息爆炸也还没有传说的那样严重.因为每个学者都有自己的专业,最感兴趣的书刊就不是太多了,再辅以各种文摘索引,这样只要经常留意便可以掌握各自学科的动

态.

有的人不常去资料馆是因为"怯",这多半是由于没有选定专业方向的原因.没有一个明确的专业方向,面对一架又一架的外文资料,当然有茫然之感.由于现代科学的高度发展,"全才"已不太可能.有人说现在世界上并无"数学家"或"物理学家",有的只是各具体学科的专家.这反映了现在的一种情况.因此"窄化专业"便是一个必需而且有效的对策,尤其对年青的学者是如此.

"窄化专业——突破一点——扩大战果",

看来这是一个好的治学途径."如果你不是太阳,就不要企图普照大地;要像激光那样,就是钻石也要破壁".

对查阅资料来说,另一重要的方面是要熟悉各种文摘评论的查阅方法,熟悉图书馆的各种资料的分布、排列、版制等等.这些看来琐细,其实对于掌握信息是必不可少的,也只有在实践中不断积累经验.清代王鸣盛的话是很有见地的:

"目录之学,学中第一要紧事,必以此问途,方得其门而入."

此外,迈动双脚不光对获取信息动态是重要的,对于提高学者的基础水平也同样是重要的.学者的学业达到一定程度后,往往不再能靠读书本来提高纵向水平,因为最新的科学成果往往难以及时成书.这时,一期期定时汇到的学术期刊,无异是学者的"国际函授大学".通过这一函授,学者不断复习加深着最重要的(在科研中应用频度高的)基础知识,学习着最新发展的专题分支,研究着著名科学家解决著名问题的实例,寻求着自己用武的领域,构思着自己的蓝图.学者在这种函授中不断跟上时代的脚步,做出对时代的贡献.

最后,图书馆也提供一个诱人学习的极妙环境,是治学者陶冶心灵的最佳场所.

(五)动手:直攻法与高难法

动手,指学者在有一定的基础后,要及时动手做研究工作,也指平时要勤动手写札记、眉批、摘记等.

历来的教育都强调基础要深厚,不宜早动手选题做研究工作.但究竟怎样才算深了厚了,是不易掌握的.一般来说,中老年人的“深厚”学识是长期积累起来的,青年人短期内不容易一下子全面达到.若一味嫌青年人不深不厚,不让其接触科研课题,往往会使青年人错过黄金时代,等闲、白了少年头.另一方面,一味读书也不一定是真正好的学习法.参天大树,不是一日长成,一边生根伸枝丰叶,一边开花结果奉献,终成大树.

包括华罗庚在内的许多卓有成就的学者,都以自身的经历证明“直攻法”(或称直接法)是行之有效的治学方法.这一方法与“高难度学习法”密切相关.胸怀大志、智力较高,而又愿意刻苦勤奋的青年尤其适合采用“直攻法”和“高难法”,这种方法要求学者目标任务明确,这种目标一般是高难的,例如要求很快作出学术论文,很快写出一本专著,很快掌握一门外语等等.学者为达到这一高难的目标,动员起全部的智力、精力,“直接”向目标进攻:缺少的个别基础知识,短时间集中学会;缺少的个别环节,短时间集中攻下;学者往往只直接研读书海之中的一本一章一节,而不是抱一巨著从头慢慢细读,在这样坚韧不拔的直接进攻下,一段时间后目标可以达到.学者也因而加固扩展了自己的基础,训练了方法,获得了成果.然后再转战于更高的目标,不断开拓前进.这样形成的知识结构,是有机结构,是在实践中自己发展起来的结构,它概念清晰,联系明确,轻重分明,“逻辑的和历史的是一致的”.这样工作的效率也是昏昏然无目的读死书所不能相比的.

如何选题是一个重要的问题.不但要考虑到要有一定的意义,

而且要考虑到与自己学识的关系，考虑“可行性”. 可注意的有以下几点：

1. 平时多动手，写一些心得、札记、眉批等等. 看书刊时，要多动脑筋，看是否有所启发. 偶有所得，一定要及时记录下来，跟踪追击，放任大脑去“幻想”，说不定由此能捕捉到不小的课题. 苏轼说：

“作诗火急追亡捕，情景一失永难摹”，

对于理论研究尤其如此. 平时要多动手，不可使线索从眼前闪过逝去. 与此有关的是，理论研究者不可总使自己陷于事务的忙乱之中，要争取间或有“清静无为”之时，以发挥自己的想象. “无为”与“有为”是对立统一，往往在“无事可做”时发现大的研究课题.

“积土成山，风雨兴焉；

积水成渊，蛟龙潜焉.”

这说的是积累，量变到质变的辩证法. 俗话有“捡到篮子里的都是菜”的说法，常被用来嘲笑那些粗制滥造者. 从勤动手积累的角度讲，我们倒要倡导它：往篮子里多多捡吧，多多益善！——回家后再仔细挑选加工就是了.

2. 勤动脚去接触资料. 看多了，自然就会发现：有可推广者，有需完备者，有需改正者，有另具启发者. 这些都是好的研究课题.

3. 迁延扩展法. 一旦做出一些成果后，不要轻意关门大吉，弃之不顾. 而应想尽办法向深层、向四方扩展迁延. 在迁延时要尽量“发散思维”，甚至于蛛丝马迹，似曾相识，可有可无，一厢情愿，望风捕影，意想天开，张冠李戴，以假乱真，触景生情，也不要放过. 迁延法的好处，首先在于易发挥自己的优势. 你已经在这块基地上作了许多工作，相关知识掌握较好，继续工作下去很有利. 如果另换他题，一切都是新的，你与一个新手无异. 其次，选一个合适的课题不容易，轻易弃之可惜. 这有如找矿一样，你走马一望：青山绿水，阴阳和谐，很难说哪儿有矿. 如果你正在掘一个矿坑，继续向纵深开掘，向四周探索，实为上策：主矿脉很可能就在你脚下. 那种朝秦

暮楚，看哪儿热闹哪儿去的做法，往往难得到深刻的结果，难采得人所采不到的大金块.

当然，事物都是辩证的. 在一定的情况下也不要死钻牛角尖. 转移阵地，另有开拓也是必须的.

(六)动脑：创造性思维的特点

在确定选题后，一般要先有一段廓清外围之战，而后才能真正接近目标. 这种廓清外围包括熟悉相关理论，掌握有关资料，搞清有关的基本事实，有时还包括攻下几个次要的目标. 这一过程相当于上节"直接法"所应完成的任务. 这以后，就进入攻坚. 攻坚是一个关键阶段，创造、发明、成果的有无和大小，就看这一阶段. 这是一个飞跃阶段，是认识过程的一个大飞跃；这是一个"否定"阶段，新思想要在"扬弃"旧思想中诞生.

根据庞卡莱、阿达玛等科学家的论述，以及现代发明心理学的研究，也根据我在工作中的体会，这一飞跃有如下的各个分期和方法.

在扫清外围进入到问题的关键之时，由于几经反复，大脑对问题的各个方面、各个数据已相当清楚. 往往非常复杂的数学公式也能在脑中清晰映出，对很深刻的定理已有直觉的把握. 这时和象棋中的"盲棋"很类似，整个棋局全在脑中. 在这时，积极开动大脑机器，全神贯注工作几小时，便可掀起所谓"脑风暴". 这在心理学上称为"烘热期"，脑海中迅猛涌现出种种现象、联想、猜测、假设，这种脑风暴有如龙卷风一般，围绕着中心课题急剧旋转、脑中原有的各种概念被风暴掀起，飞舞，形成各种可能的暂时联系、组合，即各种新想法. 脑风暴初始，往往只有不太深刻的思想产生. 让脑风暴持续下去，一二小时后很可能会忽然跳出一些罕见的新奇思想，其中一些对解决问题可能非常有帮助. 也往往有这种情况：脑风暴持

续了数小时，并无太大收获，于是趋于平静．但就在这风暴平息后的无意识活动阶段，脑中往往会忽然有新想法，即所谓“顿悟”，于是打开了解决问题的大门．这种“顿悟”，只是一种设想或猜测，接下来还要动手实现这些设想、验证猜测，这也是一段有意识的甚至是艰巨的工作．这一工作形式上看是脑风暴前工作的（在新水平上的）继续，脑风暴表现为这一渐进过程的中断．

我自己所发表的所有论文，事实上都得之于“枕上”，每一篇都经历了上述过程，有的一篇论文要经几次“脑风暴”和“顿悟”才能完成．脑风暴和顿悟一般发生在晚上躺下后．由于整个晚上的紧张工作，躺下后脑中常常翻江倒海，如颠如狂，不能自已．每每深夜似醒非醒之时忽有所悟．要解决前人未能解决的问题，到人所未到之境，不动用思维的全部潜力，经过几个飞跃是不行的．常规的逻辑推导所得出的结果，必是未能惊人之物：

“笔底功夫犹恐浅，
枕上追索梦里寻．”

创造性思维往往很好地体现着以下各对矛盾的转化（尤其是数学上的发现每每如此）：

1．严格和不严格．“严格”似乎是科学尤其是数学的生命．但在创造性思维中，新思想的诞生往往是极不严格的．往往是先“猜出”定理，严格的证明是以后补出的．所以学者不但要善于严格，也要善于不严格．

2．逻辑和直觉．既然新思想不是由逻辑严格推导出的，那它是怎样得出的呢？“直觉”往往起很大作用．在一定程度上，这种直觉能力反映一个人的创造能力，它和一个人的知识虽然有关，但并不成正比，有的人知识很丰富但直觉能力差．数学家阿达玛认为直觉的本质是某种“美的意识”、“美感”．我自己切身体会，空间想象能力和这种直觉很有关系．

近来关于大脑两半球的实验成果对此很有启发．实验表明人

的左半脑善于进行逻辑思维，熟练性思维，解决老问题有条有理；右半脑善于进行形象思维，创造性思维，平时右半脑受到左半脑的压制，当二者有不同意见时，整个大脑表现出来的是左半脑的意志. 由这一成果对照上述脑风暴的过程，可以发现，脑风暴后期的"非逻辑"思维恰恰就是把右半脑从左半脑的抑制中解放出来. 这也证明了"形象美感"、"空间想象力"等直觉作用对创造力有决定性的作用. 像数学这样高度逻辑化的学科，却也不得不求助于他的对立物——直觉.

3. 发散思维和收敛思维. 大学教学，尤其是数学教学，一般都着重训练收敛思维. 但脑风暴时，发散思维却是主要的思维方式.

4. 个别与整体. 如果说你战胜不了敌人的一个团，却能轻易把他们的一个军消灭，一定令人难以置信. 但在科研攻坚中确实有这种情形：往往一个特殊问题解决不了，但把问题"一般化"，反而容易解决了. 我有几次确实碰到了这种情形，正是问题的一般化、扩大化救我出维谷. 在这里，一般与个别的关系似乎颠倒过来了. 这可能是由于问题的一般化更便于发现问题的本质，或更便于运用一般化的工具，而太执着于具体问题反而会"一叶障目".

5. 归纳与演绎. 一般公认数学的方法主要是演绎法，数学书上的定理一般都是由演绎法证明的. 不完全归纳法（即哲学上的归纳法，加上"不完全"以区别于"数学归纳法". 后者是一种具体的证明方法，主要还是用的演绎推理）太不严格，似乎粗俗难登大雅之堂. 但事实上，数学上的许多重要结果都是由不完全归纳法发现的. 著名数学家欧拉说过："数学这门科学，需要观察，还需要实验. ""数学王子"高斯也提到过，他的许多定理都是靠归纳法发现的，证明只是补行的手续. 但是数学家在写论文时，总是把定理写成是由演绎的上帝赐给的纯理性之物，绝没有诞生于归纳的凡俗之气. 这正像马克思所嘲笑的，黑格尔把物质世界都放逐到注释中去了；也正像鲁迅所揭露的，雅士总是把算盘藏在抽屉里，虽然物

质世界和算盘才真正对于他们是至关重要的.

6. 标新立异,出奇制胜. 发展就是否定. 所以一定要勇于标新立异、别出心裁,勇于向现有的权威挑战,才能真正有所创造. "不依古法但横行,自有风雷绕膝生". 要勇于另辟蹊径,要善于从新角度、新观点考虑问题,也就是要出奇. "善出奇者,无穷如天地,不竭如江河",表现得很神,其实质不外是"对立统一规律":要从正反两个方面考察问题;要小中见大,大中见小;旧以新视,新以旧衡;要繁中求简,简中求繁;要无中生有,有中化无. 关于这种发展的辩证法,黑格尔有一段话最尖锐明确,读来很能启发人:

"凡有限之物不仅是受外面的限制,而乃为它自己的本性所扬弃,由于自身的活动自己过渡到自己的反面. 所以当我们譬如说人是要死的,似乎以为人之所以要死是由于外在的环境,照这种看法,人具有两种特性:有生亦有死. 但这事的真正看法应该是说,生命本身即具有死亡的种子. 凡有限之物即是自相矛盾的,由于自相矛盾而自己扬弃自己."

由此可知,比如说,为什么一定要"小中见大". 其实"小"本身即具有"大"的种子,而由于这种"自相矛盾"的本质,"小"扬弃自己过渡到自己的反面"大".

(七)动眼:一本书主义与渗透学习法

动眼读书学习是理科治学的根本,青年时需要,出成果后仍然是需要的. 知识结构要不断完善,新理论要不断学习,才能不断前进. 历来强调读书要循序渐进,按步就班. 其实,走马观花,不求甚解,有时也同样重要. 学习无非是从无知转变为有知,这从"无"到"有"的转变方式,可以是多样的:蚕吃桑叶. 一点一点地啃,按步就班,是一种方法;霜染枫叶,由黄渐红,由微红再大红,也是一法;墨滋宣纸,从诸墨点辐射出去,逐渐浸润,又是一法. 我们在读书中都

可运用．这反映了从量变到质变的各种不同转变方式．总的来说，我觉得有两点值得强调：

1．一本书主义．治学之路盘曲而上，由一个一个阶梯构成．在每个阶梯，要读“烂”一本书（精读、熟读），即所谓一本书主义．而不宜拿许多属于同一阶梯水平的书，反复对看．在每一个治学阶梯上，选择一本较合适的书（内容详实而又不繁琐，为学界所公认者），精读细研，日读夜思，直到切实理解掌握．待到对一个环节的基本理论真正掌握后，再翻看其它同类的书，就会发现这些书多是大同小异，讲法、符号不同而已．当然也有部分章节内容是新的，逐渐补上就容易了．掌握一个环节后，更及时转入更高的环节，不要在原有环节上徘徊．

2．渗透学习法．读书可以似懂非懂地读，听起来与传统的教育颇不合，但这正是李政道教授所提倡的“渗透学习法”．博览群书，开始可能并不太懂，但就在这似懂非懂之中已经学到不少知识，天长日久，就会越学越深广．有的材料对于自己的学科不十分必要，那么有个印象也就可以了．在适当的时候，这模糊的印象可能因事对我们有所启发．如果到时需要细知，可以知道到何处去查找．有的材料与自己关系较大，经过反复学习就会由似懂非懂逐渐变得真懂．就像秋天的枫叶由黄逐渐变红一样．许多学者的知识都是这样逐渐加深的，只不过没有注意罢了．俗话说“第五个烧饼”，事实上并不是单靠这第五个烧饼吃饱的啊．

即使对于应当精读的书，也不一定非要一页页从前往后读不可，也可以先前后翻翻，看看有几章，中心内容是什么，也可以挑自己最有兴趣的先看，也可以把一时难懂的细节留作后看．这个道理和打仗是一样的．解放战争在打了辽沈战役后，是先打淮海战役后打平津战役，并不是按地理顺序相反地打．太原是留在后打的．而全国并未完全解放时，北京已宣布成立新中国了．甚至到现在台湾也还没有解放，但这并不影响我们做大文章．当然在适当的时候，

像台湾这类问题还是要解决的，解决的方式可以是异样的. 读书也有类似的道理.

华罗庚曾有著名的读书公式：薄——厚——薄，即开始读一遍，似懂非懂，只见其大概，这时书对于读者是薄的；接着详细研读，加注释，加纸条，加心得体会，着眼于细节，这时书的内容在读者心目中是厚的；再经努力，融汇贯通，切实掌握了书中的理论，似乎一目了然，书在读者心目中是薄的了. 但这时的“薄”与开始时的“薄”已经很不一样了，是在更高水平上的“仿佛向旧事物的回复”. 这真是否定之否定规律活生生的范例，也是综合——分析——综合过程的极妙注释. 此外国外曾流行着 SQ3R 读书法，即概观(Survey)——提问(Question)——细读(Read)——探索(Research)——复习(Review). 还有人主张读书可以顺读、反读、专题读，说顺以致远，反以求源，专以攻坚，三种读法不可或缺.

总之这都反映了由“无知”到“有知”的转变方式，可以是多样的，要因时因地因人而异. 不一定非要传统课堂强调的“蚕吃桑叶”式不可. 可以如“晓来谁染霜林醉”，大片丛林由绿变黄，由浅红变深红. 也可以如国画名家宣纸泼墨，浓淡浸染皆宜，“密处不使透风，疏处可以走马”.

作者后记 写此文原是任务，我借机发挥，预备用于教学. 没想到中国科大、信息学院等校不少学生及家长反映出如此兴趣. 更由于陈计等同学热心，多次分载于学生自办的《蛙鸣》，《科大学生学报》等内刊上，及有此次发表. 感谢他们的热心把此文介绍给大家. 如果说此文有什么特别之处的话，我想主要是能够和敢于依实依理讲了些“真话”，透露了一些治学的“天机”，希望有益于来者. 诚然这些多是亲身历悟最深者，但主要应是源于华罗庚等科学家在科大培育起来的治学传统. 这在出创造型人才出创造性成果方面是相当成功相当有特色的. 自写此文已十年了，现在似更应呼唤献身科学的精神，人类永恒的前进主题. 愿以七绝逍遥游一首，献给有志青年：

鲲鹏怒化垂天翼，海运扶摇九万击，
野马息吹抟视下，苍苍正色上至极.

现代数学介绍

数学归纳法与超穷归纳法

中国科学院计算技术研究所 张锦文

众所周知，有无穷多个自然数，由此，关于自然数的某一性质 $p(x)$，其中变元 x 可以取任意的自然数值，从而人们就得到了无穷多命题 $p(0)$，$p(1)$，$p(2)$，…，$p(n)$，…，怎样去判断这些命题的真假值呢?换句话说，对于这种具有统一形式由于变元取值的不同而引起的无穷多个命题，如何去判断它们的真假值呢？特别地，当这些命题都是真命题(或者说，从某一自然数 n_0 开始，$p(n_0)$，$p(n_0+1)$，…等都是真命题)，我们怎样去证明它们呢？对此，我们有一个一般方法，这就是数学归纳法.

一般说来，数学归纳法是关于自然数的性质 $p(x)$，当前提为：

(1)可以验证命题 $p(0)$真；

(2)对于任意自然数 n，若 $p(n)$成立，则可推导 $p(n+1)$也成立.

结论：对于一切自然数 m 而言，$p(m)$都成立.

这里前提(1)是要直接进行验证的.在运用时，它的灵活性在于考察 $p(0)$是否成立，如果 $p(0)$不成立，还可进一步考察 $p(1)$，$p(2)$乃至对某一自然数 n_0，$p(n_0)$是否成立，这是解决归纳命题的起点问题.前提(2)是解决性质 $p(x)$对自然数序列是否具有“遗传”的问题.既然是遗传性，就要求对于一切自然数 n，由 $p(n)$都能够推得 $p(n+1)$，当然在这一推导过程中只能使用命题 $p(n)$的性质，而不能使用 n 的特殊性，也就是保证遗传性能够一直进行下

去. 根据这两个前提,就获得上述数学归纳法的结论.

在讲解数学归纳法时,不能把它看作是由特殊到一般的方法,因为它不同于一般的归纳法,它是完全归纳法,它完全是由自然数的性质全盘决定了的. 对于自然数来说,皮亚诺所指出的五个性质是基本的,它们都是根据对自然数概念的直接分析而获得的,这就是:0 是一自然数;任意自然数的后继(即加 1)还是一自然数;任意自然数的后继都是唯一决定的;0 不是任意自然数的后继;数学归纳法成立. 当然,皮亚诺是把数 1 作为起点的,随后,罗素等人把 0 作为起点,在理解上与应用上都更为方便一些,并且已被广泛地采用了.

有人曾把归纳法的结论理解作可以有 $p(\omega)$成立,其中 ω 为自然数集合(即第一个无穷序数),从而推导出一系列荒谬的结论. 我们已经明确指出,数学归纳法的结论是对于每一自然数 m,有 $p(m)$,即$\forall\, mp(m)$成立. 这仍然是一自然数命题,它也只能获得自然数命题的有效性,而不能获得无穷序数的有关命题. 对于无穷序数的有关命题已超出了数学归纳法的范围,下边我们也将给出一个简要的说明.

对于集合形式的数学归纳法来说,若集合 $T\subset\omega$,如果 $0\in T$,且对于任一自然数 n,由 $n\in T$,可得到 $n+1\in T$,那么 $T=\omega$. 换句话说,自然数集合 T,若 0 在其中,并且 T 对后继是封闭的(或 T 对自然数序列具有遗传性),则有 $T=\omega$. 这就是结论,而不能是 $\omega\in T$.

自然数集合的最小原则是说,对于自然数的任一不空集合来说都存在一最小元. 这一原则,早在欧氏的《几何原本》中已经用到了. 欧氏在证明"任一合数都能被某一质数除尽"时指出,若 A 为合数,则依定义它必能被某数 B 除尽. 若 B 为非质数从而又是一合数,于是能被 C 除尽,从而 A 能被 C 除尽,若 C 为非质数,则照此类推下去. 于是他说:"若继续这样推究,就会得出能除尽其前面

一数的质数.而此质数也能除尽 A.如果不能得到这样的一个质数,那就会有无穷多的一系列愈来愈小的数能除尽 A.这对于(自然数)来说是不可能的."这就是欧氏提出的自然数的任一集合都有一最小元的假设.不难证明:这一原则与数学归纳法是等价的,是可以相互推演的.

关于第二数学归纳法,通常是说,关于自然数的性质 $p(x)$,当满足前提:对于每一自然数 n,由小于 n 的一切数 k,若 $p(k)$成立可推演出 $p(n)$成立.就有结论:对于每一自然数 n,有 $p(n)$成立.使用量词,上述内容可以写为:

$$\forall n(\forall k(k<n\to p(k))\to p(n))\to\forall np(n).$$

我们说,第二数学归纳法与通常的数学归纳法(亦称第一数学归纳法)是等价的,只需指出这两个归纳法的前提是可以相互推演的就足够了.为此,我也把第一数学归纳法用量词形式表述如下:

$$p(0)\wedge\forall n(p(n)\to p(n+1))\to\forall np(n).$$

第一数学归纳法的前提中说明 $p(0)$成立,又因 $p(x)$满足遗传性,故有 $p(1)$,$p(2)$,$p(3)$等成立,从而满足了第二数学归纳法的前提.反之,假定第二数学归纳法前提成立,为说明第一数学归纳法的前提这时也必然成立,我们首先说明 $p(0)$成立.因为 $\forall n(\forall k(k<n\to p(k)\to p(n))$,特别地,当 n 为 0 时,就有:

$$(k<0\to p(k))\to p(0)$$

成立,然而,由于自然数均为大于等于 0,所以,$k<0$ 假,由此,$k<0\to p(k)$为真命题,这样,必然有 $p(0)$真,遗传性是显然的.这就说明了,两个数学归纳法是等价的.

在运用数学归纳法时,也常常有它的灵活性需要注意,例如欲证 n 为 $k+1$ 时命题成立,即欲证 $p(k+1)$成立时,不仅要用到 $p(k)$,而且要用到 $p(k-1)$也成立.这时,就不仅要验证初始命题 $p(0)$,而且要验证 $p(1)$也成立,方可进行归纳.比如,令 $F(0)=F(1)=1$,$F(n)=F(n-1)+F(n-2)$(当 $n\geqslant 2$ 时),求证:$F(n)<$

3^{n+1}，这时就需运用上述归纳情形.

为了进一步说明数学归纳法对前提的要求和它的结论的含义，我们列举一个用双重归纳法的例子. 试证明，对于任意自然数 n、m 而言，恰有 $n<m$，$n=m$ 或 $m<n$ 之一成立. 我们不妨采用集合形式的归纳原则，令

$$T=\{n \mid n\in\omega \wedge \forall m(m<n \to (m<n \vee m=n \vee n<m))\}.$$

先证：$0\in T$，亦即验证

$$\forall\, m(m\in\omega \to (m<0 \vee m=0 \vee 0<m)),$$

为此，令 $A(m)$ 为 $(m<0 \vee m=0 \vee 0<m)$，对 $A(m)$ 再作归纳证明，不难验证 $A(0)$ 总成立(这是因为 $0=0$ 恒成立).

对于任意 $k\in\omega$，假设 $A(k)$ 成立，即有

$$k<0 \vee k=0 \vee 0<k,$$

由于不可能有 $k<0$，所以必有 $k=0$ 或 $0<k$ 之一成立. 不管怎样，这时都有 $0<k+1$. 因此，总有 $A(k+1)$ 成立. 使用数学归纳法，就有 $\forall\, mA(m)$ 成立，亦即 $0\in T$. 请注意，如上的论证，仅在于验证归纳前提 $0\in T$.

现在设 $k\in T$，亦即对于任一 $m\in\omega$，有

$$m<k \vee m=k \vee k<m.$$

若 $m<k$，得到 $m<k+1$；若 $m=k$，有 $m\in k^{+}$，即 $m<k+1$；若 $k<m$，则总有 $k+1<m$ 或者 $k+1=m$；这就是说，不管在哪种情况下，总有 $k+1\in T$. 这就完成了归纳前提(2)即 T 的遗传性的证明. 再次使用数学归纳法，就获得了 $T=\omega$. 也就是说，欲证结论成立.

这些事实都说明，数学归纳法是完全归纳法，它由自然数具有起点(即 0)和具有遗传所决定的. 它不是也不可能是从一些特殊事实归纳出一般结论，它也不能帮助我们从特殊情况发现一般规律. 这种把它同通常归纳法相提并论的说法是错误的，通常讲的归纳法与数学归纳法是两个完全不同的概念. 诚然，要发现自然数的

某一性质是否对一切自然数均成立，需要人们作一特殊值的验证，然而这些特殊值决不能代替一般的论证，即证明性质 $p(x)$ 对自然数序列的遗传性.

为了更深入地理解数学归纳法的性质，不妨再考察一下超穷归纳法. 正如数学归纳法是完全由自然数的性质所决定的一样，超穷归纳法是由序数所决定的. 康托尔的超穷序数正是超穷归纳法的基础.

序数是自然数的推广，每一自然数都是一序数. 由此，序数可定义为：0 是序数；任一序数的后继（即加 1）还是一序数；序数集合的并集合是一序数；并且只有这样获得的才是序数. 由此，我们获得了 $\omega, \omega+1, \omega\cdot 2$ 是序数，以及有第一个不可数序数 ω_1，第二个不可数序数 ω_2 等. 一个序数 α 为另一序数 β 的后继时（亦即 $\alpha=\beta+1$），就称 α 是一后继序数，既不是 0 又不是后继序数的序数就称为极限序数. $\omega, \omega\cdot 2, \omega_1, \omega_2$ 都是极限序数.

关于序数的一性质 $p(x)$，当前提为：

(1)可以验证命题 $p(0)$ 真；

(2)对于任意后继序数 $\alpha+1$，若 $p(\alpha)$ 成立，则可推导 $p(\alpha+1)$ 也成立；

(3)对于任意极限序数 λ 来说，有：对于一切 $\alpha<\lambda$，$p(\alpha)$ 都成立，可以推演 $p(\lambda)$ 成立；

结论：对于一切序数 α 而言，命题 $p(a)$ 都成立.

当我们规定用 α、β 表示任意序数；$\lim(\alpha)$ 表示 α 为一极限序数，运用量词和蕴涵词就可以把上述陈述的超穷归纳法表示为：

$$p(0) \wedge \forall\ \alpha(p(\alpha) \rightarrow p(\alpha+1)) \wedge \forall\ \alpha(\lim(\alpha) \wedge \forall\ \beta(\beta<\alpha \rightarrow p(\beta)) \rightarrow p(\alpha)) \rightarrow \forall\ \alpha p(\alpha).$$

这里前提(1)是要直接验证的，而前提(2)与(3)是要给出证明的，例如，当 $p(0), p(1), p(2), \cdots$ 等均成立，即对任意自然数 n，$p(n)$ 都成立，这时，$p(\omega)$ 也可能成立，也可能不成立，究竟是否成

立，要依赖是否存在一个严格的数学证明.而且只有当前提(1)，(2)，(3)均成立时，我们才能有欲求的结论.

平行于第二数学归纳法，也有超穷归纳法的第二种形式，这可以写成：

$$\forall\ \alpha(\forall\ \beta(\beta<\alpha\rightarrow p(\beta))\rightarrow p(\alpha))\rightarrow\forall\ \alpha p(\alpha).$$

两种形式是等价的.为了证明超穷归纳法，常常使用序数的最小原则，这就是：对于序数的任一性质 $p(x)$，若有序数 α，使得 $p(\alpha)$成立，则有一满足此性质的最小序数 α_0，也就是说，有唯一的序数$\alpha_0\leqslant\alpha$，使得 $p(\alpha_0)$成立，并且对于任意的序数 $\beta<\alpha_0$，都有 $p(\beta)$不成立.可以证明：最小原则与超穷归纳法是等价的.

数学归纳法是超穷归纳法的一种特殊形式，这是因为自然数只是序数的一个特殊部分即有穷序数的那个特殊部分.这就是两者的联系与差别.

本文的目的主要是澄清数学归纳法的有关概念，对于某些作者一提到数学归纳法就要首先讲“从一些特殊事实归纳出一般结论”(如像高中数学课本那样)，或者“当 n 等于特定值 k 时成立的假定下，如果能证明当 n 等于 $k+1$ 时也成立，那么就可以断定这个命题对于任何自然数 n 都成立”(见《辞海》数学归纳法).所谓“特殊事实”和“特定值”的提法，我们认为这只能给读者带来糊涂观念，应予以澄清.至于归纳法的例题和应用，有很多材料，特别是华罗庚的《数学归纳法》(上海教育出版社，1963 或《华罗庚科普著作选集》，上海教育出版社，1984，第 105—152)有许多精辟的说明和精选的例题，读者可以从中得教益.数学归纳法在计算机应用领域也有广泛的应用，限于篇幅这里也没法深论，读者可参阅天津科技出版社出版的《信息与逻辑》丛书.

(选自《初等数学研究论文选》)

陆家羲的大集定理简介

内蒙古师范大学　罗见今

1983 年 3 月和 1984 年 9 月，国际学术刊物《组合论杂志》A 辑用 100 页的篇幅，连续发表了我国包头市第九中学陆家羲老师的六篇文章“论不相交斯坦纳三元系大集 I ～VI”，解决了一百三十年来一个著名难题，引起了国内、外数学界的重视. 他的成就属于组合数学区组设计. 本文简介这一工作，并表达笔者对已经不幸去世的陆老师的敬意和怀念.

随着计算机科学的迅速发展，相对于连续数学，兴起了离散数学，组合数学便是一门重要的新分支，又叫组合学(combinatorios)、组合论、组合分析，它研究离散对象(一般是有限个)在事先给出的约束条件下如何进行安排或配置. 如把对象看成一个集合，那就是要研究按条件排成一些子集的方法，要回答：1. 在条件合理、安排可行时，这些安排有多少种？——计数问题. 这与初等数学密切相关，因排列、组合、二项式定理等是计数理论的起点. 2. 在条件改变或原来就不知是否合理时，安排是否可行？——存在性问题. 3. 当存在性被证明时，如何具体设计这种安排？——构造问题. 4. 在实际问题的背景下，如何找到最佳或较佳安排方案？——优化问题. 就研究对象和方法的区别而言，组合数学主要分为图论、经典问题(主要是计数)和区组设计.

区组设计(blook design)研究这样一类具有重大一般性的问题：把 v 元集合 X 中的元安排到指定数目的子集中去，使得第 i 个元在被选出的所有子集中出现 r_i 次，第 j 个子集包含 k_j 个不同

元，并使两元组、三元组……出现一指定的次数．这里的子集就叫做区组．区组设计的一种基本形式是平衡不完全区组设计(balanced incomplete block design)，缩写为 BIBD.

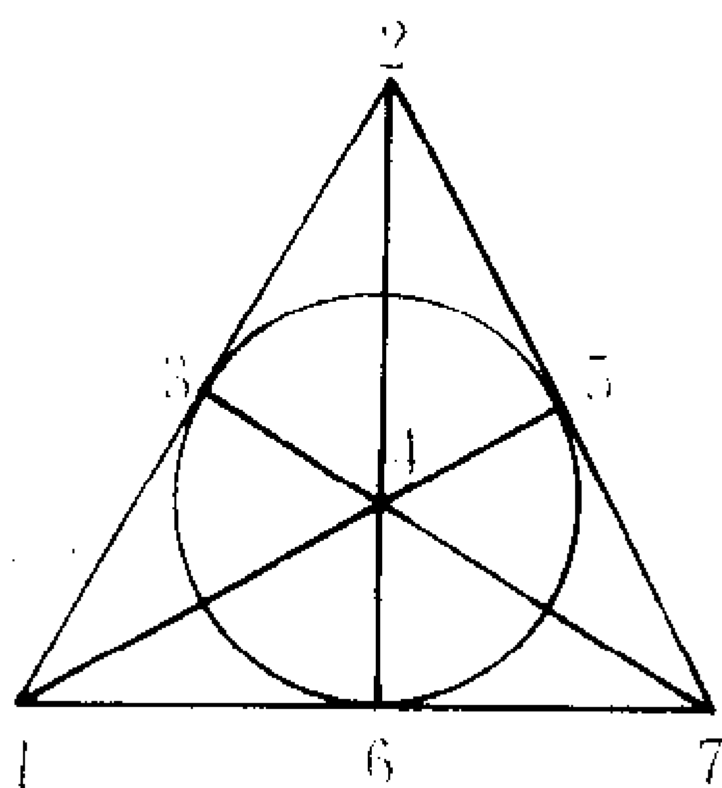
一个 BIBD 是把集 X 的 v 个不同元安排到 b 个区组中，使得：1. 每一区组恰含 k 个不同元；2. 每元恰出现于 r 个不同区组；3. 每对不同元恰出现于 λ 个不同区组．因共涉及五个变量，故记作 (b,v,r,k,λ) 设计．五变量间有如下基本关系式：

$$bk=vr, \tag{1}$$

$$r(k-1)=\lambda(v-1). \tag{2}$$

当 $k=3$、$\lambda=1$ 时的 BIBD，叫做**斯坦纳三元系**(Steiner triple systems)，可记作 $S(v)$．易知存在一个 $S(v)$)的必要条件是对某个非负整数 n，有 $v=6n+1$ 或 $v=6n+3$，即

$$v\equiv1,3(\text{mod } 6). \tag{3}$$



1847 年英国数学家柯克曼(T. P. Kirkman)提出并证明了嗣后被称为斯坦纳三元系存在的必要条件也是充分的．$S(v)$的区组数为

$$b=v(v-1)/6. \tag{4}$$

例 1 令 $v=7$ 且取 $X=\{1,2,3,4,5,6,7\}$，则一个 $S(7)$ 有 $b=7(7-1)/6$ 个三元组，是一个(7,7,3,3,1)设计，可用如图的方法来安排：{1,2,3}，{1,4,5}，{1,6,7}，{2,4,6}，{2,5,7}，{3,4,7}，{3,5,6}，共七个区组.

这个 $S(7)$ 的关联矩阵①关于主对角线为对称，它的逆阵 A^{-1} 所表示的三元系也是一个 $S(7)$：{3,5,7}，{1,2,7}，{1,3,4}，{1,5,6}，{2,3,6}，{2,4,5}，{4,6,7}．这两个 $S(7)$ 没有相同的三元

① 是一个(0,1)矩阵，即区组中有 X 的元时用 1 表示，无 X 的元时用 0 表示.

组，是不相交的.

$$A=\begin{pmatrix}1&1&1&0&0&0&0\\1&0&0&1&1&0&0\\1&0&0&0&0&1&1\\0&1&0&1&0&1&0\\0&1&0&0&1&0&1\\0&0&1&1&0&0&1\\0&0&1&0&1&1&0\end{pmatrix}$$

同一 v 元集 X 上的 $S(v)$，如果彼此之间没有共同的区组，叫做**互不相交或两两互斥的**. 用 $D(v)$ 表示互不相交的 $S(v)$ 的最大个数，易知对 $v\geqslant 3$，

$$D(v)\leqslant v-2.$$

由于 v 元集 X 所能构成的全部不同的三元组的总数是

$$C_v^3=\frac{v(v-1)(v-2)}{6},$$

由(4)知一个 $S(v)$ 共有 $b=v(v-1)/6$ 个不同的三元组，于是存在可能

$$D(v)=\frac{C_v^3}{b}=v-2. \tag{5}$$

满足(5)的所有 $v-2$ 个 $S(v)$ 叫做不相交斯坦纳三元系大集. 所谓大集问题，就是大集的存在问题；所谓大集定理，就是要证明它存在的必要条件也是充分的.

例 2 一个 $S(9)$ 是一个(12,9,4,3,1)设计，可用以下一个矩阵按三横行、三纵列和展开式六个乘积的次序排出 $b=12$ 个区组，对它而言，恰存在另外 6 个 $S(9)$，由

$$\begin{pmatrix}1&2&4\\3&7&8\\9&5&6\end{pmatrix},\begin{pmatrix}1&2&8\\9&4&3\\7&6&5\end{pmatrix},\begin{pmatrix}1&2&5\\9&8&3\\4&7&6\end{pmatrix},\begin{pmatrix}1&2&9\\7&4&3\\5&8&6\end{pmatrix},$$

$$\begin{pmatrix}1&2&3\\4&6&9\\7&8&5\end{pmatrix},\begin{pmatrix}1&2&6\\3&5&7\\4&8&9\end{pmatrix},\begin{pmatrix}1&2&7\\3&4&6\\5&9&8\end{pmatrix}$$

给出. 上面 7 个 $S(9)$ 共 84 个区组构成一大集，满足(5)，即 $D(9)=7$.

存在不满足(5)的阶，如 $v=7$. 对例 1 的两个 $S(7)$ 而言，不存在另外三个 $S(7)$，使得 $D(7)=5$ 成立；只有 $D(7))=2$. 换言之，$v=7$ 时大集不存在. 这一点是英国著名数学家凯莱(A. Cayley)在 1850 年证明的. 于是，很自然地人们会问：自然数中满足(3)的 v 除 7 之外还有哪些不满足(5)? 由此揭开了大集问题研究的序幕.

1850 年柯克曼提出了著名的*十五女生问题*：十五个女学生，每天下午三人一组出去散步，问怎样编组，使得每两个女学生在七天内分到一小组中恰见一次面? 这是一个(35,15,7,3,1)设计，即要求给出一个 $S(15)$①. 同年他给出了例 3 的一个方案，翌年发表. 1850 年英国数学家西尔伟斯特(J. J. Sylvester)和凯莱提出这一散步日程表能否安排 13 周? 即是否有 $D(15)=13$? 后一问题很难，直到 1974 年才有人用电子计算机算出.

例 3 柯克曼女生散步方案为

星期日：{1,2,3}，{4,8,12}，{5,10,15}，{6,11,13}，{7,9,14}；
星期一：{1,4,5}，{2,8,10}，{3,13,14}，{6,9,15}，{7,11,12}；
星期二：{1,6,7}，{2,9,11}，{3,12,15}，{4,10,14}，{5,8,13}；
星期三：{1,8,9}，{2,12,14}，{3,5,6}，{4,11,15}，{7,10,13}；
星期四：{1,10,11}，{2,13,15}，{3,4,7}，{5,9,12}，{6,8,14}；
星期五：{1,12,13}，{2,4,6}，{3,9,10}，{5,11,14}，{7,8,15}；
星期六：{1,14,15}，{2,5,7}，{3,8,11}，{4,9,13}，{6,10,12}.

事实上在 1850 年柯克曼证明 $D(9)=7$ 之后，在一百年内有

① $S(6m+3)$又叫做柯克曼三元系(Kirkman triple systems)，记作 $S_k(v)$.

四位数学家重复了这一工作，没有取得一点进展. 要想证稍大一些的 v 是否满足 $D(v)=v-2$，每跨出一步都遇到了对个人能力的挑战. 于是，数学家们分兵三路，应用直接法、提高下界法和递归法，企图攀上大集问题的顶峰：

$$v\equiv 1,3 \pmod 6, v\neq 7 \Leftrightarrow D(v)=v-2. \tag{6}$$

到 1976 年之前，在应用直接法方面所得成果是：对 $v\equiv 1,3,\pmod 6$，$9\leqslant v\leqslant 205$ 区间的 66 个 v 值，证明了 56 个是满足 $D(v)=v-2$ 的，还有 10 个 v 没有办法证明，它们是 37，85，97，109，133，141，145，157，181，195. 直接构造这条路相当不易，例如对 $v=205$，它的斯坦纳三元系大集共有 $C_{205}^{3}=1414910$ 个各不相同的区组分属于 203 个 $S(205)$. 纵然藉助于计算机，对于(6)的目标而言，仍然是于事无补的；何况"组合大爆炸"，计算机的容量和所占机时不能承受. 数学家走这条路是为取得一些构造方面的经验.

百余年来数学家们主要走提高下界的道路. 其主要结果有：

$D(13)\geqslant 3, D(15)\geqslant 2.$ （柯克曼，1850）

$D(v)\geqslant (v-1)/2.$ （贝思猜想，1917）

$$D(6m+3)\geqslant\begin{cases}4m+1, 若\ m\equiv 0,2 \pmod 3\ ;\\ 4m-1, 若\ m\equiv 1 \pmod 3.\end{cases}$$ （多银，1972）

$D(6m+1)\geqslant 2m-1$，对 $m\equiv 1 \pmod 2$.

$D(6m+3)\geqslant 4m+2$.（宾克等，1974）

$D(6m+1)\geqslant 3m+1$，对 $m\equiv 1 \pmod 2$，（柯兹哥等，1975）等. 沿着这条路能否达到 $D(v)=v-2$，现在我们还不知道，关山迢递，到 1981 年有人在《组合论杂志》上说，此问题离解决还很远. 实际上连一条达到它的途径还没有找到.

1976 年之后，有五六年时间，这一问题的讨论显得有些沉寂. 但是，就在人们徘徊歧路、逡巡难进之时，在世界组合学界没有料到的地方，突然有人宣告了大集问题的全部解决，他就是中国一个普通中学的物理教师陆家羲.

陆家羲用递归法证明了以下的大集定理：

如果 $v\equiv 1,3 \pmod 6$，$v>7$ 和 $v\notin\{141,283,501,789,1501,2365\}$，则 $D(v)=v-2$.

这个定理由以下七个引理推出：

引理 1 （特林克，1973）如果 $D(v)=v-2$，则

$D(3v)=3v-2$.

引理 2 （洛莎，1975）如果 $D(v)=v-2$ 和 $v\geq 7$，则

$D(2v+1)=2v-1$.

引理 3 如果 $D(n+2)=n$，$n\equiv 11 \pmod{12}$ 和 $n\notin\{23,47,59,83,107,167,179,227,263,299,347,383,719,767,923,1439\}$，则

$D(3n)=3n-2$.

引理 4 如果 $D(n+2)=n$，p 是素数，$p\equiv 7 \pmod 8$ 或 $p\in\{5,17,19,29\}$，$(p,n)\neq(5,1)$，则

$D(2+pn)=pn$.

引理 5 如果 n 是奇数，存在着 12 个互相正交的阶为 n 的拉丁方，而且 $D(1+2n)=2n-1$，则

$D(1+12n)=12n-1$.

引理 6 如果 $D(1+4n)=4n-1$，n 是正整数，$p\in\{1,2,5\}$，则

$D(1+12pn)=12pn-1$.

引理 7 如果 $D(1+12n)=12n-1$，n 是奇数，$p\in\{7,11\}$，则 $D(1+12pn)=12pn-1$.

至此，除 $v>7$ 的六个值外，$D(v)=v-2$ 已宣告成立. 这七个递归构造将满足(3)的 v 覆盖，只留下上述六个数（以及陆文中已说明的几个数）. 已有人编成了大集定理的算法程序，在计算机上予以验证，大集定理的结论是完全正确的.

1984 年 9 月我国组合学界组织了“陆家羲学术工作评审委员会”，经过认真讨论，一致认定大集定理的证明是完全正确的，这一

成果将载入组合数学的史册.

1983 年 10 月 31 日陆家羲开完一个学术会议返家当夜猝然去世,留下了大集定理中的六个数,没有来得及写成论文Ⅶ. 1983 年 7 月 30 日在大连全国组合数学首届会议上他宣布对这六个数已找到构造大集的方法;在遗稿中人们发现了为此而写的 20 多页提纲. 但是,由于问题特殊的困难性,迄今还没有人能完成陆家羲的这一未竟之业. 1985 年 5 月在广州全国组合数学第二届会议上,青年组合数学工作者已开始接手这一工作. 希望陆家羲所开辟的道路后继有人.

(选自《初等数学研究论文选》)

从反对数表的几何性质谈起

中国科学院成都分院　张景中

大概许多同学和老师，都会觉得各种函数表的学习和使用是最为枯燥乏味的了. 其实，如果你深入地了解一下这些表的结构，特别是研究一下它的几何性质，倒也趣味盎然. 你会惊奇地发现：在看来十分平凡的表格里，藏着一些耐人寻味的规律. 利用这些规律，可以制成种种方便、准确的算图.

(一)反对数表的几何性质

我们常用的四位反对数表，是分开印在两三页上的. 如果把全表贴在一张纸上，排成一个"整体反对数表"，许多有趣的性质便呈现出来了.

如附表所示，我们把从 0.000 到 0.999 这一千个对数尾数的反对数(四位有效数字)，自左而右，自上而下地排成了一个 50×20 的长方阵. 每个数占据的地盘都一样，是一个小小的长方形. 长方形的左下角处的顶点，叫做这个数的代表点，例如：第 0 行的第三点代表 1005，而第 2 行的第 6 点代表 1109；每行的最末尾，也添上一个点，它和下一行的第一个点代表同一个数. 例如整个表的右上角那个点和第 0 行的第一个点，同时代表 1000，而第 49 行末一个点(第 21 个点)和表的左下角附加那个小矩形的左下顶点，也同时代表 1000；第 12 行末一点和 13 行头一个点，同时代表 1820，等等.

整体反对数表

i	00	01	02	03	04	05	06	07	08	09	10	11	12	13	14	15	16	17	18	19	1000
00	1000	1002	1005	1007	1009	1012	1014	1016	1019	1021	1023	1026	1028	1030	1033	1035	1038	1040	1042	1045	
01	1047	1050	1052	1054	1057	1059	1062	1064	1067	1069	1072	1074	1076	1079	1081	1084	1086	1089	1091	1094	
02	1096	1099	1102	1104	1107	1109	1112	1114	1117	1119	1122	1125	1127	1130	1132	1135	1138	1140	1143	1146	
03	1148	1151	1153	1156	1159	1161	1164	1167	1169	1172	1175	1178	1180	1183	1186	1189	1191	1194	1197	1199	
04	1202	1205	1208	1211	1213	1216	1219	1222	1225	1227	1230	1233	1236	1239	1242	1245	1247	1250	1253	1256	
05	1259	1262	1265	1268	1271	1274	1276	1279	1282	1285	1288	1291	1294	1297	1300	1303	1306	1309	1312	1315	
06	1318	1321	1324	1327	1330	1334	1337	1340	1343	1346	1349	1352	1355	1358	1361	1365	1368	1371	1374	1377	
07	1380	1384	1387	1390	1393	1396	1400	1403	1406	1409	1413	1416	1419	1422	1426	1429	1432	1435	1439	1442	
08	1445	1449	1452	1455	1459	1462	1466	1469	1472	1476	1479	1483	1486	1489	1393	1496	1500	1503	1507	1510	
09	1514	1517	1521	1524	1528	1531	1535	1538	1542	1545	1549	1552	1556	1560	1563	1567	1570	1574	1578	1581	
10	1585	1589	1592	1596	1600	1603	1607	1611	1614	1618	1622	1626	1629	1633	1637	1641	1644	1648	1652	1656	
11	1660	1663	1667	1671	1675	1679	1683	1687	1690	1694	1698	1702	1706	1710	1714	1718	1722	1726	1730	1734	
12	1738	1742	1746	1750	1754	1758	1762	1766	1770	1774	1778	1782	1786	1791	1795	1799	1803	1807	1811	1816	
13	1820	1824	1828	1832	1837	1841	1845	1849	1854	1858	1862	1866	1871	1875	1879	1884	1888	1892	1897	1901	
14	1905	1910	1914	1919	1923	1928	1932	1936	1941	1945	1950	1954	1959	1963	1968	1972	1977	1982	1986	1991	
15	1995	2000	2004	2009	2014	2018	2023	2028	2032	2037	2042	2046	2051	2056	2061	2065	2070	2075	2080	2084	
16	2089	2094	2099	2104	2109	2113	2118	2123	2128	2133	2138	2143	2148	2153	2158	2163	2168	2173	2178	2183	
17	2188	2193	2198	2203	2208	2213	2218	2223	2228	2234	2239	2244	2249	2254	2259	2265	2270	2275	2280	2286	
18	2291	2296	2301	2307	2312	2317	2323	2328	2333	2339	2344	2350	2355	2360	2366	2371	2377	2382	2388	2393	
19	2399	2404	2410	2415	2421	2427	2432	2438	2443	2449	2455	2460	2466	2472	2477	2483	2489	2495	2500	2506	
20	2512	2518	2523	2529	2535	2541	2547	2553	2559	2564	2570	2576	2582	2588	2594	2600	2606	2612	2128	2624	
21	2630	2636	2642	2649	2655	2661	2667	2673	2679	2685	2692	2698	2704	2710	2716	2723	2729	2735	2742	2748	
22	2754	2761	2767	2773	2780	2786	2793	2799	2805	2812	2818	2825	2831	2838	2844	2851	2858	2864	2871	2877	
23	2884	2891	2897	2904	2911	2917	2924	2931	2938	2944	2951	2958	2965	2972	2979	2985	2992	2999	3006	3013	
24	3020	3027	3034	3041	3048	3055	3062	3069	3076	3083	3090	3097	3105	3112	3119	3126	3133	3141	3148	3155	
25	3162	3170	3177	3184	3192	3199	3206	3214	3221	3228	3236	3243	3251	3258	3266	3273	3281	3289	3296	3304	
26	3311	3319	3327	3334	3342	3350	3357	3365	3373	3381	3388	3396	3404	3412	3420	3428	3436	3443	3451	3459	
27	3467	3475	3483	3491	3499	3508	3516	3524	3532	3540	3548	3556	3565	3573	3581	3589	3597	3606	3614	3622	
28	3631	3639	3648	3656	3664	3673	3681	3690	3698	3707	3715	3724	3733	3741	3750	3758	3767	3776	3784	3793	
29	3802	3811	3819	3828	3837	3846	3855	3864	3873	3882	3890	3899	3908	3917	3926	3936	3945	3954	3963	3972	
30	3981	3990	3999	4009	4018	4027	4036	4046	4055	4064	4074	4083	4093	4102	4111	4121	4130	4140	4150	4159	
31	4169	4178	4188	4198	4207	4217	4227	4236	4246	4256	4266	4276	4285	4295	4305	4315	4325	4335	4345	4355	
32	4365	4375	4385	4395	4406	4416	4420	4436	4446	4457	4467	4477	4487	4498	4508	4519	4529	4539	4550	4560	
33	4571	4581	4592	4603	4613	4624	4634	4645	4656	4667	4677	4688	4699	4710	4721	4732	4742	4753	4764	4775	
34	4786	4797	4808	4819	4831	4842	4853	4864	4875	4887	4898	4909	4920	4932	4943	4955	4966	4977	4989	5000	
35	5012	5023	5035	5047	5058	5070	5082	5093	5105	5117	5129	5140	5152	5164	5176	5188	5200	5212	5224	5236	
36	5248	5260	5272	5284	5297	5309	5321	5333	5346	5358	5370	5383	5395	5408	5420	5433	5445	5458	5470	5483	
37	5495	5508	5521	5534	5546	5559	5572	5585	5598	5610	5623	5636	5649	5662	5675	5689	5702	5715	5728	5741	
38	5754	5768	5781	5794	5808	5821	5834	5848	5861	5875	5888	5902	5916	5929	5943	5957	5970	5984	5998	6012	
39	6026	6039	6053	6067	6081	6095	6109	6124	6138	6152	6166	6180	6194	6209	6223	6237	6252	6266	6281	6295	
40	6310	6324	6339	6353	6368	6383	6397	6412	6427	6442	6457	6471	6501	6516	6516	6531	6546	6561	6577	6592	
41	6607	6622	6637	6653	6668	6683	6699	6714	6730	6745	6761	6776	6792	6808	6823	6839	6855	6871	6887	6902	
42	6918	6934	6950	6966	6982	6998	7015	7031	7047	7063	7079	7096	7112	7129	7145	7161	7178	7194	7211	7228	
43	7244	7261	7278	7295	7311	7328	7345	7362	7379	7396	7413	7430	7447	7464	7482	7499	7516	7534	7551	7568	
44	7586	7603	7621	7638	7656	7674	7691	7709	7727	7745	7762	7780	7798	7816	7834	7852	7870	7889	7907	7925	
45	7943	7962	7980	7998	8017	8035	8054	8072	8091	8110	8128	8147	8166	8185	8204	8222	8241	8260	8279	8299	
46	8318	8337	8356	8375	8395	8414	8433	8453	8472	8492	8511	8531	8551	8570	8590	8610	8630	8650	8670	8690	
47	8710	8730	8750	8770	8790	8810	8831	8851	8872	8892	8913	8933	8954	8974	8995	9016	9036	9057	9078	9099	
48	9120	9141	9162	9183	9204	9226	9247	9268	9290	9311	9333	9354	9376	9397	9419	9441	9462	9484	9506	9528	
49	9550	9572	9594	9616	9638	9661	9683	9705	9727	9750	9772	9795	9817	9840	9863	9886	9908	9931	9954	9977	1000
50	1000																				

这样，图上总共有 $50\times21+2=1052$ 个点子. 其中有 4 个点代表同一个数 1000(四角)，有 98 个点代表 49 个数，其余 950 个点各代表一个数，总共 1000 个数. 这些点统称**格点**.

对每个格点 A，可以给出它的坐标(x_A、y_A). x_A 代表 A 所在的行号码. y_A 代表列号码. 通常 x_A 从 0 取到 49，而 y_A 从 0 取到 20. 此外，在第 -1 行只有一个点$(-1,20)$，代表 1000；在第 50 行也只有一个点$(50,0)$，也代表 1000.

A 点所代表的数记作 $P(A)$. 我们来分析一下，$\lg P(A)$和 A 的坐标有什么关系. 由于点子每右移一格，它所代表的数的对数增加 0.001，每向下移一格，所代表数的对数增加 0.020. 因此可见，若 $A=(x_A,y_A)$，则有：

$$\lg P(A)\equiv 0.020x_A+0.001y_A \pmod 1,$$

我们用"$\stackrel{*}{=}$"表示两边的数的有效数字相同，则

$$P(A)\stackrel{*}{=}10^{0.020x_A+0.001y_A},$$

这两个公式便是我们进一步讨论的基础.

从这两个公式可以看出：第 k 行的右端点和第 $k+1$ 行的左端点代表一个数. 这是因为，对于

$$A=(k,20),B=(k+1,0)$$

必有：

$$\lg P(A)\equiv 0.020k+0.001\times20=0.020\times(k+1)+0.001\times0$$
$$\equiv \lg P(B) \pmod 1.$$

下面讨论这些格点的几何性质：

(i)若 $ABCD$ 成平行四边形，则必有：

$$P(A):P(B)\stackrel{*}{=}P(D):(C),$$

或者说：$P(A)P(C)\stackrel{*}{=}P(B)P(D)$. 反之亦然.

证明 根据解析几何的知识，或直接在图上用全等三角形来证明，都可知道，当 $ABCD$ 成平行四边形时，它们的坐标(x_A,y_A)，(x_B,y_B)，(x_C,y_C)，(x_D,y_D)之间应满足关系：

$$x_A - x_B = x_D - x_C, \quad (1)$$

$$y_A - y_B = y_D - y_C, \quad (2)$$

用 0.020 乘(1)式，0.001 乘(2)式，再相加，可得

$$(0.020x_A + 0.001y_A) - (0.020x_B + 0.001y_B)$$
$$= (0.020x_D + 0.001y_D) - (0.020x_C + 0.001y_C),$$

亦即：

$$\lg P(A) - \lg P(B) \equiv \lg P(D) - \lg P(C) \pmod 1.$$

$$\therefore P(A) : P(B) \stackrel{*}{=} P(D)) : P(C).$$ □

(ii)若 A、B、C 三点共线，且 B 在 AC 线段上，$\overline{AC} = \lambda\,\overline{AB}$，则：

$$P(B)^\lambda \stackrel{*}{=} P(C) \cdot P(A)^{\lambda-1}.$$

证明 由 $\overline{AC} = \lambda\,\overline{AB}$，可知：

$$x_A - x_C = \lambda(x_A - x_B), \quad (3)$$

$$y_A - y_C = \lambda(y_A - y_B). \quad (4)$$

用 0.020 乘(3)、0.001 乘(4)，再相加，得：

$$\lg P(A) - \lg P(C) \equiv \lambda(\lg P(A) - \lg P(B)) \pmod 1.$$

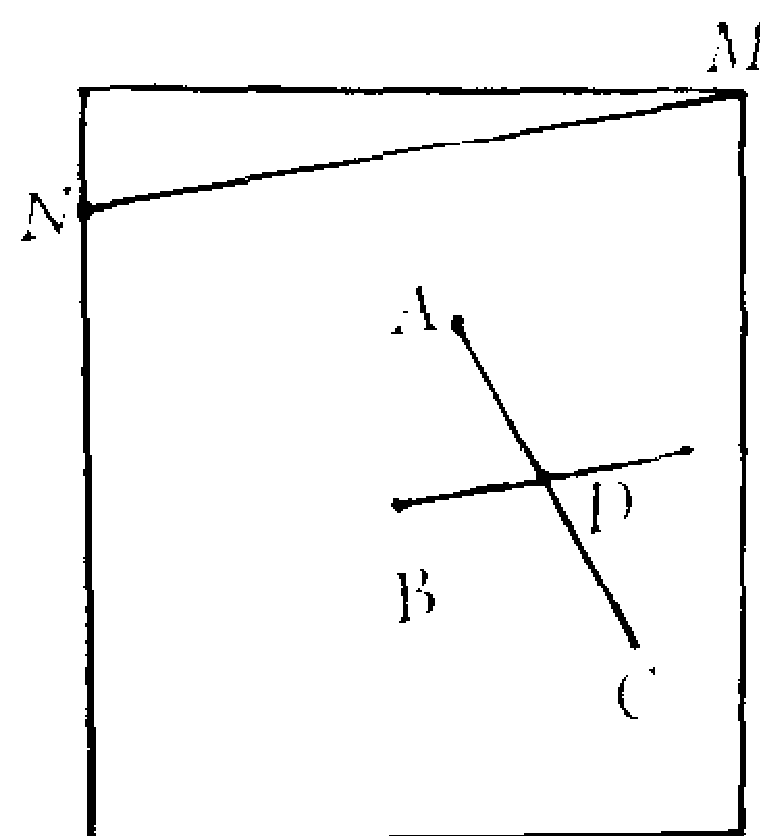
$$\therefore P(A) : P(C) \stackrel{*}{=} P(A)^\lambda : P(B)^\lambda.$$

$$\therefore P(B)^\lambda \stackrel{*}{=} P(C) \cdot P(A)^{\lambda-1}.$$ □

作为推论，我们得到：若 B 是 A、C 的中点(即 $\lambda=2$)，则 $P(B)$ 与 $P(C)$ 与 $P(A)$ 的比例中项仅相差一个 10^n 因子.

下面的性质，也许是最为有趣的了：

(iii)记 $M=(-1,20)$，$N=(0,0)$. 作直线 MN. 又设 A、B、C 是三个格点. 过 B 作 MN 之平行线，交 AC 于 D. 若 $AC = \lambda AD$，则必有：(如图)



$$P(B)^\lambda \stackrel{*}{=} P(C) \cdot (A)^{\lambda-1}.$$

证明 如果我们对所有的点都赋予坐标，且仍以(0,0)为原点，并保持格点之坐标不变，则直线 MN 之方程为

$$20x+y=0, \tag{5}$$

而 $BD /\!/ MN$，故 BD 方程为：

$$20x+y=20x_D+y_D. \tag{6}$$

由 $AC=\lambda AD$，可知：

$$x_A-x_C=\lambda(x_A-x_D), \tag{7}$$

$$y_A-y_C=\lambda(y_A-y_D), \tag{8}$$

用 0.020 乘(7)，0.001 乘(8)，再相加，得：

$$\begin{aligned}&(0.020x_A+0.001y_A)-(0.020x_C+0.001y_C)\\&=\lambda[(0.020x_A+0.001y_A)-(0.020x_D+0.001y_D)].\end{aligned} \tag{9}$$

由于 B 在 BD 上，把 B 的坐标 (x_B, y_B) 代入(6)：

$$20x_B+y_B=20x_D+y_D,$$

即

$$0.020x_B+0.001y_B=0.020x_D+0.001y_D. \tag{10}$$

把(10)代入(9)的右端，得：

$$\lg P(A)-\lg P(C)\equiv\lambda(\lg P(A)-\lg P(B)) \pmod 1.$$

$$\therefore\quad P(B)^{\lambda}\stackrel{*}{=}P(C)\cdot P(A)^{\lambda-1}.$$ □

（二）把反对数表当成乘除计算图

根据上面所证明的整体反对数表的几何性质，特别是性质 i，可以把这表当成乘、除算图来使用. 但是，不能直接在表上画平行四边形来作计算，因为画上几次，表上就一塌湖涂了！

我们建议一种方法来实现表上的计算过程.（有兴趣的读者，完全有可能找到另外的方法.）

找一张和表一样大小的透明塑料片. 例如. 可以用幻灯纸，洗净了的 X 光胶片，甚至厚一点的聚氯乙烯薄膜也可以. 在塑料片上用针或圆珠笔画上和整体对数表边框一样大小的矩形，矩形的四角，相当于四个“1000”所在的位置，画上四个小长方形. 把这四

个小长方形,叫做"输出位".上边的两个输出位,用红色标出,下面的,用蓝色标出.在这个塑料片上写一个"正"字,以免弄反了方向.以下,把这个塑料片叫做"明片".

以下分别介绍除法、乘法和比例计算法.

除　法

把明片放在表上,使四角的输出位对准四个"1000",即在输出位读到的恰是"1000".这个步骤以下简称"对正".在除数 $D(A)$所在的位置,用钢笔画一个小长方形把除数正好套住,这个步骤,以下叫做"在 $D(A)$处画记号".(如果要简便,这个记号也可以不画小长方形,而仅仅画出这个小长方形的左边的一条边,即在格点 A 处向上画一条竖直的线段,其长度为行宽.)然后平移明片,使所划的记号对准被除数.这时,四个输出位中必然恰有一个落在表内,在输出位处,便可读到商的四位有效数字.

这四步,简括起来便是:对正,在除数处画记号,记号对着被除数,在输入位读答案.

道理何在呢?设我们最后在右上角的那个输出位读到了答案 $P(C)$.记右上角点为 M,除数位置在 A,被除数位置为 B,则由于平移,使 $MABC$ 成为平行四边形.由性质 i,可知

$$P(M):P(A)\overset{*}{=}P(C):P(B).$$

但$P(M)=1000$,故

$$P(C)\overset{*}{=}\frac{P(B)}{P(A)}.$$

由于我们得到的读数仅仅是所求商的有效数字,故最后还要定位.定位规则是:

甲.若商在蓝色输出位读出,则:

商的位数=被除数位数-除数位数.

乙.若商在红色输出位读出,则:

商的位数=被除数位数-除数位数+1.

这个规则的证明,请读者作为练习,自行完成.至于一个数的位数,是指其首位有效数字与小数点之“有向距离”.例如:43.4,61,37.125 都是两位数,8,1.5 是一位数,0.33,0.105 是 0 位数,0.0094,0.00881 是负 2 位(−2 位),等等.

乘　法

第一步仍是对正;然后在乘数处划记号.第三步是把明片旋转 180°,即使“正”字向下,第四步是把记号对准被乘数,最后在输出位读到积的有效数字.

道理是这样的:若以 M 记输出位原位(即角上的点),A 记乘数位置,B 记被乘数位置,C 记读答数处,则由于平移和 180°旋转 $AMBC$ 恰为平行四边形,因而 $P(A)\cdot P(B)\stackrel{*}{=}P(M)P(C)$,但 $P(M)=1000$,故 $P(C)\stackrel{*}{=}P(A)\cdot P(B)$.

定位法如下:

甲．若答案在蓝色输出位读出,则:

积的位数=相乘两数位数之和,

乙．若答案在红色输出位读出,则:

积的位数=相乘两数位数之和−1.

解比例式

$$\frac{a}{x}=\frac{b}{c}.$$

第一步,适当选择一个输出位,把它套住 a 所在的矩形格,使 b 落在明片的大方框之内(不然,则换一个输出位).第二步在 b 处划记号;第三步平移明片使记号对准 c,最后在输出位读出 x 的有效数字.

原理从略,读者不难用平行四边形法则导出.定位法则如下:(注意:我们在计算过程中,两次使用了输出位)

甲．若两次所用的输出位同色,则

x 位数=a 位数+c 位数−b 位数.

乙．若两次不同色，在蓝色输入位读答数：

x 位数$=a$ 位数$+c$ 位数$-b$ 位数-1.

丙．若两次不同色，在红色输出位读答数：

x 位数$=a$ 位数$+c$ 位数$-b$ 位数$+1$.

开 平 方

利用性质 ii 中关于比例中项的推论，容易想到：把 a 的代表点 A 与 1000 的代表点 B 连接，则 AB 的中点，应当是 $\sqrt{a}$ 的有效数字的代表点.

但是，这里有两个问题：

第一，1000 有四个代表点，和哪一个相连呢？回答是：

若 a 的位数为奇数，行号为偶数时和左上角连，行号为奇数时和右上角连；

若 a 的位数为偶数，行号为偶数时和左下角连，行号为奇数时和右下角连.

简括之：位数定上下，奇上偶下；行号定左右，奇右偶左. 其中道理，留给读者思索.

第二，AB 的中点 C 如果不正好落在格点时怎么办？

按照上述连线法，可以保证 C 点落在格点所在的水平行线上，即落在格点或两个同行的格点之间.（这时，用一根直尺，或利用明片上的边线很容易找到 AB 之中点 C. 方法是应用平面几何里的“等距平行线把线段等分”的原理.）这时，可利用比例内插法读出答数的前四位有效数字.

例如，求 $\sqrt{2}$ 的算法如下：2 是奇数位，而 2000 在 15 行，按奇上奇右，把 2000 的代表点 A 与右上角 1000 的代表点 B 连接，其中点在第 7 行 1413 与 1416 的代表点之间，取平均值为 14145. 定位后得 1.4145，误差小于 0.0003.

如果在表上找不到被开方数 a 的代表格点，也可用比例内插法定 A 的位置. 如求 $\sqrt{30}$时，在表上没有 3000，在 23 行找到 2999

和 3006，两者差 7，而 $3000-2999=1$，就在 2999 和 3006 两点间，靠近前者约 $\frac{1}{7}$ 处定下 3000 的点 A，按偶下奇右的原则，把 A 与右下角点连线，其中点在 5470 和 5483 之间，故 $\sqrt{30} \doteq 5.477$.

(三)举一反三，精益求精

除了反对数表，还有平方表，开方表，倒数表，三角函数表…….把它们排成整体表，又该有什么几何性质和规律呢？用它们又可以进行些什么计算呢？

肯定地说，这里面确是大有文章.利用平方表，可以作勾股计算——知道直角三角形两边求第三边；利用倒数表，可以计算并联电阻、串联电容以及透镜焦距；利用正弦对数表，可以计算斜三角形的边、角；利用二重反对数表($\lg(\lg x)$的反函数)，可以计算多次方幂，如 $\sqrt[100]{2}$，等等.

这样把总体表当成算图使用，其精度往往比一般算图为高.有效数字为三到四位.制图方法简便——只要在方格纸上抄一下便行了.

当然，还可以精益求精.例如：如何缩小表的尺寸，如何使表上出现的数字是连续数字而避免使用比例内插法，都有进一步的方法.这种“总体表图算法”将使大家对数表刮目相看，从似乎是枯燥死板的一堆堆数码里，找到了无穷的乐趣.

（选自《初等数学论丛》第 9 辑）

在二次函数的背后

华东师范大学数学系　张奠宙

二次函数 $y=ax^2+bx+c$ 是中学数学的基本内容，从初等数学的观点来看，它似乎已被研究完毕．要再从抛物线，准线，焦点等等入手编制各类花样，已是强弩之末，引不起多大兴趣．

殊不料，近十余年来，区区二次函数，却和迭代，不动点，吸引子，混沌，分维等现代数学挂上了钩，成为这类新概念最简明易懂的实例，究其实质，乃因为二次函数是非线性函数中最简单的一种．

20 世纪下半叶以来，线性数学已趋成熟．线性代数，线性泛函，线性系统，线性方程等等，大体上已有了成套的理论，完整的计算方法，而现实世界中大量的非线性问题，正等待数学家去解决．非线性数学于是应运而生，并获得蓬勃发展．

（一）二次函数的不动点

函数 $f(x)$ 的不动点 x_0，是指 x_0 满足

$$f(x_0)=x_0.$$

求方程 $g(x)=0$ 的根 x_0，等于求 $f(x)=g(x)+x$ 的不动点，所以这两者其实是一回事，从几何上看，求 $f(x)$ 的不动点，就是求 $y=f(x)$ 和 $y=x$ 两曲线的交点，这些交点的横坐标就是 $f(x)$ 的不动点．

让我们看最简单的二次函数 $y=x^2$．抛物线 $y=x^2$ 和直线 $y=$

x 的交点为(0,0)及(1,0)，因此 0 和 1 是 $f(x)$ 的两个不动点.(图 1)

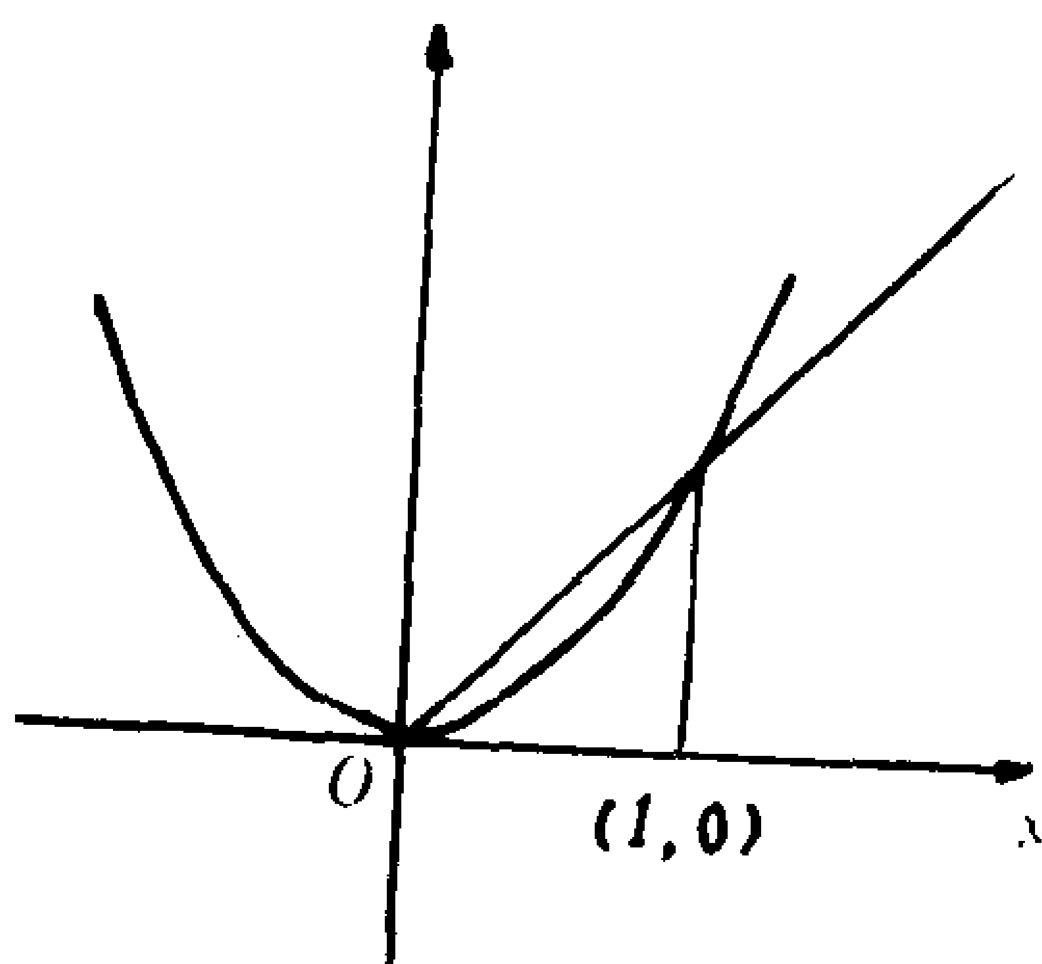


图 1

仔细观察这两个不动点，又有不同的性态. 在 0 附近的取初值 x_0，如由函数 $y=x^2$ 迭代，则都会收敛于 0，即被 0 所吸引，但是在 1 附近的取初值 x_0 再经 $y=x^2$ 迭代，则会被 1 所排斥，远离 1，也就是说，对迭代数列 $x_n=x_{n-1}^2$，$n=0,1,2,\cdots$

当 $|x_0|<1$ 时，$x_n=x_{n-1}^2$，

则 $x_n\to 0$；

当 $x_0>1$，$x_n=x_{n-1}^2$，则 $x_n\to\infty$；

$0<x_0<1$，$x_n=x_{n-1}^2$，则 $x_n\to 0$.

这时我们称 0 是吸引子，1 是排斥子.

(二)神奇的参数 λ

我们看一个特殊的二次函数

$f(x)=\lambda x(1-x)$，λ 是实参数，$x\geqslant 0$，

这个函数也有两个不动点. 因为

$$\lambda x(1-x)=x$$

的解是 $x^*=0$ 和 $x^*=1-\dfrac{1}{\lambda}$.

我们将 λ 值分为几种情况来讨论

(1)$0<\lambda<1$，此时 $1-\dfrac{1}{\lambda}<0$，不合题意，故只有一个不动点，$x^*=0$，由图 2 来看，任取初值 x_0，经迭代后都会收敛于 0，所以 0 是吸引子.

(2)$1<\lambda<3$，此时 $f(x)=\lambda x(1-x)$ 仍有两个不动点 $x^*=0$，

$x^* = 1-\frac{1}{\lambda}$. 此时 $1-\frac{1}{\lambda}$ 有意义，可是此时 $1-\frac{1}{\lambda}$ 是吸引子，而 0 却是排斥子，这可以验算，也可以由图 3 直观看出，这时勿论 x_0 为何靠近 0，经过迭代后，x_n 的值都会趋向 $1-\frac{1}{\lambda}$.

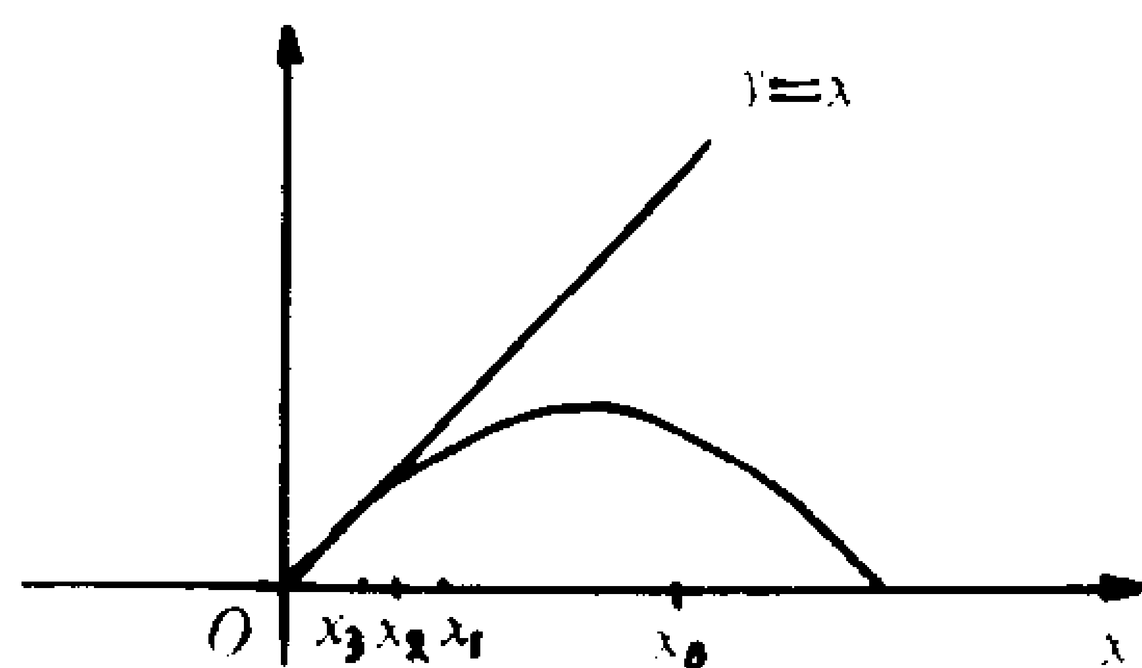


图 2

(3) $3<\lambda<1+\sqrt{6}\approx 3.449$.

这时的不动点当然还是 0 和 $1-\frac{1}{\lambda}$，但它们都是排斥子，由图 4 可以看出，这时任取的 x_0，经迭代后，既不收敛于 0，也不收敛于 $(1-\frac{1}{\lambda})$，而在两个点 x_{11} 和 x_{12} 之间来回跳动，经计算，这两个点是

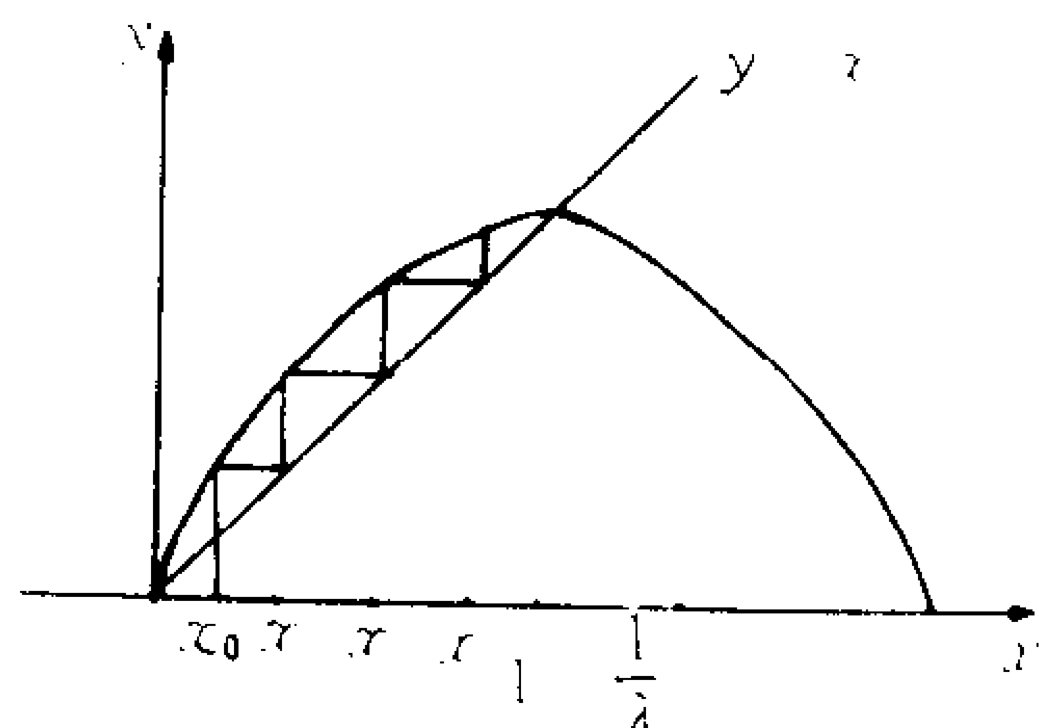


图 3

$$f^2(x)=f(f(x))$$
$$=\lambda^2 x(1-x)[1-\lambda x(1-\lambda)]$$

的四个不动点中的两个

$$x_{11}=\frac{1}{2\lambda}(1+\lambda-\sqrt{(\lambda+1)(\lambda+3)}),$$

$$x_{12}=\frac{1}{2\lambda}(1+\lambda+\sqrt{(\lambda+1)(\lambda+3)})$$

（当然 $f(x)$ 的不动点 0 和 $1-\frac{1}{\lambda}$ 也是 $f(f(x))$ 的不动点）.

这说明，当 $\lambda>3$ 时，不动点 $1-\frac{1}{\lambda}$ 由吸引子转化为排斥子，同时派生出两个二重周期点 x_{11} 和 x_{12}，它们不是 $f(x)$ 的不动点，却是 $f(f(x))$ 的不动点，即 $f(x_{11})=x_{12}$, $f(x_{12})=x_{11}$，迭代两次后，

$$f(f(x_{11}))=x_{11}, f(f(x_{12}))=x_{12}.$$

(4) $1+\sqrt{6}<\lambda<3.544$.

这时，两个 2 周期点 x_{11} 和 x_{12} 又会分化为四个 4 周期点：

$$
\begin{array}{ccc}
0.3828 & \xrightarrow{f} & 0.8269 \\
\uparrow f & & \downarrow f \\
0.8750 & \longleftarrow & 0.5009
\end{array}
$$

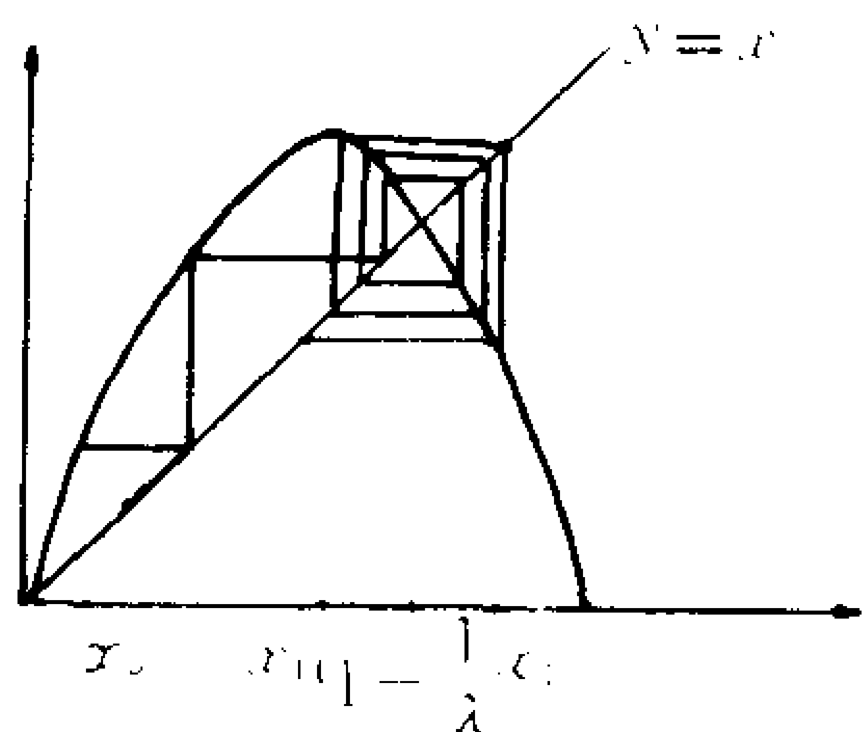


图　4

随着 λ 的增大，f 的周期点个数不断增加，周期重数也不断加大，参数 3 是一分为二的分岐值，$1+\sqrt{6}$ 是二分为四的分岐值，3.544，3.564 等等分别是四分为八，八分为十六等等的分岐值，这一分岐会不断发生，分岐值不断靠近 $\lambda=3.569945972$ 时，出现周期为∞的解，此时即进入混沌状态，也就是说，存在这样的初值 x_0，经 $f(x)$ 迭代后，无论怎样再也回不到自身，没有规律可寻. 这种状态无以名之，遂称之为 Chaos，即混沌一片之意.

（三）周期 3 则乱七八糟

1974 年 4 月的一天，美国马里兰大学的博士研究生李天岩走进导师 J·约克（Yorke）的办公室. 约克随口对李天岩说："试试区间迭代怎么样？"一个星期之后，李天岩证明了：

定理　设 $f(x)$ 是区间 $[a,b]$ 上的连续函数，且是自映射（即 $f(x)$ 的值域也在 $[a,b]$ 内），若 f 有 3 周期点，则对一切正整数 n，f 都有 n 周期点.

这一定理看上去很简单，证明也相当初等（见《自然杂志》1985 年"从平凡的事实到惊人的定理"一文），但是这篇文章却成为研究混沌现象的一个里程碑.

从一个初值 x_0，经迭代后在区间 $[a,b]$ 中游荡，却不回到自己，即使回到自己，如果 n 的值十分大，我们所看到的 x_n，已经具

有很大的随机性，这一串数值 x_n，简直可以看成是随机数了，这一现象，使人们对确定性现象和随机性现象的关系，也有了新的认识，现在把由一个完全确定的函数，经初值迭代产生混沌现象的一串数值，称为拟随机数. 二次函数背后居然有混沌现象，该是我们始料所不及的.

至于什么是混沌，尚无统一的看法，这里是一种定义：

设在$[a,b]$上有连续自映射 $f(x)$，如具有以下性质，称 f 产生混沌现象.

(1)f 的周期不动点的周期无上界.

(2)存在一不可数子集 $S\subset[a,b]$，满足

1° 对任意 $x,y\in S$，当 $x\neq y$ 时

$\limsup|f^n(x)-f(y)|>0$;

2° 对任意 $x,y\in S$

$\liminf|f^n(x)-f^n(y)|=0$;

3° 对 $x\in S$ 和 f 的任一周期点 y，

$\limsup\limits_{n\to\infty}|f^n(x)-f^n(y)|>0.$

由此定义可以看出，S 中任何两点经迭代后不会彼此越来越靠近(上确界大于 0)，也不会越来越分离(下确界为 0)，且 S 中的点不会和任何周期点不断靠近，总之，呈现一片混沌状态.

由混沌理论可以想到，我们所看到的许多杂乱无章的状态，如满天乌云、滔滔流水等等，也许正是某一确定现象所产生出来的，甚至只是一个二次函数！无序与有序，现在似乎有了新的理解.

数学史话

一则参考消息引发的数学热
——兼谈 Beatty 定理

安徽师范大学数学系　胡炳生

1978 年 8 月 19 日我国《参考消息》第 4 版刊载了当年在布加勒斯特举行的第 20 届国际数学奥林匹克竞赛题. 这使国内数学教育界才第一次知道，世界上有“国际数学竞赛”，而且已经举办了 20 次. 当时正值全国科学大会召开不久，向科技现代化进军热潮正在兴起. 因此，这则本不显眼的消息，却引起了全国数学教育界的极大兴趣. 他们急于从中了解新的知识，了解外面的世界.

然而令人棘手的是，其中第 3 题异乎寻常地难. 这一题在 1978 年 8 月 19 日《参考消息》第 4 版上是这样印的：

“3. 设 f、g：$Z^+ \to Z^+$ 严格递增函数，且 $f(Z^+)ug(Z^+)=Z^+$，$f(Z^+)ng(Z^+)=\Phi$，$g(w)=f[f(u)]+1$，求 $f(2w)$. 这里 Z^+ 是正整数集合，Φ 是空集.”

这里有明显印错的字母和符号，如将集合符号 $\cup$ 印成“u”，$\cap$ 印成“n”；$\varnothing$ 印成“Φ”；将自然数 n 印成 u 或 w. 这都容易鉴别出来. 于是，这个问题变成了：两个严格递增函数 f、g：$Z^+ \to Z^+$，满足以下条件

1° $f(Z^+)\cup g(Z^+)=Z^+$；

2° $f(Z^+)\cap g(Z^+)=\varnothing$；

3° $g(n)=f[f(n)]+1$.

求函数 $f(n)$ 或 $f(2^n)$ 的表达式.

为了求得本题的答案，中学生们去问他们中学的数学老师；中

学数学教师又去问他们的大学老师；大学的青年教师们又去问教授．如此连锁反应，几乎全国的数学教师、教授们都被卷入这场解题热潮．

经过大约半年的时间，这题的解答终于被陆续求得，并发表在各地自编的刊物、书报和资料上．据当时所见，有北京、云南、武汉、常州等地提供的解答，一般都很长，少则几页，多则十几页．所求得的函数表达式十分古怪：

$$f(n)=[n\alpha],\alpha=\frac{1+\sqrt{5}}{2};$$

$$g(n)=[n\beta],\beta=\frac{3+\sqrt{5}}{2}.$$

作者本人当时也参与其事[1]，并找出函数 f 的递归表达式如下：

$$f(n+1)=\begin{cases}f(n)+1, & n\in g(Z^+)\\ f(n)+2, & n\in f(Z^+)\end{cases}$$

同时，还提出一种猜想：本题“可能不是要求 $f(n)$ 的表达式，而是只要求出 f 在某一 n 的值，例如求 $f(200)$．”这样，根据上述递归表达式，或其他办法，就可求得 $f(200)=323$．

为什么会猜想是求 $f(200)$呢？因为“w”像是“00”的草写结果．

1979 年春，当时任中国科大副校长的龚昇教授，从国外得到一份英文资料，是关于 20 届 IMO 解答和说明的．这才将上述试题之谜的谜底揭开[2]．原来，这一题所要求的结论是 $f(240)$的值．虽然，我未将具体数字猜对，但大方向猜对了．

据后来的了解，《参考消息》上发表的试题，是我国一个访问罗马尼亚代表团的成员，草草翻译后交给该报编辑，在匆忙中发表的．他们本来的目的，无非是想给大家“参考”而已，没想到酿成了一场不大不小的风波．而这风波并非坏事，它无形中引起了我国中学生、中学数学教育界，以至整个数学界和科技界，对中学数学竞

赛长久的热心关注.从这个意义上来说,《参考消息》上关于IMO-20届试题的错印,是当代中国数学史上的一个小幽默,它引出了一段数学佳话.

下面说一说本题的背景.其实,本题是以下 Beatty 定理的一个特例.

Beatty 定理 若两个无理数 α、β 均大于 1,且 $\frac{1}{\alpha}+\frac{1}{\beta}=1$,则 $f(n)=[n\alpha], g(n)=[n\beta]$ 满足

1° $f(n), g(n): N\to N$ 为递增函数;

2° $f(N)\cup g(N)=N$;

3° $f(N)\cap g(N)=\varnothing$.

简证如下:1° 显然.

其次,对任一自然数 k,考虑 f 和 g 在片段 $|1,k|$ 上值的分布情况.设在其上 $f(n)=[n\alpha]$ 取 n_1 个值,$g(n)=[n\beta]$ 取 n_2 个值,那么

$$n_1=\max\{n\mid[n\alpha]\leqslant k\},$$

从而 $[n_1\alpha]\leqslant k<[(n_1+1)\alpha]$,

于是 $n_1\alpha<k+1\leqslant(n_1+1)\alpha$,

$$n_1<\frac{k+1}{\alpha}\leqslant n_1+1,$$

但因 α 为无理数,右边等号不可能成立,故得

$$n_1<\frac{k+1}{\alpha}<n_1+1. \tag{1}$$

同理可得 $n_2<\frac{k+1}{\beta}<n_2+1.$ (2)

两式相加,得

$$n_1+n_2<(k+1)\left(\frac{1}{\alpha}+\frac{1}{\beta}\right)<n_1+n_2+2,$$

即 $n_1+n_2<k+1<n_1+n_2+2$.

但在 (n_1+n_2) 与 (n_1+n_2+2) 之间只有一个整数,故证得:

$$n_1+n_2=k.$$

由此容易证明 2°及 3°.

据此定理，可以选择不同的 α、β，获得不同的具体函数 $f(n)$、$g(n)$. 例如，令 $\alpha=\sqrt{2}$，$\beta=2+\sqrt{2}$，所得函数 $f(n)=[n\sqrt{2}]$，$g(n)=[n(2+\sqrt{2})]$，除满足前述条件 1°—3°外，还满足关系

$$g(n)=f(n)+2n.$$

参考文献

[1] 石洞，数学归纳法与递归函数，《数学函授教学》，1979 年第 1 期.

[2] 石洞，一个数学试题的"谜"底，《数学函授教学》，1979 年第 2 期.

[3] 张国铮译，第 20 届国际数学奥林匹克竞赛，《数学函数教学》，1979 年第 2 期.

[4] 胡炳生，《数学解题研究和发现》，中国展望出版社，1989 年.



理查德·厄尼斯特·贝尔曼

Nina Bellman　Eric Bellman　Kirstie Bellman

名人文集以其家属撰写的轶事作为开场白并不多见.这本文集之所以这么做,除了他著作众多,难以一一列举之外,更重要的是因为,了解他的人都知道,他并不墨守成规,而是多才多艺的.他喜欢下棋、打网球,酷爱听古典乐和爵士乐,对多国的文学和艺术颇有研究.他身材高大,机智幽默,从不夸夸其谈,但总是很有威信.有时,又会很紧张,缺乏耐心,不能容忍任何一点愚昧.53岁那年,脑部肿瘤切除手术后的并发症使他致残.这个素来活跃的人就从此在与病魔搏斗的过程中汲取精神力量.他的一生有两个迥异的方面:他是一个受人敬重的学者;又是个鲜为人知的贝尔曼,他深受病痛折磨,把自己静静地关起来,连至交老友都拒绝见面.

理查德·厄尼斯特·贝尔曼1920年8月26日出生于纽约.他父亲John James Bellman是个有名望的人,一心一意要把迪克(理查德的昵称)培养成布鲁克林的贵族.迪克很少提及他的童年,但偶尔也会不经意地漏出些许片断.12岁时,他们全家去加勒比度假,这是他30年代家道中落后最后一次享受生活.此后,迪克本应放弃学业,挣钱养家的,但父亲还是尽力支持他上了大学.迪克形容自己小时候又小又害羞,后来长成高大笨拙的少年.

迪克从小就想当一名物理学家,父亲很关注他对科技方面的兴趣,常送他一些逻辑和悖论方面的书.但当他最终成为数学家时,却又遭到了家人的反对,他们想让他从事诸如医生、律师、商人

之类的报酬优厚的职业. 这些反对意见时常困挠着他. 他说他自己也很奇怪,当数学家竟然也能赚钱. 他本来已经作好充分准备,白天去挖水沟挣些钱,晚上再研究数学.

在大学里,他是校数学队的主力,赢得了很多荣誉. 当时他很热衷于研究古董,但后来不干了,因为他不具备当考古学家所需的财力. 那时起他开始学拉丁语和希腊语. 他最珍贵的财富之一,是由他拉丁文老师 Lucy Maria Prescott 亲笔签名的诗人维吉尔的手稿. Lucy 使他终生难忘.

在后来的学习中,他发觉数学才是他的至爱. 15 岁时,他已经清楚地认定物理涉及面太小,并不合他的胃口. 物理学中有太多东西需要强记,而他一向认为死记硬背那些书上现成的结论是毫无意义的. 而数学却有很大的发展前途. 他不放过任何一个看英语文献的机会,像 Hardy、Littlewood 和 E. T. Bell 的书他都看. 有一次,他看到一套 Borel 丛书,为了能看懂,他学习了法语. 由于很多数学著作都是用德语写的,所以他又学了德文. 后来他学了俄语,连罗马和西里尔文字的数学著作也可以读懂了. 有一次,他当着一个朋友的面,随手拿起一份葡萄牙语的报纸,把它翻成英文,让那个朋友大吃一惊,因为他从来没有学过葡萄牙语. 他说在任何语言中,数学名词总是有限的,所以只要明白句法结构,他就能读懂. 而如果是葡语小说,他肯定读不懂的.

受父亲影响,他是个宗教怀疑论者. 每星期,他都被父亲带去不同的教堂参加各种宗教庆典. 他惊异于宗教的理想与历史上以上帝的名义所做的那些残酷、伪善的事之间的反差. 他还注意到一些学术界的巨子也信仰上帝,当被人问起时,他总说每个人都有权选择自己的信仰. 但是诸如"以纽约州和上帝的名义……"之类的说法总让他感到啼笑皆非. 小时候,每当想起父母之间的一些不顺心的事,他就会跑到街上去,嘴里念叨着:"真有上帝就好了,有上帝就好了……"

他毕业于布鲁克林学院(Brooklyn College),后在约翰·霍普金斯大学(John Hopkins University) 深造.此间,他父母先后去世. 21 岁时他同 Betty－Jo Kates 结婚,这样他至少有了自己的家.这段婚姻维持了 20 年.

他在威斯康星大学获得了硕士学位(University of Wisconsin),此后,他致力于战争计划的研究,后来又被选派去投入“曼哈顿计划”(Mahhatten Project)他觉得自己为大战作了必要的贡献.

多年以来,他为《数学评论》评论一些论文.他们知道他懂俄语,就把所有的斯拉夫语论文都送到他那儿.大约一年后,他给编辑去信抱怨说他也有能力评论英语的论文.对付那些俄语论文,他有自己的一套妙法.他会在评论的末尾加上一句说有一篇乌克兰语或白俄罗斯语的摘要文章值得参考.编辑一般都会发现这个把戏,并把这句话删掉,但有时也会出些疏漏,那就够他得意了.

战后他在普林斯顿(Princeton)获得了学位.那时,他有个朋友 Ernst Strauss 替爱因斯坦工作,他问 Dick 是否想安排一次会面. Kirstie(Bellman 的女儿)回忆说:“几年后,我问父亲他怎么看待爱因斯坦.他耸耸肩说他干了些有益的工作.我父亲的态度就是这样,他对 Galileo,Descartes 和 Poincaré 这些学术先驱都有深深的敬意,但对当代的人却要相对少些.我怀疑他是把当代的那些学者当成同辈的竞争者.”

在普林斯顿修完学业,迪克到史坦福大学(Stanford)任教.他那战争年代培养起来的对西部的热情始终未减.他热爱西部,西部对他来说是个自由之邦,有很大的活动空间.他身材高大,在各方面都需要足够的空间,这也是他一度离开传统学术轨道的原因之一.虽然学术研究是他所珍爱的,但他并不认为一个人能只为了做学问而活着.事实上,他知道科学史上有不少例子能证明他的这一观点,所以,他总是给学生们以最大的自由来发挥他们的所长.不幸的是,他感到仍有很多年轻的科学家明哲保身,在传统科学的领

域里兜圈子.

关于教育，他有一些很好的观点.他认为尝试——失败——再尝试是成功的一个部分，而我们的学校教育却只要求学生们给出正确答案，而并非让他们学会更深层的思考.他认为失败是成功之母，只让学生给出正确答案，会阻碍社会向前发展的.他所使用的是一种能动的教学方法，鼓励出错和继续尝试.从现有的水平出发，必要时作一些好的调整直至达到预期效果.他有时会把他的想法不断地修正，直到它们奏效为止；有时又会摒弃旧的想法来想新的.（“我刚丢了一个定理”）.他说他放弃过不少的观点，有些可能应该能够发表了.他常对 Kirstie 说：“要从你懂的做起”.

他喜欢旅游.Eric 和 Kirstie 在他那辆驰骋于美国的 Packard 车上度过了很多暑假.Eric 和迪克一样，从小就热爱考古.事实上，他们两个都曾表示，如果经济上能自立的话，就会去当考古学家.一有机会，迪克就会带 Eric 参观博物馆或者是真正的废墟.Eric 还记得六岁时去洛斯阿拉莫斯的一次旅行，“我们和 Milt Wing 一起坐吉普从新墨西哥(New Mexico)出发，沿一条泥泞的路来到一个古老的印第安废墟，那里到处都是碎陶片.爸爸帮我爬绳梯进了一个山洞.”迪克并不喜欢远足或是露营，他真正热爱的是那来之不易的文明成果.

Kirstie 说：“我们家是孩子成长的好地方.父亲的名气越来越大，来我们家的各国客人也越来越多，感恩节也成了外国学生和客人的大聚会.父母都不是性别歧视者或偏执的人，所以都交游广泛.父亲有丰富的历史和外语知识，使得他比大多数美国人的视野要开阔得多，所以他和那些不同文化的人们建立起了真挚的友谊.”

在史坦福任期届满，贝尔曼举家搬到了加州的圣莫尼卡(Santa Monica)，并于 1952 年在那里成为了兰德公司(RAND Corporation)旗下的数学家.在兰德的经历更坚定了他投身应用

数学的信念，并使他看到数学在很多领域都能被很好地应用.

1962 年，他认识了 Nina Day，并与她结了婚. 对他来说，这段时期既令他振奋又极富挑战性. 这骚动的 60 年代里，他的新任太太和两个顽皮的十几岁的孩子给他带来了很多快乐和要求. 那时他正值壮年，人们记得他很温文尔雅，精力充沛，又颇有些傲慢. 从那时起，他获得了广泛的认可，薪酬丰厚，终于有机会圆了他的旅游梦，他和 Nina 开始周游世界，到处都留下了他们的足迹. 但是 Nina 却认为他们的第一次旅行一点儿也不令人鼓舞.

迪克喜欢旅游，结交世界各地的朋友. 在兰德这几年，他结识了很多有趣的人，但直到 1963 年，他一直都没有离开过美国. 回想我们的第一次环球旅行真的很好玩，但旅行本身却像是耐力测试. 他是去参加两个会议，分别在巴塞尔(Basel)和东京(Tokyo)，而且都是 63 年的 8 月份. 我们晚上从洛杉矶(Los Angeles)飞往巴黎(Paris)，累极了. 兰德给我们在一家挺不错的饭店里订了房，但房中的积尘却令人不敢恭维，迪克一夜没合眼，怕会得哮喘. 第二天我们就去巴塞尔，他对那里的住宿条件也不甚满意，就换了家好点的酒店. 然后他打电话去罗马，取消了公司的预订房间. 由于我们要在两会的间期在罗马呆五天，所以他在豪华的希尔顿饭店订了房. 在巴塞尔他抱怨会议大楼的门卫竟然非要让他付登记费才能进去. 他拒绝付钱，因为他是大会的发言人，可以免除. 于是双方都不肯让步，迪克气得说他不发言了. 最后是一个朋友借了他一个大会的徽章，让他进去发了言，这件事才算收场. 在罗马逛街、看古迹都很开心. 然后，我们飞往东京. 这次旅行比前次横穿大西洋更累. 法国航空公司有穿越亚洲的航班，途经罗马、海法(Haifa)、德黑兰(Tehran)、新德里(New Dehli)、曼谷(Bangkok)和香港，最后停靠东京. 整个旅行花了 24 小时，飞机的起飞降落，还有用餐，都吵得人不能睡觉. 到了日本，他又不喜欢那里的 Imperial 饭店，说它又旧又脏. 这可不是因为它不符合我们的审美，而是我们怕会过敏或

得哮喘，所以我们又去住希尔顿饭店，睡了整整 18 个小时. 旅途劳累让他感到很不舒服，但他还是硬撑着参加了日本工程会社(Japanese Engineering Society)的盛宴和 URSI 等大会. 在日本的最后几天是很愉快的，看看朋友，跟那些喜欢他动态法的人们谈谈，不论是年轻的学生还是年老的长者. 他交了很多朋友. 回家时却有一段小插曲，我们碰上了一个疑心重重的海关官员，好说歹说，他才终于相信我们是守法公民. 我们回到家，刚好碰上几年难遇的酷暑. 环球旅行打乱了我们的昼夜节律达数周之久. 不过从那以后，迪克学会了精心地安排行程，倒成了个防晕机的专家了.

1965 年，迪克加盟南加州大学(the University of Southern California)，成了数学、电力工程学和医学教授.

就在他发誓再也不离开圣莫尼卡的时候，出国旅行的机会却接踵而来. 1964 年去斯德哥尔摩和巴黎，1965 年出访东京和京都. 1966 年是个旅行大年. 阿伯丁大学(University of Aberdeen)是他系列讲学的第一站，在那里，他还应邀发表了对当前数学必修科目的评价. 然后是去巴西的圣保罗，回来后不久，又飞往莫斯科，途经哥本哈根、罗马，回程又路过斯德哥尔摩.

Nina 回忆说："苏联之行对迪克很重要，他在四年一度的国际数学大会(the International Congress of Mathematics)上作了一个小时的发言，他说这是他的无上的荣耀. 他又获得美国数学协会(the American Mathematical Association)颁发的首届 Norbert Weiner 奖的殊荣."

1969 年，迪克和 Nina 又一次去了斯德哥尔摩，然后是皇家工艺学院(the Royal Institute of Technology)，住了近一个月，在 Djursholm 还租了座房子. 1970 年，他又获得 Norbert Weiner 奖以及第一届 Dickson 生物数学奖. 接着，他去马耳他参加由民主机构研究中心(the Center for study of Democratic Institutions)召开的海上和平会议；去南斯拉夫出席夏季研讨会；到马德里观光游

览. Eric 和 Kirstie 集了厚厚一叠世界各地博物馆的明信片. Nina 想起他们最后几次旅行:"加拿大华铁卢大学(the University of Waterloo)的一位同事每年都邀请迪克去那里讲学,从 1967 年开始直到 1975 年他获得了一个数学荣誉学位,而那时他已经病了. 1971 年先是到墨西哥去了几天,5 月出访新西兰,为期一个月,紧接着在火奴鲁鲁住了一夜调整一下,又飞去南方,在惠灵顿(Wellington)、克莱斯特彻奇(Christchurch)、达尼丁(Dunedin)、北帕默斯顿(Palmerston North)、奥克兰(Auckland)各住了几天,迪克不无遗憾地说没看够新西兰实在太可惜了,新西兰真的太美了. 对他来说,最有趣的恐怕要数跟那里的工程师们讨论怎样用应用数学来解决他们面临的问题."

秋天,又去了一次加拿大之后,迪克和 Nina 又在 11 月份去东京和京都咨询,跟着就去台湾住了两周,在台北咨询讲学. Nina 的母亲 Andrea Day 是个传教士的女儿,是在中国出生的,基于这个原因,再加上迪克的声望,使他们机会难得地受到蒋介石夫人的接见.

1972 年是他最后一年出国旅行. 4 月去南斯拉夫的斯普利特市(Split),途经伦敦,去圣巴巴拉(Santa Barbara)参加了民主机构研究中心发起的一个小会. 飞机又停靠罗马,虽说时间不长,但已足够逛逛街市,看看古迹了. 斯普利特是个典型的罗马式城市,到处都有古迹,一直可以追溯到住在那里的罗马皇帝戴克里先的时代. 这是地中海污染问题大会的最好的序曲. 他对他在会上所作的题为"地中海的数学造型术"(Mathematical Modeling of the Mediterranean)的发言非常满意.

每当别人想起迪克毫无顾忌,大胆创新的个性,总会想起这段时期. 60 年代他是个很受欢迎的公众事务讲演者,他清高、诙谐、彬彬有礼的,又带点传奇色彩. 新闻媒介一般都很少来找数学家,而数学家能跟计算机、自动化等扯上关系,并把数学在社会中广泛

应用的更是少见.他的那些妙语广为流传.他经常挖苦那些学术法典,那是很有深意的.他深切地希望他所钟爱的数学终有一天会常挂在普通大众的嘴上.他厌恶假装和无知——那是数学家们没有能力的表现,非得用行话解释自己的想法——这让别人觉得数学是门神秘兮兮的学科,他常在数学界这么说,如果他们真正理解一个问题,就应该能用简洁的语言解释给一个门外汉听.因此,他很喜欢教"诗歌中的数学"和导言课这些课程.他还喜欢解释一些精练难懂的数学概念,追根溯源,直到揭开它们的面纱而被人们所接受:这些概念其实都是人类智慧对上古难题的回答.

Nina 指出:"我认为迪克对科学和工程学的成就完全是基于他能很好地运用数学这个工具的结果.他一直都说他是个数学家,而不是科学家.他认为外界传说他作为一个数学家可以涉猎任何领域而不用有太多的专业知识的说法,简直像是开玩笑.当被人问起数学究竟有什么好处的时候,他会说:'没什么用.'我就问他,既然已经把数学在工程、医药、社会科学、预防病虫害、语言学、经济等各个领域都作了广泛的应用,又为什么还那么说呢?他回答说:'是,数学是可以在这些方面得到应用,但这些都不算很有趣.'他常会在自己的世界里沉浸数小时,他喜欢下棋,但要说到娱乐,象棋就比不上数学了.虽然数学界公认他偏重于应用,但他总觉得他是个纯粹的数学家.他觉得他欠那些支持他数学研究的人们一份情,而且作为对他在数学上投入时间的回报,他没能把数学应用在工艺学上,这又欠了美国公众一点什么.并不是完全出于大公无私的立场,但他真的对他在应用方面的成就感到很欣慰."

他说他从不准备去赢得什么大的竞争,但他四十多岁时没有被选入国家科学院的事还是让他感到不高兴,但他也有时会承认他个人对此事也是有责任的,"如果有人说他的学生可以在半小时内解决缠绕你数年之久的难题,他自然会树敌很多的."他说.很明显他的生活方式和他的解题方式相差无几.爱因斯坦有一次写道:

“科学的要旨在于不断地完善自己每天的想法.”迪克恰恰是个能动性很强的人.

Kirstie 说:“我父亲相信人活着就要多动脑子.他日常作决定的方式就是他做学问的方式.我有一大堆很怪的信,都是读大学时他写来的.我们列举出一件事情的各种选择和可能的结果,并画成流程图.小时候,他让我们做各种事情,不论是狂野的还是天真的,但绝不能做蠢事.他是个很有挑战性的家长,对我们跟对他自己一样严格要求,但总是很善解人意,也很有责任心.”

对 Eric 来说,迪克玩的时候最能表现出他的生活方式.“爸爸常在下棋时对我说很多生活哲理.他会探过身子来,警告我‘速度,速度……,时间,时间……’就像他的能动性理论,不先是你作出什么样的决定,就连你何时作出决定都同样重要.他强调前进,接近目标,是成功的一半.”

他是个有双重性格的人.众所周知他很少耐心,但如果是要他写书写论文,或者做题的时候,他就显得极有耐心,常常一坐就是几个小时.他没耐心在医生那里等叫号,却会把他的著作增删十遍,直到满意为止.如果有人说他是个拙劣的数学家,他会一笑置之;但若说他是个拙劣的网球运动员,他就会很恼火.

1973 年,当他病魔缠身的时候,他微笑迎战,更好地动脑.他尽可能多地坚持锻炼,以保持健壮的体格.当看他的出版纪录并没有因为他的病而受影响,他倍感自豪.他一直都决心要克服他身体的缺陷,一直到他的最后一天.他为将来作着打算,为夏天制订了一套锻炼计划,又安排他计划写的九本书的章节.唯一能使他回首过去的是他的出版纪录,因为他觉得这是他留给后代的宝贵遗产,不仅是数学家,还有工程师、医生、科学家和商人,等等.

在他生命的最后十一年里,这个赢过网球赛,作过环球旅行,经常运动的人,只能坐在轮椅中度日.当他能再次与人交流的时候,他的作品又成倍地增长,好像他能量无限似的.他病后很多事

都不能自理，心有余而力不足，只能生活在一成不变的模式之中，每天锻炼、工作、打电话.他的脑子一直是他的避难所，这时也成了他所剩无几的欢愉所在了.

Nina 也回忆起这段痛苦时期的最初阶段，"他对一项成就最为得意，那就是他天生幽默，很能逗人开心.当把我逗笑时，他有时会说他很高兴二十年了还仍然能把我逗笑.正是他的这种幽默感使他在过惯了好动的生活之后还能适应轮椅上的生活.当他肿瘤切除手术后第一次从镜子里看到自己的形象时，他说他看上去不错，就像毕加索抽象作品中的人物.

他的故事意外地中断了.理查德·厄尼斯特·贝尔曼一直保持活跃，工作、计划，直到他的最后一刻.1984 年 3 月 19 日，他因心脏病猝然辞世，毫无抢救的机会.他所留下的思想财富，一定会流传下去，供后世的数学爱好者们研究.

译者注：本文译自 The Bellman Continuum, World Scientific, 1986, 3—11.原题名为 Richard Ernest Bellman.谨以此译文纪念贝尔曼逝世十周年.

（广州外国语学院　陈东雷译）

新书评介

评《几何不等式的新进展》

Dan Pedoe

O. Bottema, R. Ž. Djordjević, R. R. Janić, D. S. Mitrinović和P. M. Vasić合著的《几何不等式》(1969年出版)只不过151页的篇幅,包含约400个不等式,涉及225位作者,然而却引起了人们极大的兴趣.我们所评论的这部巨著《几何不等式的新进展》(D. S. Mitrinović等著,1989年出版,710页),就是朝这个方向迈出的坚实的一步,它包含了到1986年为止从事不等式研究的750位作者的名字,收集了几千个不等式.该书还叙述了若干猜想、未解决的问题以及可追溯到19世纪的研究.本书引用的文献,除了来自用英文、法文、德文和俄文发表的刊物外,还来自用中文、日文、塞尔维亚——克罗地亚文、保加利亚文、罗马尼亚文、匈牙利文以及荷兰文发表的刊物.本书所涉及的题材简直令人眼花缭乱,"数学及其应用东欧丛书"编辑Michiel Hazewinkel在本书前言的末尾引用Bruce Bairnsfather提出的挑战:

好吧,如果你觉得还有更好的,就拿出来看看!

第一次世界大战时.评论者还是一个孩子,就曾记得Bruce Bairnsfather创作的动画片以严密的构思使英国公众确信能经受住堑壕战.这个动画片显示出一位红光满面的伦敦佬在用蜡烛照明的舒适的壕沟里抽着烟,在煤油炉上烤着香肠,畅饮啤酒.该丛书的编辑还简短引用了G. K. Chesterton的小说和R. Van Gulik的"中国迷惘的谋杀"(The Chinese Maze Murders),列出了

Eugene Wigner 的一篇著名论文的题目，末了还分别引用了 William Blake 和 J. L. Lagrange 的名言.

换句话说，该丛书编辑无非是以此说明，这个领域是属于他的，而且大概不会有人对此持有异议. 他指出几何不等式对几何以及除传统的几何以外的领域，比如复函数论，变分法，函数空间的嵌入理论，以及更一般地，在若干领域(像微分方程)中作先验估计，都有重要的应用.

在以 a,b,c 为边的任意三角形中，有不等式

$$b+c>a,\ c+a>b,\ a+b>c.$$

这一组基本不等式，自然称为三角形不等式. 似乎在欧几里得时代，而且肯定在欧几里得之前，正如任何愚人都懂得去寻找干草来使火烧得更旺那样，都知道任两点之间的最短距离是连接它们的直线段. 本书第一章研究满足较复杂条件下三角形的存在性. 开头是涉及外接圆半径、内切圆半径和半周长的不等式. 本章末尾给出了 48 篇参考文献. 这些文献奠定了全书的风格. 这是因为在正文中作了必要的历史评论，探讨了一些定理之间的联系并且在适当地方给出了简短的证明，在参考文献中，收集了从 Möbius 1852 年的论文到现代 Paul Erdös 的论文以至 Murray Klamkin 的短文.

第二章处理“几何不等式与正数不等式之间的对偶性”，第三章论述“齐性对称多项式几何不等式”，第四章研究“各种三角形不等式和带(R,r,s)的三角形不等式之间的对偶性”，……，总之，与几何有关的不等式的方方面面都考虑到了.

1941 年. 我在索斯安普敦躲避空袭时，用铅笔在纸上心不在焉地写写画画. 我惊奇地发现，无论将一个给定的三角形怎样正交投影成一个等边三角形，总可推广为将一个给定三角形正交投影成一个具有给定形状的三角形. 在这个总可以实现的证明中，我发现了涉及边长分别为 a,b,c 和 a',b',c'，面积分别为 Δ 和 Δ' 的两个三角形不等式：

$a^2(-a'^2+b'^2+c'^2)+b^2(a'^2-b'^2+c'^2)+c^2(a'^2+b'^2-c'^2)$
$\geqslant 16\Delta\Delta'$,仅当两个三角形相似时等号成立.

我认为这是一个有趣的不等式,这个一般的不等式还启发我将两个凸区域的混合面积同它们各自的面积联系起来.我试图发表这个不等式,然而牛津的某些人却以正交投影的术语相混而拒绝发表.已故的伟大几何学家 Beniamino Segre,是来自意大利的难民.他怀着抑郁的心情,自封为"数学荣誉学位考试"的资料库.(真奇怪,那个时代的荣誉学位考试竟包含那么多优美的几何).在英国以外的著名几何学家,比如 Hadwiger,只不过对单一三角形不等式很感兴趣,因此这个涉及两个三角形的不等式,如果不是被我发现,就可能被人们所遗忘.我利用了另一种不包括正交投影的几何方法来证明我的不等式,于是就被剑桥哲学会会报作为研究短文接受发表.

一位 19 世纪的几何学家 J. Neuberg 曾发现过这个不等式,并且注意到若两个三角形相似.则显然等号成立,但没有证明等号成立也可推出这两个三角形相似.因此,这个定理就称为 Neuberg－Pedoe 不等式.

近来,这个不等式引起了人们极大的关注.中国大陆两名年轻的几何学家已经将这个不等式推广到 n 维欧氏空间的 n 维单形上.顺便提一句,这表明所谓大学代数是不应忽视的.我们所评论的这本书有一节关于 Neuberg－Pedoe 不等式和 Oppenheim 不等式,占了 15 页篇幅,列出了 38 篇参考文献.

最后一章是 E^n 中的不等式,占了 100 页篇幅,末尾列出了 129 篇参考文献.而前几章所考虑的不等式是关于四边形、多边形、圆的不等式.以及某些特殊不等式.当然,还考虑了等周不等式.许多参考文献可追溯到 19 世纪,然而引起我特别注意的只有一篇:

S. A. J. Lhuilier;De relatione mutua capatitatis et

terminorum figurarum, geometrice considerata: seu de maximis et minimis, Varsaviae, 1782.

我在1941年所得到的那个结果，即将一个给定三角形正交投影成一个具有给定形状的三角形，当然就是 Lhuilier 定理. 这个定理是说，一个三棱柱可以被一个适当的平面切成一个任意给定形状的三角形. 前提是得承认"齐次坐标和 Lhuilier 定理"("Crux Math."1983年第九卷，160－165页)，这也是对 Dieudonne 的挑战"究竟谁还在使用齐次坐标?"的回答.

唯恐有人认为，这本名著对于一般读者是太高深了，作者们强调他们的书打算供广泛的读者使用，既照顾到高中学生、大学生，也可供大学教授使用，为了说明本书人名索引的广泛性，下面列出的名字是我本人所认识或通过通信所知道的.

A. Oppenheim 先生曾委派我去新加坡大学任教. 他是一位为联邦教育服务的爵士. 特别是当新加坡被日本军队所占领时，还奔波于战俘集中营大学. Hidetosi Fukagawa 在他后四十年生涯中是一名日本高级中学教师. 在写作"日本神殿几何问题"(1991年4月的美国数学月刊曾加以评论过)时，我与他合作达六年之久. 这本书反映了18和19世纪日本的几何爱好者的研究成果. 这些来自日本社会各阶层的几何爱好者将他们所得到的定理写在木块上，然后将它们挂在神龛和神殿旁边. George Tsintsifas 是希腊萨洛尼卡一所私立高级中学校长. Walther Janous 在奥地利因斯布鲁克 Ursuline 女修道会办的学校任教.

在保加利亚索非亚，Jordan Tabov 在学生时代就在多次数学竞赛中出了名，他的妻子也是数学家. 杨路和张景中是前面提到的那两位年轻的中国大陆几何学家. 他们利用计算机和多项式的 Hilbert 定理来证明著名的新定理，可以称之为中国几何的 α 和 ω. 他们的结果首先发表在"Crux Math."杂志上，这些只利用一只"生锈"圆规(即半径固定不变的圆规)作图的潜力使人大为惊奇.

看来中国大陆的几何幸免于“文化”革命. Murray Klamkin 受雇于福特汽车公司,再次成为一名大学教授并且大量收集和解决问题,J. F. Rigby 是一位英国大学教师,而且是英国领头的几何学家之一. Donald Coxeter 多年住在加拿大,人们称他为几何的 G. O. M. (Great Old Man 的缩写,意为伟大的老人—— 译注). Roland Eddy 来自纽芬兰 St. John 大学,曾受到他的导师 W. J. Blundon 教授的鼓励. 这表明 W. J. Blundon 教授的远见卓识,而在本书中,W. J. Blundon 教授本人对几何的研究也颇具特色. Jordi Dou 是一位住在巴塞罗那退休的建筑大师,几何是他的本能. 大名鼎鼎的数学家 Bernhard Neumann 多年生活在澳大利亚,他和他的妻子 Hannah 的论文选集恰好与我和 Fukagawa 合写的书被同一个出版社出版. 近来 I. M. Jaglon 因他的几本译自俄文的几何书,而一举成名. T. J. Fletcher 几年前曾任政府的贵族学校督导员,她写过几本优秀的教科书而且倡导拍摄几何题材的影片. S. Iwata 是日本著名的“几何百科全书”的编辑,还是参与讨论日本神殿几何问题的热心之士. 我的合作伙伴 Hidetosi Fukagawa 在那几年中就多亏 Iwata 教授的鼓励. V. C. linis 和 Fred Maskell 都曾是“Crux Math. ”杂志著名编辑 Léo Sauvé 早期的强有力的支持者. 他们虽然都去世了,但人们并没有忘记他们,曾在曼彻斯特任多年教授的 L. J. Mordell 的数论著作到现在仍然很有名.

Dmitri Mavlo 用熟练的英文从莫斯科给 Léo Sauvé 和我本人曾多次写过热情洋溢的信. 在这些信中附过照片,邀请我们去苏联旅行,为“Crux Math. ”杂志提供带启发性问题. 现在他已不再来信,因为在他最后一封来信中曾暗示在戈尔巴乔夫时代以前,碰到社会制度方面的麻烦. Leon Bankoff 是洛杉矶的一名牙科医生,然而多年来他却以几何方面漂亮的工作令人刮目相看. Bob Osserman 是一位杰出的几何学家,他的论文“八十年代的曲率”是“美国数学月刊”1990 年 10 月号几何专辑中六篇文章之一. Van

der Waerden，人们大概还记得他那本写得极好的“近世代数”，(该书原先在德国出版)，他接着又以深厚的功底写作难度很大的“代数几何”. 并以系列论文的形式在“数学年刊”(Math. Ann.)上发表. 当然，举世闻名的 Paul Erdös 在很多方面都是首屈一指的.

最后一点但并不是最不重要的，J. C. (Chris.) Fisher，D. Ruoff 和 J. Shilleto 都是北美新涌现出的活跃的几何学家，他们愉快地合作研究，联名发表文章.

很明显，我们所评论的这部巨著在今后十年内将会再版，所列的名单就会按指数增长. 本书作者们真诚欢迎评论和指正，就我与一位合著者写过两本书的体会，真不敢想象这三位作者在合作写作这本书时的那些后勤工作. 或许像制作某些电影那样，能有一本书讲一讲如何写作这本书. 一方面，我觉得这大概是最近十年中最激动人心的一本书，同时也在数学发现的乐趣中树立了合作的典范，而这些都是人们所梦寐以求的. 很可能召开的国际不等式会议，将是当代比较重要的文化事件. 然而，在最近的将来，本书应该收藏在每所大学和学院的图书馆，收藏在每所中学的图书馆，这对改进数学教学是有益的.

译者注 本文译自 The American Mathematical Monthly，98(1991) 977—980. 原文无标题，译文标题为译者所加. 所评论的本书原名是：Recent Advances in Geometric Inequalities，By D. S. Mitrinović，J. E. Pečarić and V. Volonec，Kluwer Academic Publishers，Dordrecht/Boston London，1989，xix＋710PP. 本书的中译本《几何不等式的新进展》由陈计等译，北京大学出版社 1995 年出版. 此书的补遗(I)见《宁波大学学报》(理工版)1991 年第 2 期，79 145.

(湖南师范大学 匡继昌译)

编 后 记

诚如蒋声教授在本书序言中所述，初等数学研究，是现代数学各个分支的生长点，也是现代数学传播的窗口；另一方面，初等数学研究是提高教师水平的切实可行的途径，也是促使他们热爱数学教育事业的有效方式.因而，当今世界各国有很多以初等数学研究为主的刊物，如罗马尼亚《数学杂志》(Gaz. Math.)，德国《初等数学》(Elem. Math.)，加拿大《数学难题》(Crux Math.)及《美国数学月刊》(Amer. Math. Monthly)等.

近年来，国内初等数学研究热潮的兴起，似乎与蓬勃开展的数学竞赛活动直接相关：80年代初，大量结论新颖、解法别致的赛题被介绍到国内，引起了人们强烈的好奇心；对赛题背景的探讨、结论的引申一时成为风尚，并由此与国外的研究接轨，进入初等数学的前沿.初等数学研究又由于其自身的特点(如问题的来龙去脉及结果的优先权等)，已逐渐从数学竞赛的活动中独立出来.90年代初，湖南、福建、陕西等省市专门成立了初等数学研究学会，华中师大等高师院校也相继开设了现代初数研究的课程；全国初数研究交流会先后在天津、长沙召开了两次.1992年出版的《初等数学研究论文选》(上海教育出版社)与《中国初等数学研究：1978—1988》(科技文献出版社)，及时地回顾与总结了这十几年来的成果.1993年秋，国内一些数学编辑聚会武汉，深深感到“有些数学教师，在一缺时间、二缺资料、三缺学术风气的环境里，依然从事初等数学研究，作出了可喜的成绩.他们的精神令人敬佩，然而他们的成果却难以获得应有的承认.”希望能广开园地，组织各方面的专家审理稿件，并撰写引导性的文章，以反映初等数学前沿.这就是本书的

起源.

本书的五十余篇文章,以初等数学研究论文及短文集锦为主,也包含了初数研究讲座、翻译报告、未解决的问题及治学方法、现代数学介绍、当代数学史话、人物传记、翻译新书评介等方面的题材. 其中,有不少文章是作者们见了《数学通讯》1994 年第 4 期上的征稿启事后投来的. 由于初等数学的历史悠久,文献又散落无边,审稿是一项十分艰难的任务. 尽管编者们尽了很大的努力,并征询了单墫教授、王文才副编审等同行专家的意见,但不当之处在所难免. 在第一辑出版之后,我们热忱希望广大读者提出批评与建议,以利于第二辑的改进与提高.

王巧林　陈　计　叶中豪

一九九四年十二月于宁波大学

［General Information］
页数=465
书名=初等数学前沿
SS号=11495067

书名
版权
前言

目录